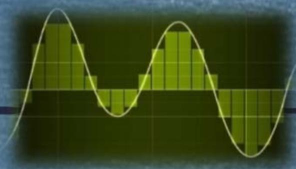
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η

- Σήματα και Συστήματα

Τι περιέχει το HY215?

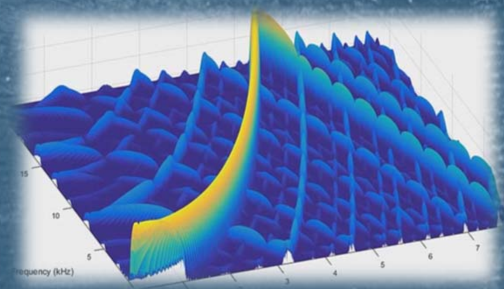


1ο Κομμάτι

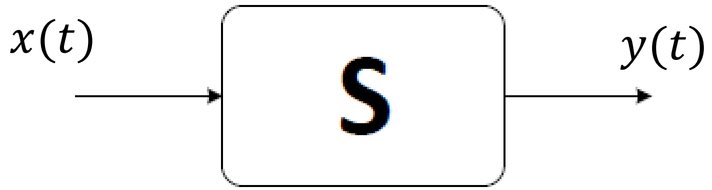
- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- **Σήμα**: φορέας πληροφορίας
  - Π.χ. εικόνα, ήχος, βίντεο, σύνολο δεδομένων, κλπ.
- Στα δικά μας πλαίσια, θα θεωρούμε ένα σήμα ως μια χρονοσειρά, δηλ. μια συνάρτηση του χρόνου
  - Η πληροφορία βρίσκεται στις μεταβολές του σήματος ως προς το χρόνο
- **Σύστημα**: δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$



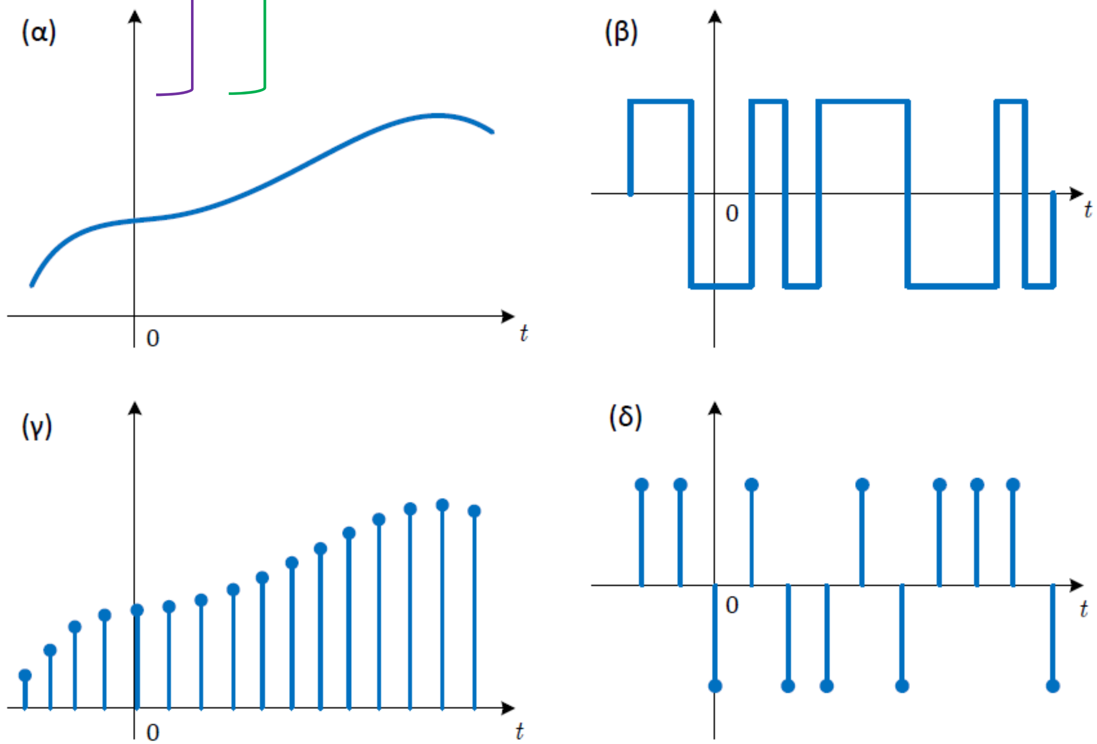
- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου
  - Υπάρχουν και συστήματα πολλαπλών εισόδων ή/και πολλαπλών εξόδων
- Ας μιλήσουμε πρώτα για τα σήματα…
  - … για τα οποία είπαμε ότι θα περιγράφουμε **ως συναρτήσεις του χρόνου – $\boldsymbol{x(t)}$**

- **Σήματα**
- **<u>Κατηγορίες σημάτων:</u>**

1. Συνεχούς ή διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά ή ψηφιακά σήματα
3. Σήματα περιοδικά ή απεριοδικά
4. Σήματα ενέργειας ή ισχύος
5. Ντετερμινιστικά ή στοχαστικά

HY215

HY370



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα σήμα με έναν αριθμό
  - Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να αντιπροσωπεύει το «μέγεθος» του σήματος
- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Αν $0 < E_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ενέργειας
- Αν $0 < P_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!
  - Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x(t) = t^n, \qquad x(t) = e^{at}$$

δεν είναι τίποτε από τα δυο

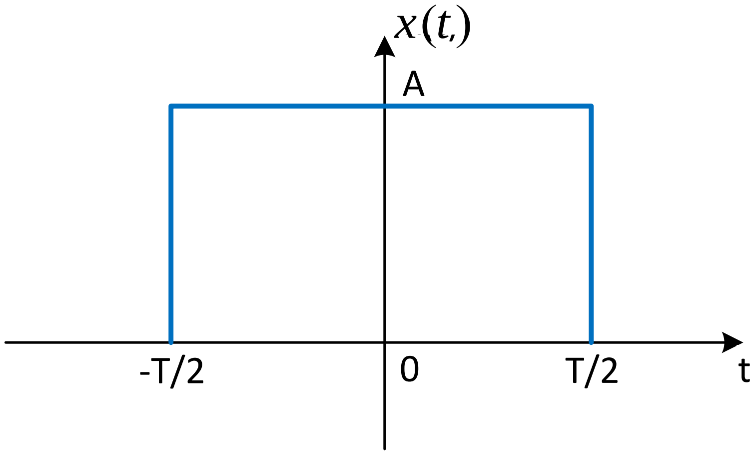
- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (εν γένει) εκ των προτέρων αν ένα σήμα είναι ενέργειας ή ισχύος (η τίποτε)
  - Υπάρχουν όμως κάποιοι «κανόνες» για να μην υπολογίζουμε κάθε φορά τυχαία μια εκ των δυο ποσοτήτων (και κάποιες φορές αναγκαστικά και τις δυο)

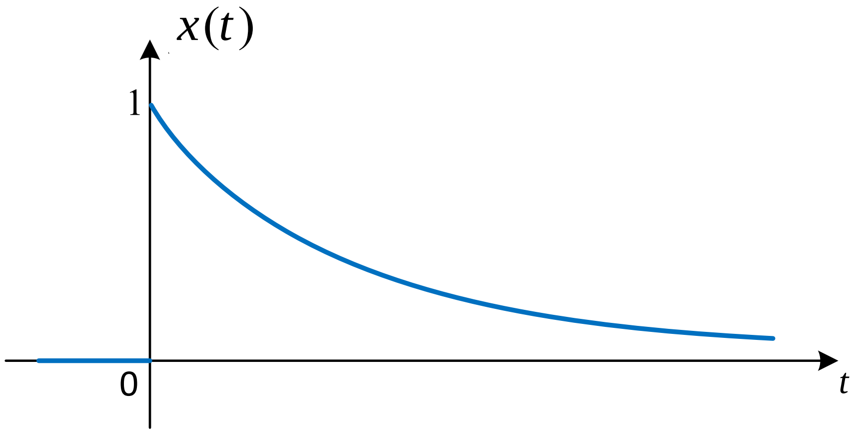
- **Κανόνες**:
  - Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == **φραγμένο πλάτος για κάθε t**

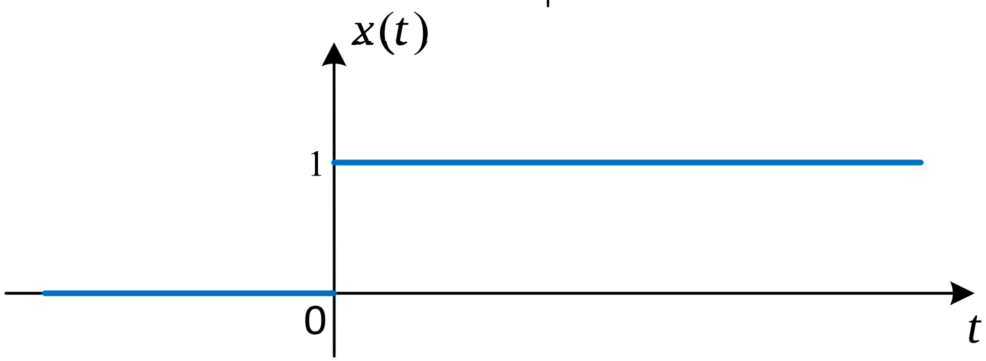
❑ Σήμα Ενέργειας
- ✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο
- ✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$
  - ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

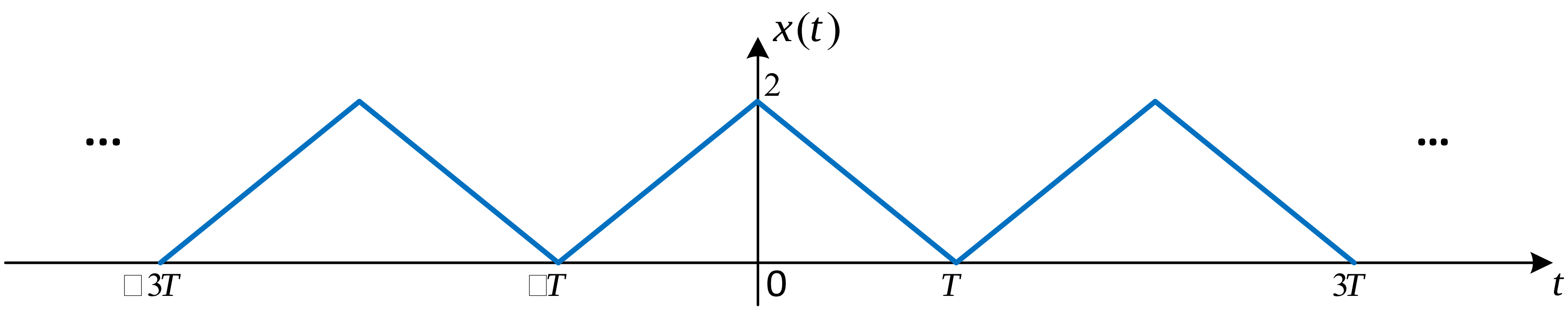
❑ Σήμα Ισχύος
- ✓ Άπειρης διάρκειας
- ✓ Περιοδικό

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**









- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

- Κάθε σήμα που μπορεί να φτιάξει κανείς στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση είναι σήμα **ενέργειας**

- Όμως τα σήματα ισχύος παρέχουν ένα αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για γενικότερη μελέτη σημάτων και συστημάτων

- Ας δούμε μερικά παραδείγματα

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

Ο Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

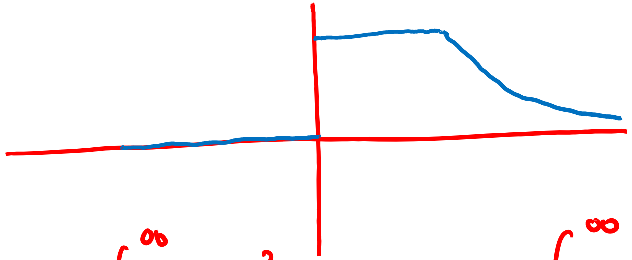
- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$ $\qquad x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

Ο Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^1 1\, dt + \int_1^{\infty} (e^{-t})^2 dt = 1 + \int_1^{\infty} e^{-2t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-2t}\Big|_1^{\infty} =$$

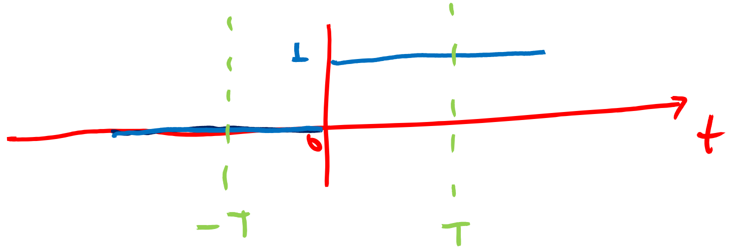
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-2t}} - e^{-2}\right) = 1 + \frac{1}{2e^2} < \infty$$

Σήμα ενέργειας

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

Ο Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\cancel{T}}{2\cancel{T}} = \frac{1}{2} < \infty$$

Σήμα Ισχύος

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας και Ισχύος**
- Μπορεί κανείς εύκολα (αλλά με κάμποσες πράξεις) να δείξει ότι

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), A \in \Re \rightarrow P_x = \frac{A^2}{2}$$

1

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), A_i \in \Re \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^{N} \frac{A_i^2}{2}$$

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, A \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = |A|^2$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i e^{j2\pi f_i t}, A_i \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^{N} |A_i|^2$$

- Εξασκηθείτε αποδεικνύοντας αναλυτικά τα παραπάνω! ☺

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$

$T \leftarrow$ ΔΕΝ είναι περίοδος

α) $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt =$

$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\cdot 2\pi f_0 t)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\cancel{2T}}\frac{A^2}{2}\cancel{2T} +$

$\cancel{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{A^2}{2}\int_{-T}^{T}\cos(2\cdot 2\pi f_0 t)\,dt} \rightarrow 0 \quad = \frac{A^2}{2}$

Περίοδος $T_0 = \frac{1}{f_0}$

β) $P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt =$

$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\cdot 2\pi f_0 t)\right]dt = \frac{1}{\cancel{T_0}}\frac{A^2}{2}\cdot\cancel{T_0} +$

$+ \frac{1}{T_0}\frac{A^2}{2}\cancel{\int_0^{T_0}\cos(2\pi\cdot 2f_0\cdot t)\,dt} \rightarrow 0 \quad = \frac{A^2}{2}$

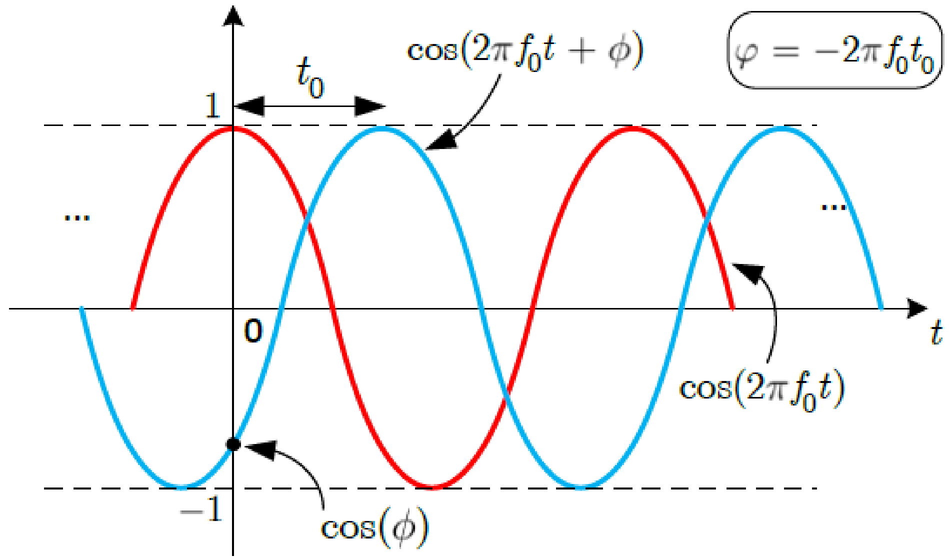
- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t

  - Χρονική ολίσθηση (time shifting)
  - Χρονική αντιστροφή (time reversal)
  - Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

■ Χρονική μετατόπιση/ολίσθηση (time shifting)

- Η χρονική ολίσθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη μετατόπιση του σήματος δεξιά ή αριστερά στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $t - t_0$, με t_0 θετικό ή αρνητικό
  - Αν t_0 θετικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα δεξιά → καθυστέρηση
  - Αν t_0 αρνητικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα αριστερά → προήγηση
  - Η χρονική ολίσθηση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)
- Θυμηθείτε τα ημιτονοειδή σήματα

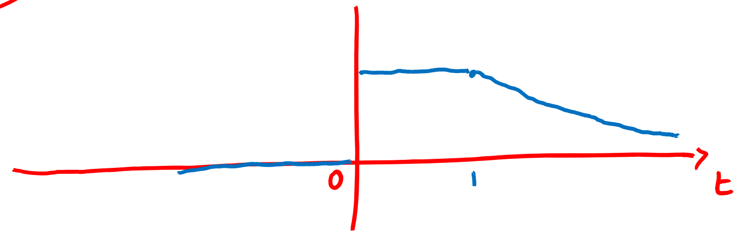


- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

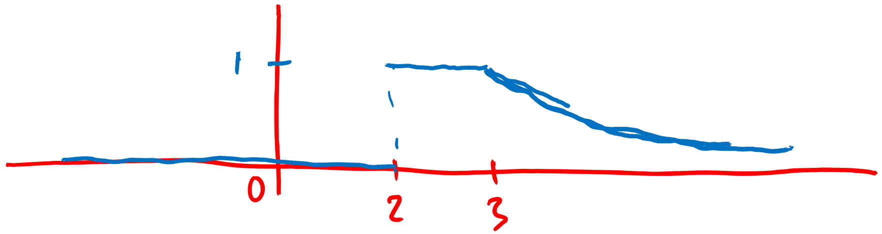
Ο Βρείτε το καθυστερημένο κατά $t_0 = 2$ σήμα για το παρακάτω σήμα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

$$x(t-2) = \begin{cases} 0 & t-2 < 0 \\ 1 & 0 < t-2 < 1 \\ e^{-(t-2)} & t-2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 & 2 < t < 3 \\ e^{-(t-2)} & t > 3 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

■ Χρονική αντιστροφή (time reversal)

- Η χρονική αντιστροφή δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $-t$

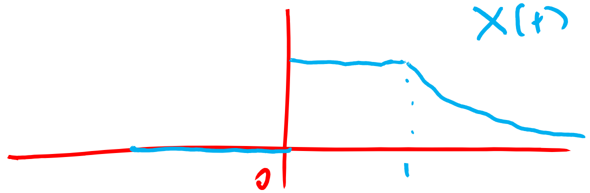
  - Αν το σήμα «ζει» στο θετικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στον αρνητικό ημιάξονα
  - Αν το σήμα «ζει» στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στο θετικό ημιάξονα
  - Αν το σήμα «ζει» και στους δυο άξονες, τότε το τμήμα του θετικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στον αρνητικό ημιάξονα και το τμήμα του αρνητικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στο θετικό ημιάξονα
  - Η χρονική αντιστροφή ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

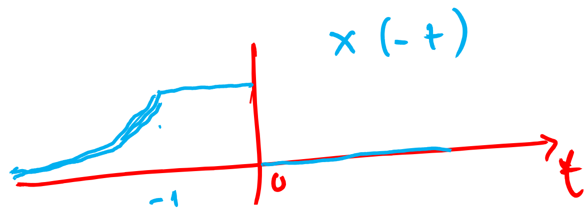
Ο Βρείτε το σήμα $x(-t)$ για το παρακάτω σήμα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

$x(-t) = \begin{cases} 0 & -t < 0 \\ 1 & 0 < -t < 1 \\ e^{-(-t)} & -t > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & -1 < t < 0 \\ e^{t} & t < -1 \end{cases}$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

▪ Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

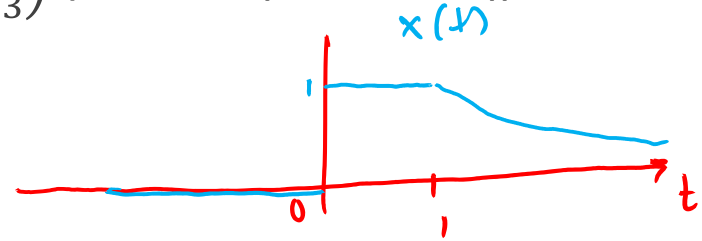
- Η χρονική κλιμάκωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη συμπίεση ή την επέκταση του σήματος στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $at, \alpha \in \Re$
  - Αν το σήμα «ζει» στο διάστημα $[c, d]$, τότε η κλιμάκωση κατά $a \neq 1$ θα το «μεταφέρει» στο διάστημα $[ca, da]$
  - Αν ο παράγοντας κλιμάκωσης είναι αρνητικός, γίνεται χρονική αντιστροφή παράλληλα με τη χρονική κλιμάκωση
  - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

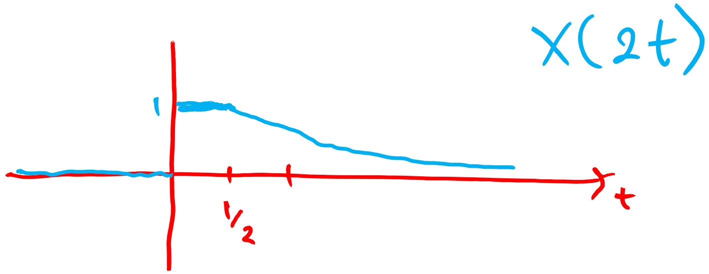
Ο Βρείτε τα σήματα $x(2t)$ και $x\left(\frac{t}{3}\right)$ για το παρακάτω σήμα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

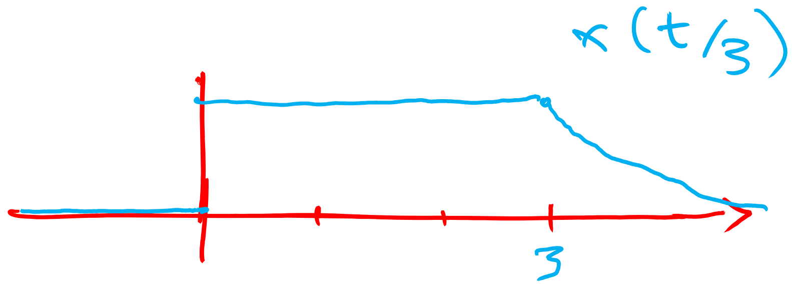


και σχεδιάστε τα όλα.

$$x(2t) = \begin{cases} 0 & 2t < 0 \\ 1 & 0 < 2t < 1 \\ e^{-2t} & 2t > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1/2 \\ e^{-2t} & t > 1/2 \end{cases}$$



$$x\left(\frac{t}{3}\right) : \begin{cases} 0 & \frac{t}{3} < 0 \\ 1 & 0 < t/3 < 1 \\ e^{-t/3} & t/3 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 3 \\ e^{-t/3} & t > 3 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

- **Σήματα**
- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**

- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες

- Αυτά είναι:

❑ **Η βηματική συνάρτηση**

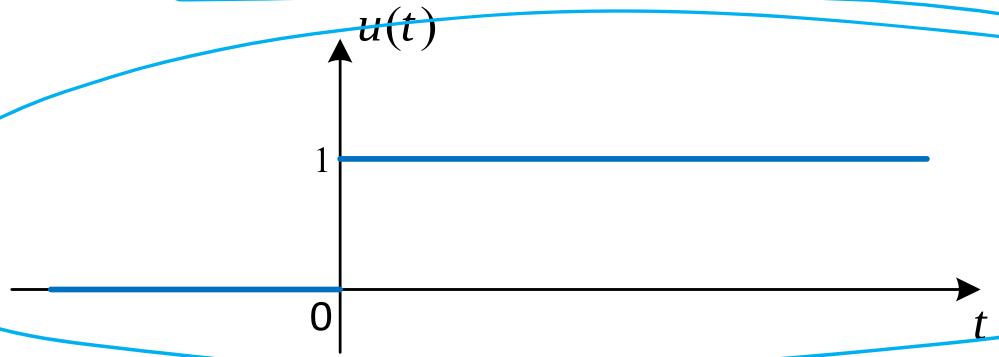
❑ **Ο τετραγωνικός παλμός**

❑ **Ο τριγωνικός παλμός**

❑ **Η κρουστική ~~συνάρτηση~~ (κατανομή) Δέλτα**

- **Σήματα**
- **Η βηματική συνάρτηση**
- Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



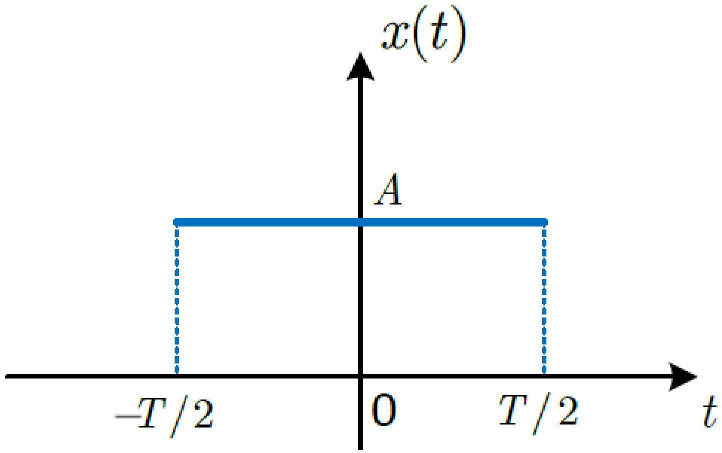
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές της είναι ως σήμα-διακόπτης (off-on)
  - δηλ. ως ένα ιδανικό μοντέλο ενός σήματος που πάει από 0 → 1 ακαριαία
- …ή για να «κόψουμε» τμήματα άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς την με αυτά
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τη βηματική συνάρτηση
  - …εκτός από τη διαίρεση σήματος με τη βηματική (διαίρεση με μηδέν)

- **Σήματα**

- **Ο τετραγωνικός παλμός**

- Ο τετραγωνικός παλμός ορίζεται ως

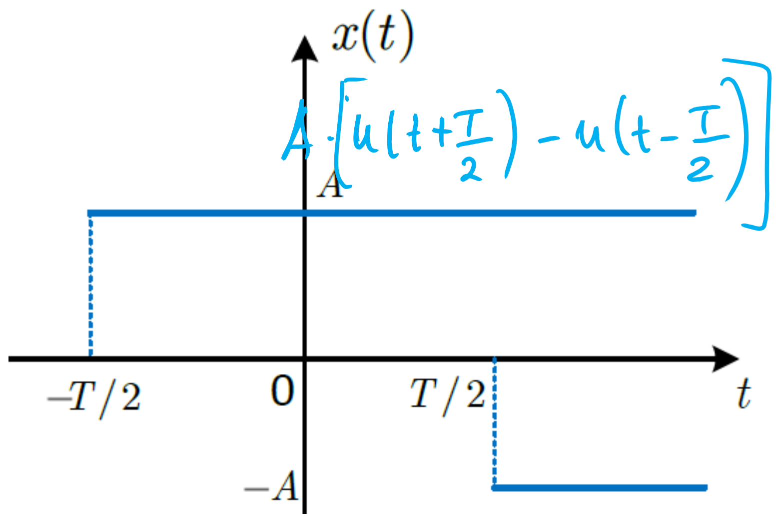
$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A, & -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \end{cases} = \boxed{A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά

- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τετραγωνικό παλμό
  - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

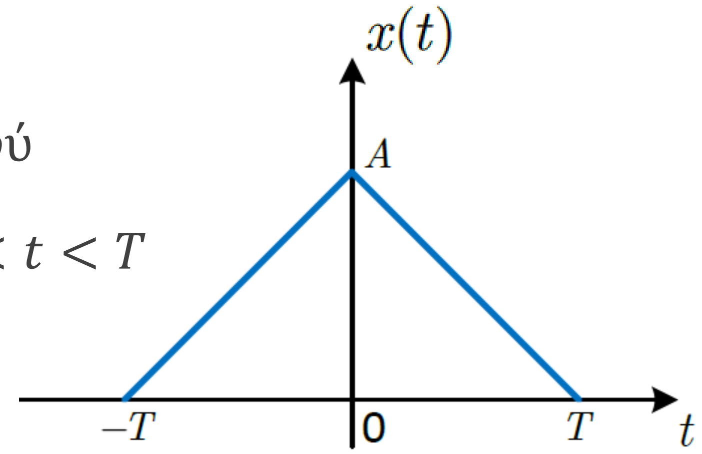
- Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών συναρτήσεων
  - ...όπως στο σχήμα



- **Σήματα**
- **Ο τριγωνικός παλμός**
- Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A\left(1 - \dfrac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases}$$

$$= A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
  - ...αλλά δίνοντας περισσότερο βάρος στις τιμές του σήματος στο κέντρο του παλμού
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τριγωνικό παλμό
  - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

- Προσέξτε ότι στον συνοπτικό τύπο του παλμού ο παρονομαστής T είναι η **μισή** διάρκεια του, ενώ στον τετραγωνικό παλμό ο παρονομαστής T ήταν **όλη** η διάρκεια!

- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:

Ο Σχεδιάστε τα σήματα:

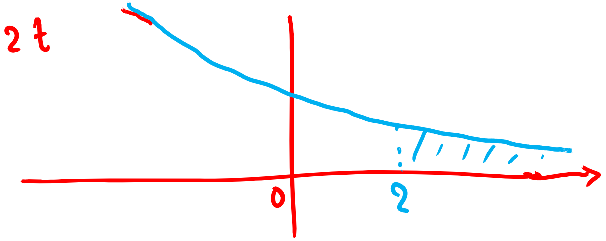
(α΄) $e^{-2t}u(t-2)$

(β΄) $u(t^2-4)$

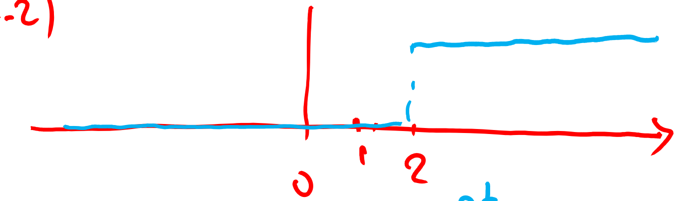
(γ΄) $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

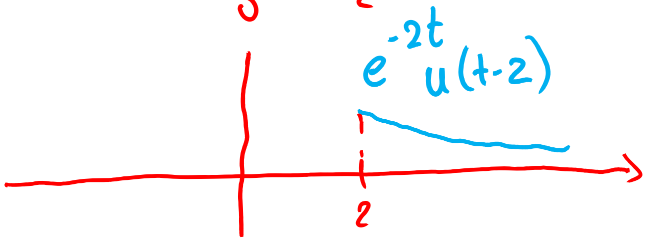
(δ΄) $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

α) e^{-2t}



$u(t-2)$

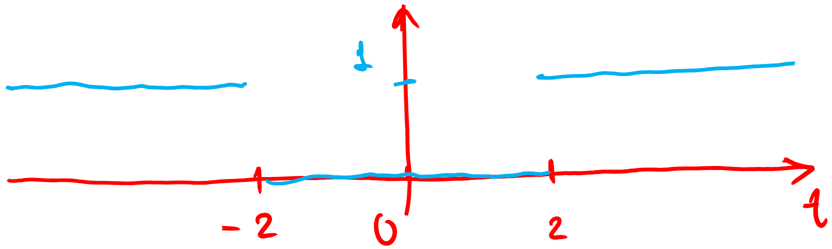




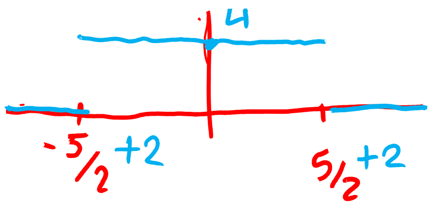
β) $u(t^2-4)$

$u(t): \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \Rightarrow u(t^2-4) = \begin{cases} 0 & t^2-4<0 \\ 1 & t^2-4>0 \end{cases}$

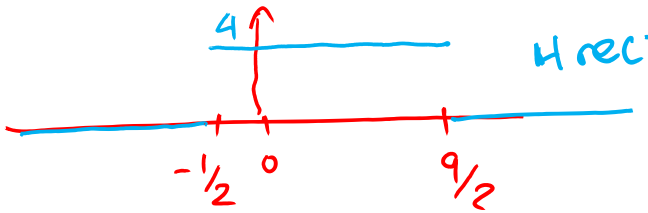
$= \begin{cases} 0 & t^2<4 \\ 1 & t^2>4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & -2<t<2 \\ 1 & t>2,\ t<-2 \end{cases}$



γ) $4\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{5}\right)$



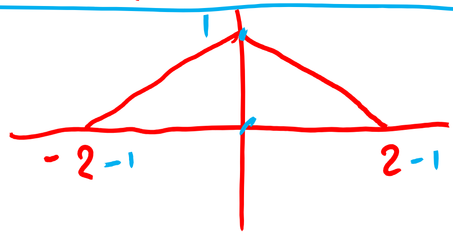
$\rightarrow$



$4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

γ) $tri\left(\frac{t+1}{2}\right) + rect\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

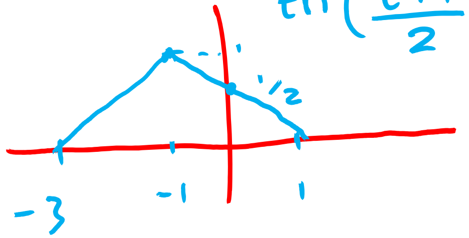
$tri\left(\frac{t}{2}\right)$



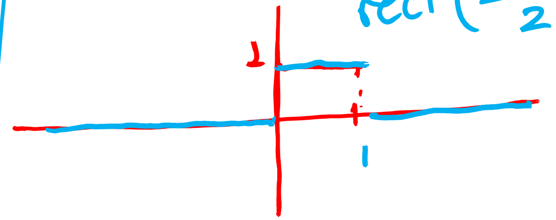
$tri\left(\frac{t+1}{2}\right)$

$rect\left(\frac{\cancel{2}\,(t-1/2)}{\cancel{2}}\right) = rect\left(\frac{t-1/2}{1}\right)$

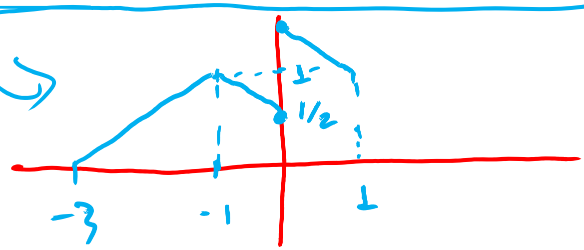
$tri\left(\frac{t+1}{2}\right)$



$rect\left(\frac{2t-1}{2}\right)$



+



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ, ***αλλά με σταθερό μοναδιαίο εμβαδό***, τι θα κάναμε?
  - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$

  - …και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon\to 0} p(t)$
- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία:

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

όταν $\epsilon \to 0$

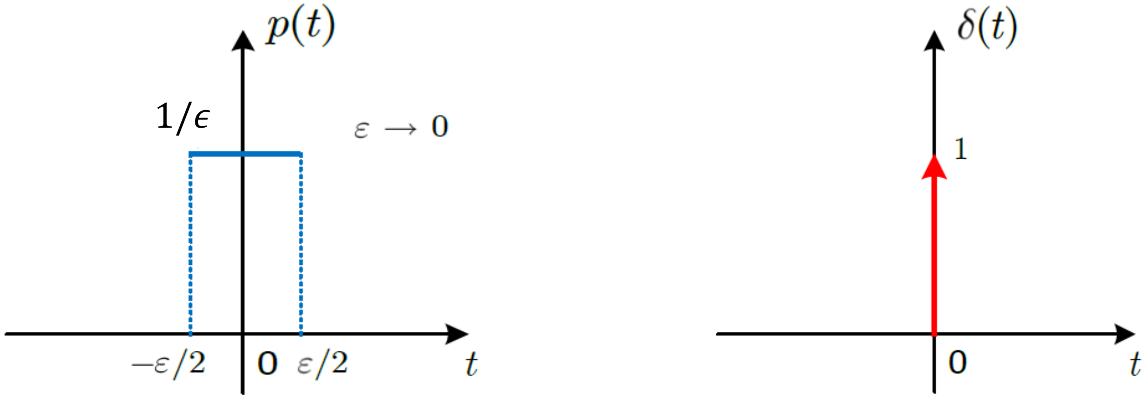
- Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **κρουστική "συνάρτηση" Δέλτα** – ή απλά "**συνάρτηση" Δέλτα** στο εξής – και γράφεται ως $\delta(t)$
  - Η συνάρτηση Δέλτα **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση – είναι **κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση**!

- Η συνάρτηση Δέλτα λοιπόν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω
- Παρατηρήστε τη σχεδίαση της συνάρτησης Δέλτα

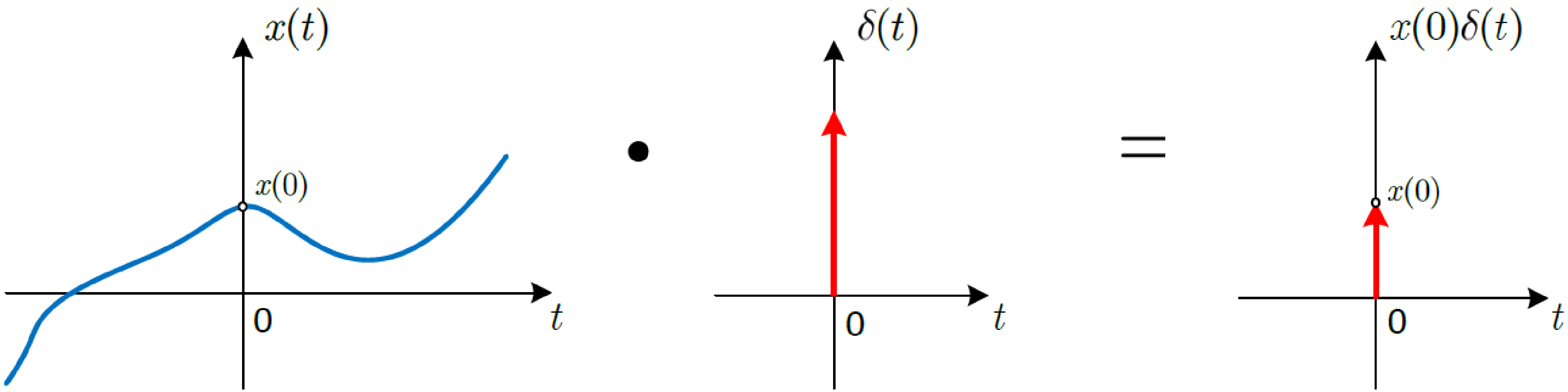


- Προσέξτε ότι το 1 στη «μύτη» της συνάρτησης Δέλτα **δεν** είναι το πλάτος της!
  - Αυτό είναι άπειρο!
- Είναι η τιμή του «εμβαδού» της
- Οι πράξεις που επιτρέπονται με τη συνάρτηση Δέλτα είναι πρόθεση, αφαίρεση, και πολλαπλασιασμός με συνεχή συνάρτηση. Οι μετασχηματισμοί που είδαμε επιτρέπονται όλοι

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Αν πολλαπλασιάσουμε ένα συνεχές σήμα με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία «ζει» τη χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε ουσιαστικά αλλάζουμε το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ουσιαστικά η παραπάνω πράξη **δειγματοληπτεί** το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0
- Σχηματικά:

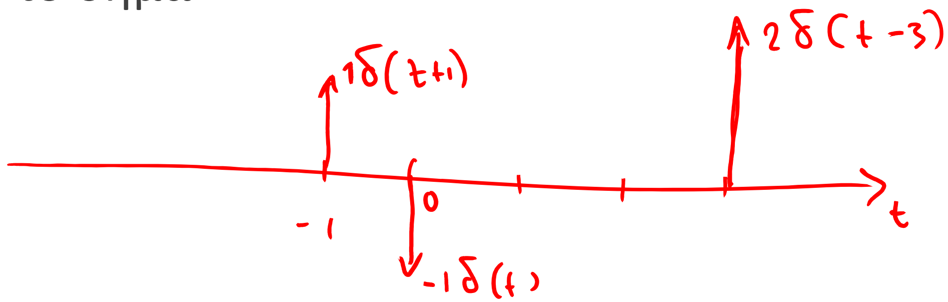


- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Η προηγούμενη ιδιότητα μας βοηθά να ορίσουμε σήματα που έχουν τιμές μόνο για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -1 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

$$= 1\delta(t+1) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3)$$

- Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση της δειγματοληψίας, περιμένουμε να λάβουμε το εμβαδό κάτω από την επιφάνεια $x(t)\delta(t-t_0)$…
    - … το οποίο είναι $x(t_0)$
- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Μερικές ακόμα ιδιότητες που μπορείτε να αποδείξετε είναι οι:

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t),} \qquad a \neq 0$$

$$\boxed{\delta(-t) = \delta(t)}$$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

Ο Υπολογίστε τα

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$(3t^2+1)\delta(t)$ $= 1\cdot\delta(t)$

$(t^2+\cos\pi t\,)\delta(t-1)$ $= (1+\cos\pi)\delta(t-1) = (1-1)\delta(t-1) = 0\,\delta(t-1)$

$e^{-t}\delta(2t)$ $= \frac{1}{2}e^{-t}\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$

$t\delta(t)$ $= 0\,\delta(t)$

$\cos(t)\,\delta(t-\pi)$ $= \cos(\pi)\,\delta(t-\pi) = -\delta(t-\pi)$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$= x(t)\big|_{t=t_0}$

Ο Υπολογίστε τα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (3t^2+1)\delta(t)dt = 3t^2+1\Big|_{t=0} = 1$$

$$\int_{-1}^{1} (3t^2+1)\delta(t)dt = \quad = 1$$

$$\int_{1}^{2} (\log_{10} 10t^2)\delta(t+1)dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+\cos \pi t\,)\delta(t-1)dt = t^2+\cos(\pi t)\Big|_{t=1} = 1-1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\delta(2t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t}\delta(t) = \frac{1}{2} e^{-t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Η (ήδη!) γνωστή μας βηματική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική
  - Έχει άραγε παράγωγο? Αν ναι, ποια είναι αυτή?
- Από τον ορισμό της

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η παράγωγός της είναι παντού μηδέν εκτός από τη στιγμή $t = 0$, όπου δεν ορίζεται παράγωγος

- Αλλιώς, η παράγωγος είναι άπειρη

- Άρα μια «γενικευμένη» έννοια της παραγώγου της βηματικής συνάρτησης θα ικανοποιούσε την ιδιότητα

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

- Επίσης από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} u'(t)dt = u(\epsilon) - u(-\epsilon) = 1 - 0 = 1$$

για $\epsilon > 0$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Συνολικά

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)dt = 1$$

- Μα αυτές οι ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα!
- Άρα η (γενικευμένη) **παράγωγος** της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

- Άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σύνοψη:

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα	
Ορισμός	$\delta(t) = 0,\ t \neq 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{\lvert a \rvert},\quad a \in \Re - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$
Παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = -\frac{d}{dt}x(t)\Big\rvert_{t=0}$
$n-$οστή παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(t)\Big\rvert_{t=0}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ