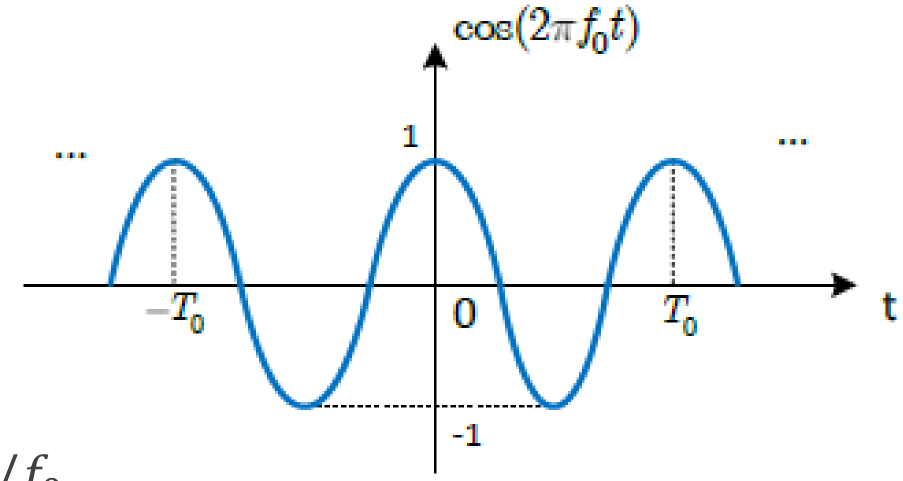
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

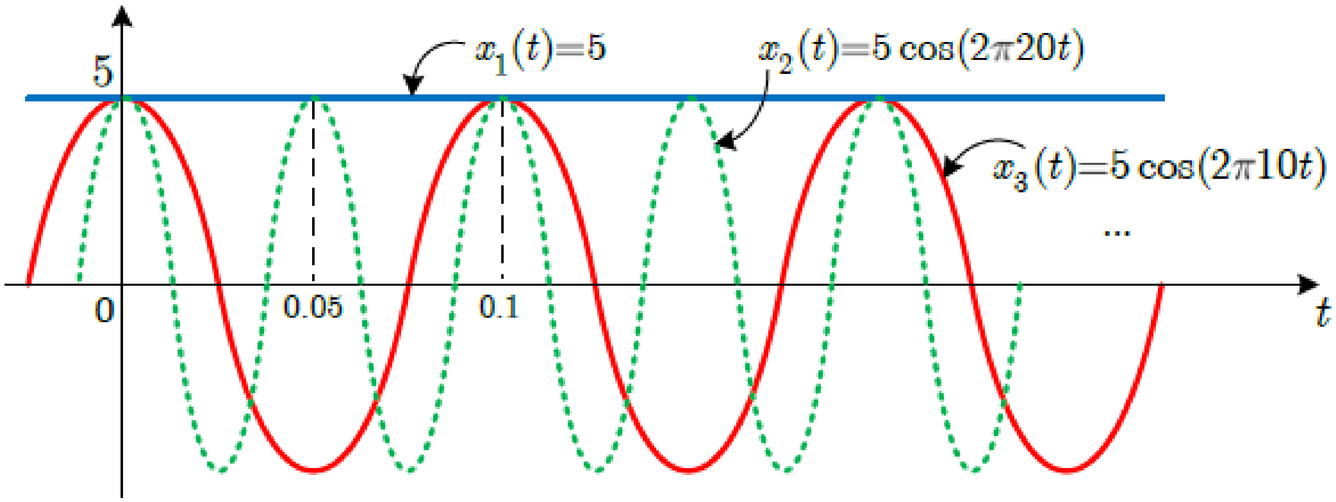
ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η

- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

- Στην έννοιες που θα συζητήσουμε στο μάθημα, παίζουν θεμελιώδη ρόλο οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις
- Γενικότερα, μια ημιτονοειδής συνάρτηση ορίζεται ως $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$
- A: **πλάτος ημιτονοειδούς**
- f_0: **συχνότητα ημιτονοειδούς**
- φ: **φάση μετατόπισης ημιτονοειδούς**



- Κάθε απλό ημιτονοειδές είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου, με **περίοδο** $T_0 = 1/f_0$



- **Μετατόπιση Φάσης**

- Η φάση μετατόπισης είναι μια τιμή που καθορίζει πόσο έχει μετατοπιστεί το ημιτονοειδές από τη θέση $t = 0$

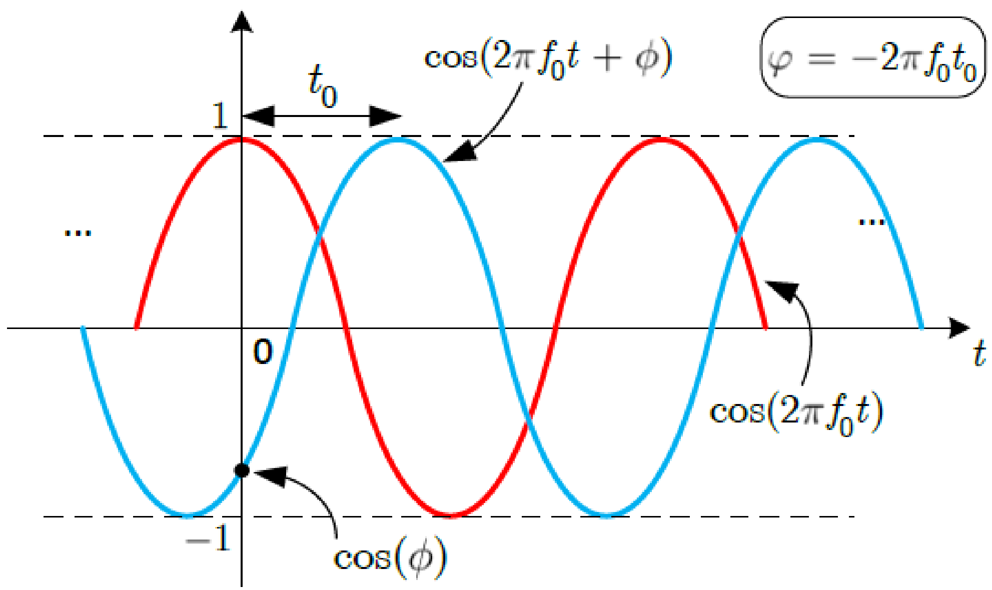
- Αν $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)|_{\varphi=0} = A\cos(2\pi f_0 t)$ το ημιτονοειδές χωρίς μετατόπιση, τότε

$$x_0(t - t_0) = A\cos\big(2\pi f_0(t - t_0)\big) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Μια μετατόπιση κατά t_0 δεξιά ισούται με φάση μετατόπισης

$$\varphi = -2\pi f_0 t_0 = -\frac{2\pi t_0}{T_0}$$

- Σχηματικά:



- **Άθροισμα Ημιτόνων**

- Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως μπορούν να απλοποιηθούν οι πράξεις μεταξύ ημιτόνων όταν περνάμε μέσα από το μιγαδικό χώρο

- Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

- Από τις σχέσεις του Euler, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + B\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\} \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t} + Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\} \\ &= \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}$$

- Όμως: $A + Be^{-\frac{j\pi}{2}} = A - jB = \sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}, \ \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$

- **Άθροισμα Ημιτόνων**
- Άρα

$$x(t) = \Re\left\{\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\}$$

- Από την τελευταία σχέση εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται και για N ημίτονα
- Ο μιγαδικός $\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)$ ονομάζεται **φάσορας (phasor)**

- **Παράδειγμα:**

Ο Λύστε την εξίσωση $A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi 50 t + \pi) + \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\mathrm{Re}\{A \cdot e^{j\varphi}\, e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j\pi} \cdot e^{j2\pi 50 t}\} + \mathrm{Re}\{e^{-j\pi/3}\, e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$= \mathrm{Re}\{(e^{j\pi} + e^{-j\pi/3})\, e^{j2\pi 50 t}\} =$$

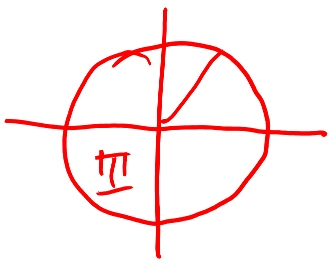
$$= \mathrm{Re}\left\{\left(-1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{j2\pi 50 t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{z} e^{j2\pi 50 t}\right\}$$

Άρα $f_0 = 50$

$$z = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$



- **Παράδειγμα:**

○ Λύστε την εξίσωση $\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1$

$$\Re\left\{\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}\cdot e^{j\theta}\right\} = -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\left\{e^{j(\theta+\pi/4)}\right\} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

- **Περιοδικότητα**
- Είδαμε νωρίτερα ότι ένα απλό ημίτονο είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Άραγε το άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό?
- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα:
- Έστω $x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$, $\quad f_1 \neq f_2$
- Έστω ότι είναι περιοδικό. Τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάποιο $T_0 > 0$
- Άρα

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t + T_0) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t + T_0) + \phi_2)$$

- Πρέπει

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 T_0 &= 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T_0 &= 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Οπότε

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{k}{l} = λόγος\ ακεραιων$$

- **Παράδειγμα:**

Ο Ελέγξτε αν τα παρακάτω αθροίσματα είναι περιοδικά

1) $$x(t) = 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2\pi 250t - \frac{\pi}{4}\right)$$

2) $$x(t) = \cos\left(2\pi 100t - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(400t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$400 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{200}{\pi}$

1) $f_1 = 100$, $f_2 = 250$ $\quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{250} = \frac{2}{5}$ ✓ Είναι περιοδικό

2) $f_1 = 100$, $f_2 = \frac{200}{\pi}$ $\quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{200}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$ × ΔΕΝ είναι περιοδικό.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ