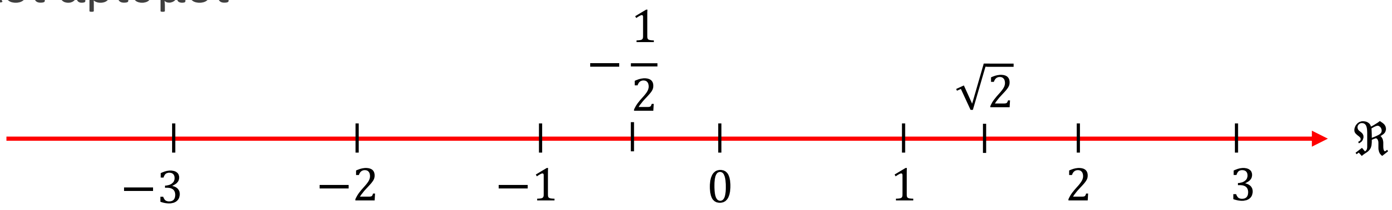
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η

- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

- Πραγματικοί αριθμοί



- Λύσεις εξισώσεων:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \in \Re$$

- Κάποιες εξισώσεις δεν έχουν λύση στο $\Re$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \ldots ?$$

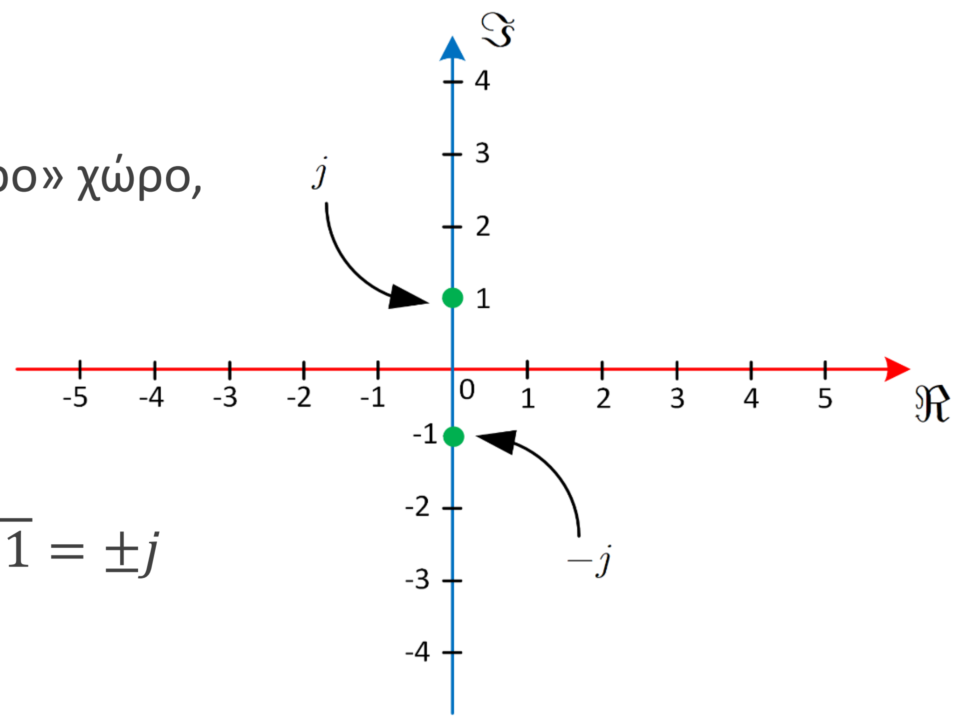
- Μπορούν να έχουν λύση σε ένα «ευρύτερο» χώρο, που περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα

- Ο χώρος αυτός λέγεται χώρος των ***μιγαδικών αριθμών* - $\mathbb{C}$**

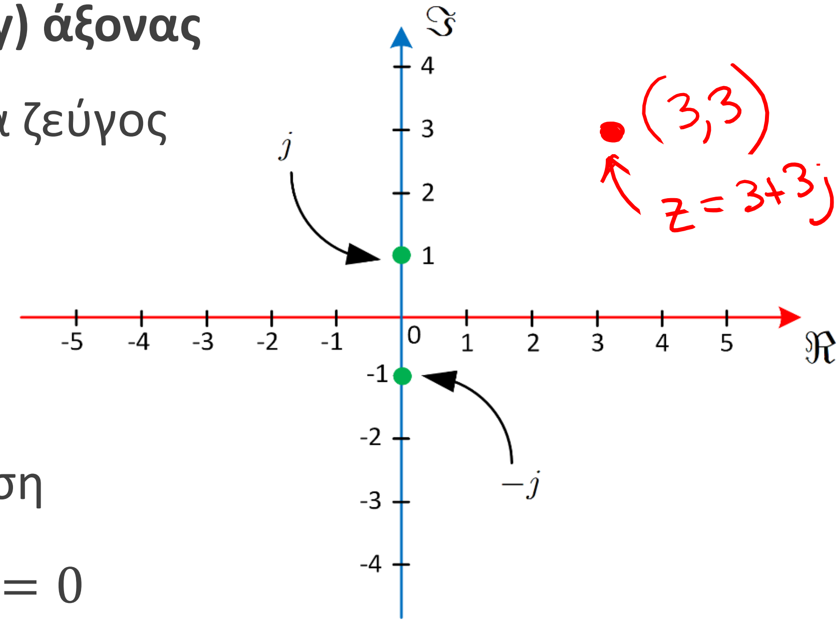
- Λύση:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$

με $\sqrt{-1} = j$ τη **φανταστική μονάδα**



- Οι άξονες που συντελούν στη δημιουργία του μιγαδικού επιπέδου ονομάζονται **πραγματικός (real) και φανταστικός (imaginary) άξονας**



- Κάθε σημείο αυτού του επιπέδου αποτελεί ένα ζεύγος αριθμών (x, y)
- Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό γράφεται ως $z = x + jy$ και ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number)**
- Ας δούμε μια εύκολη εφαρμογή: έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης

- Όλα τα παραπάνω στο χώρο των πραγματικών αριθμών!

- Αν λύσουμε την εξίσωση στο χώρο των μιγαδικών αριθμών τότε το πράγμα αλλάζει! Ας δούμε πως:

  - Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  - Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

  - Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές (**μιγαδικές**) ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Οπότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Παράδειγμα:

$ax^2+bx+c=0$

  ○ Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου x^2-2x+5

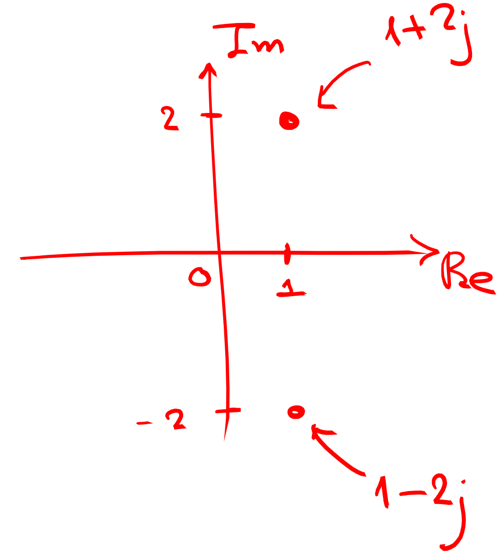
Είναι $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\cdot 1\cdot 5 = 4-20 = -16<0$

Είναι

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2\pm j\sqrt{|-16|}}{2}$$

$$= \frac{2\pm j\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm j4}{2}$$

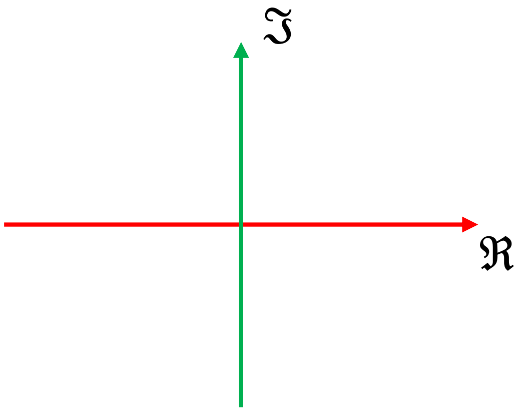
Άρα $x_1 = 1+2j \quad , \quad x_2 = 1-2j$



- Η μορφή $z = x + jy$ ενός μιγαδικού αριθμού ονομάζεται

καρτεσιανή

- Ορολογία:



  - x: τετμημένη : ***πραγματικό μέρος*** του μιγαδικού αριθμού

$$x = \Re\{z\} = \mathrm{Re}\{z\}$$

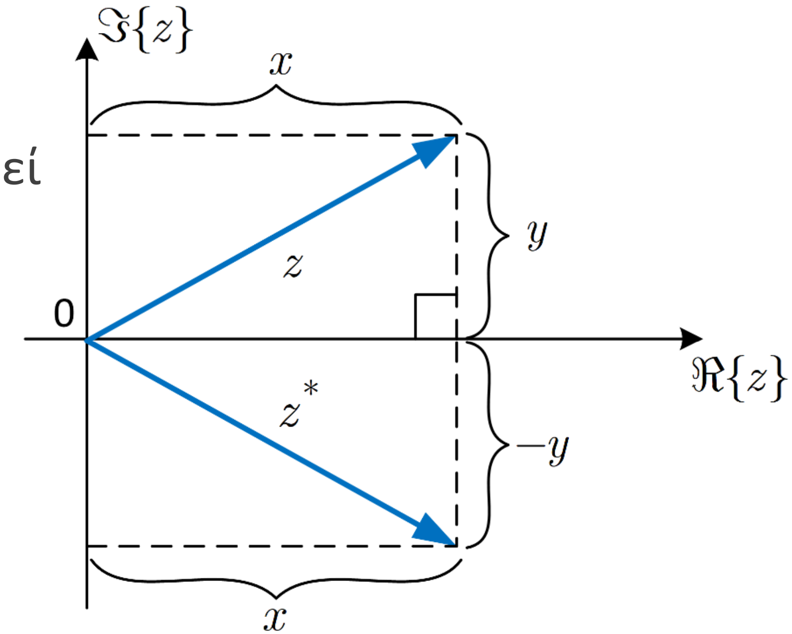
  - y: τεταγμένη : ***φανταστικό μέρος*** του μιγαδικού αριθμού

$$y = \Im\{z\} = \mathrm{Im}\{z\}$$

- Άρα

$$z = x + jy = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$$

- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **διάνυσμα** που ξεκινά από το $(0,0)$ και καταλήγει στις συντεταγμένες (x, y)



- **Συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$

$$z^* = x - jy = \Re\{z\} - j\Im\{z\}$$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = x + jy$	
	$z_2 = u + jv$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$	
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$	
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$	
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$	★
	$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$	★
	$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$	
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$	★
$z \in \Re$	$z = z^*$	★
$z \in \Im$	$z = -z^*$	★

- Ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό θεώρημα λέει ότι:
- Ένα πολυώνυμο βαθμού Ν έχει γενικά Ν ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές). Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι όποιες μιγαδικές ρίζες υπάρχουν θα «έρχονται» πάντα σε συζυγή ζεύγη!
  - Το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα
- Π.χ.

$$(z+j)(z-j) = z^2 + 1$$

$$\left(z+(2+j)\right)\left(z+(2-j)\right) = z^2 + 4z + 5$$

$$\left(z+\left(-1+j\sqrt{2}\right)\right)\left(z+\left(-1-j\sqrt{2}\right)\right) = z^2 + 2z + 3$$

$$(z+j)(z+1) = z^2 + {\color{red}(1+j)}z + {\color{red}j}$$

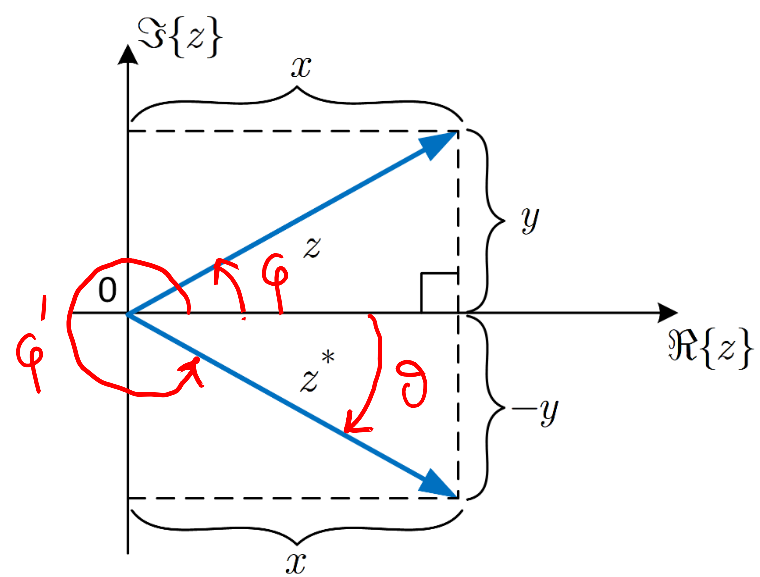
- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
  - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
  - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \alpha\pi\rho o\sigma\delta\iota\acute{o}\rho\iota\sigma\tau o, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$\in (-\pi, \pi]$



- Αντί της καρτεσιανής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή, την **πολική**
- Η πολική μορφή χρησιμοποιεί την έννοια του μέτρου και της φάσης που είδαμε
- Από απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$z = x + jy = \overset{=|z|}{\rho}\cos\varphi + j\overset{=|z|}{\rho}\sin\varphi = \overset{=|z|}{\rho}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|\overbrace{(\cos\varphi + j\sin\varphi)}^{e^{j\varphi}}$$

- Η παραπάνω πολική μορφή μπορεί να απλοποιηθεί μέσω **των σχέσεων του Euler**
- Σχέση του Euler:

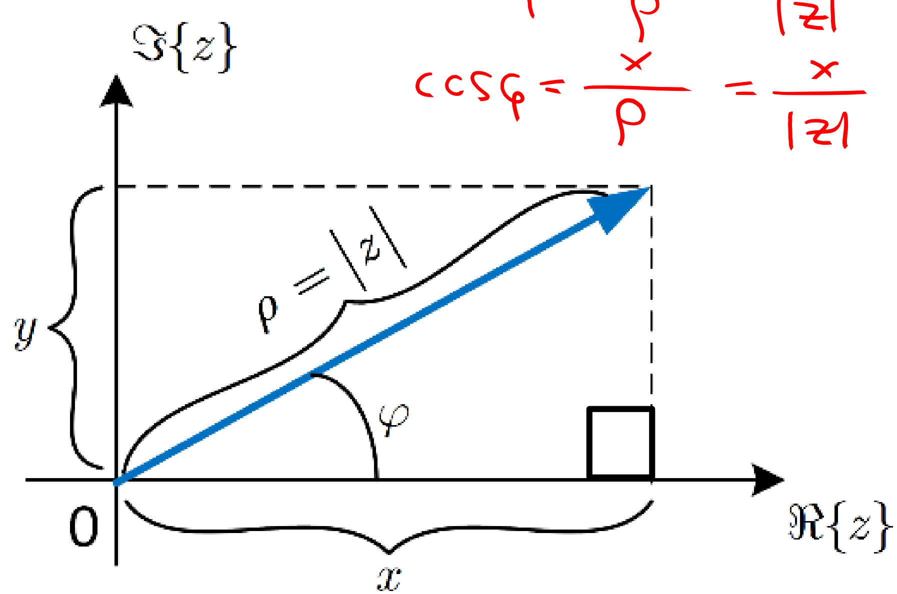
$$\boxed{\boldsymbol{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{|z|}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{|z|}$$

- Άμεσες συνέπειες της παραπάνω σχέσης:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\cos(\varphi)} &= \boldsymbol{\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}} \\ \boldsymbol{\sin(\varphi)} &= \boldsymbol{\frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}} \end{aligned}}$$



- Μεγάλης σπουδαιότητας σχέσεις!

- Η πολική μορφή γράφεται ως:

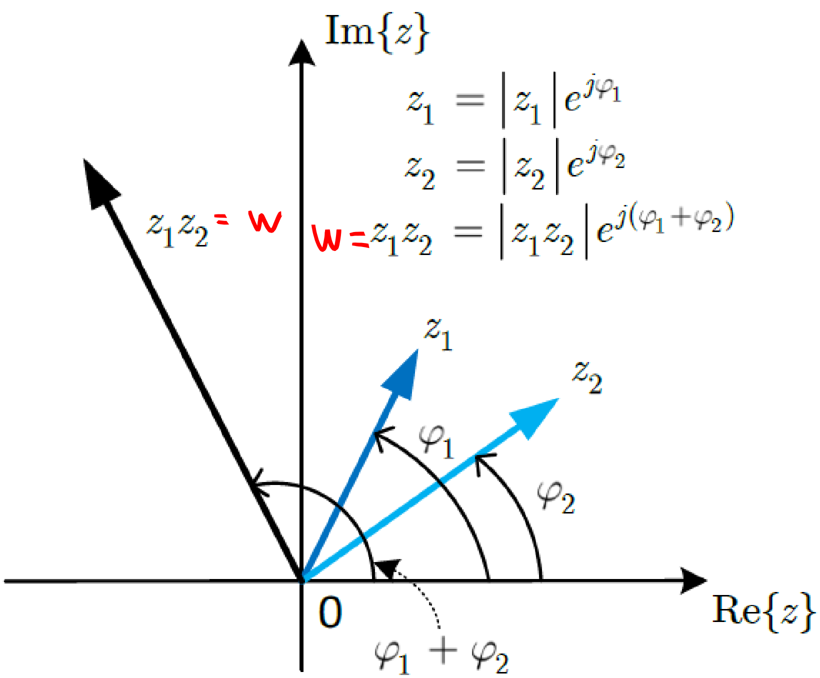
$$z = x + jy = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

πολική μορφή

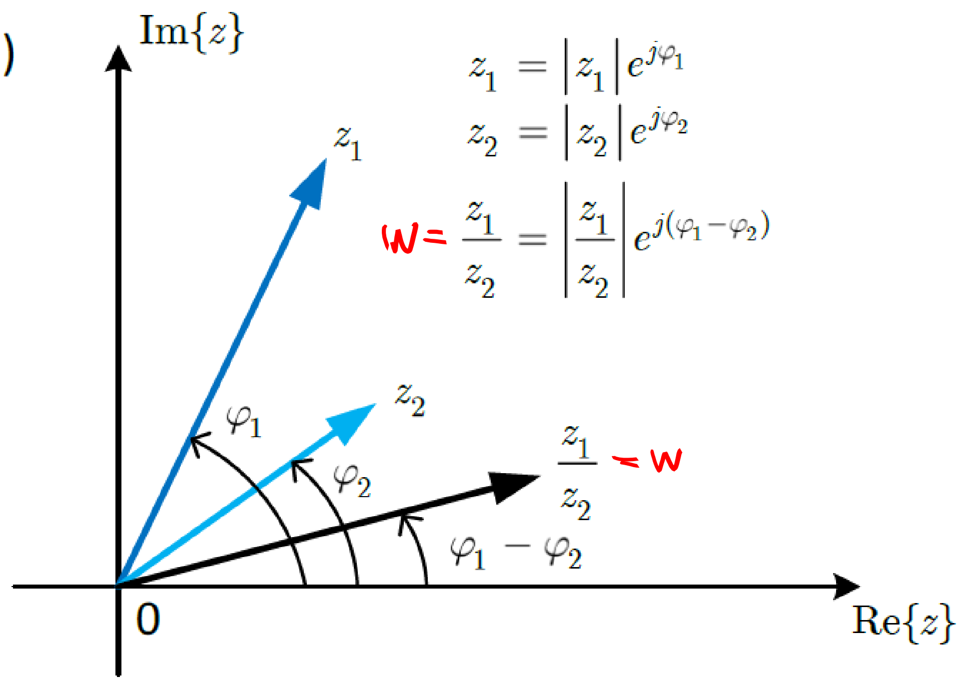
με $|z|, \varphi$ όπως τα περιγράψαμε νωρίτερα

- Η πολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με τις πράξεις του **γινομένου** και της **διαίρεσης** μεταξύ μιγαδικών αριθμών

- Αντίθετα, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ βολική για τις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**



(β)



Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$	
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} + b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} - b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$	★
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \lvert z_1\rvert^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$	★
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1+\phi_2)}$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$	★
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\lvert\rho_1\rvert = \lvert\rho_2\rvert$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	★

- Κάποιες πολικές μορφές εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη
- Ας τις δούμε

Συνήθεις πολικές μορφές

Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

- Όλα τα παραπάνω αποδεικνύονται θέτοντας κατάλληλη τιμή του φ στη σχέση του Euler.

- **Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**

- Για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ χρονοβόρα

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

- Με πολική μορφή:

$$x + jy = z^n = \left(|z|e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

- Η μορφή αυτή ονομάζεται **σχέση του De Moivre**

- Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$z^N - a = 0, \qquad a = |a|e^{j\theta} \in \mathbb{C}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

- Ας δούμε πως

$|z|^N = |a|$

$$z^N = a \iff |z|^N e^{j\boldsymbol{N\varphi}} = |a|e^{j\boldsymbol{(\theta+2\pi k)}} \iff z := \begin{cases} |z| = |a|^{\frac{1}{N}} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{N}, k = 0,1,\dots,N-1 \end{cases}$$

- Θέλουμε μόνο N ρίζες αφού το πολυώνυμο είναι N βαθμού

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 - 8 = 0$

$f(z) = 0 \rightarrow z^3 - 8$

Είναι

$$z = |z| e^{j\varphi}$$

$$8 = 8e^{j0} = 8e^{j(0+2\pi k)}, \quad \underline{k = 0, 1, 2.}$$

Άρα

$$(|z| e^{j\varphi})^3 = 8e^{j2\pi k}$$

$$|z|^3 e^{j3\varphi} = 8e^{j2\pi k} \Longrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 8 \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{8} = 2 \\ 3\varphi = 2\pi k \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi k}{3}, \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2.$

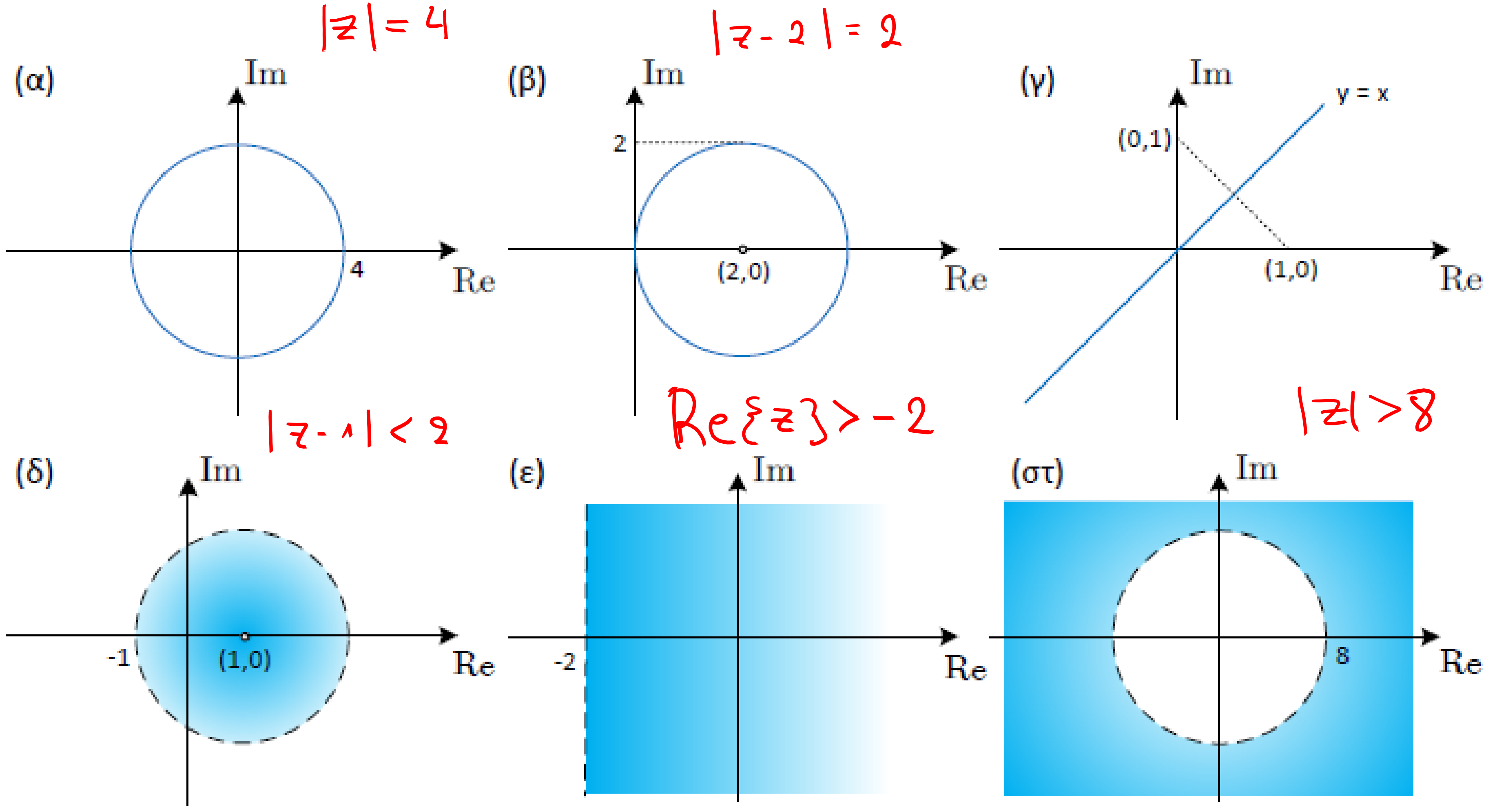
Οπότε

$$z_1 = 2e^{j0} = 2, \quad z_2 = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = 2e^{j\frac{4\pi}{3}} = 2e^{j\left(\frac{6\pi - 2\pi}{3}\right)}$$

$$= 2e^{j\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} = z_2^*$$

- **Γεωμετρικοί Τόποι**

- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν μια συγκεκριμένη (γεωμετρική, πολλές φορές) ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος**



- Παράδειγμα:

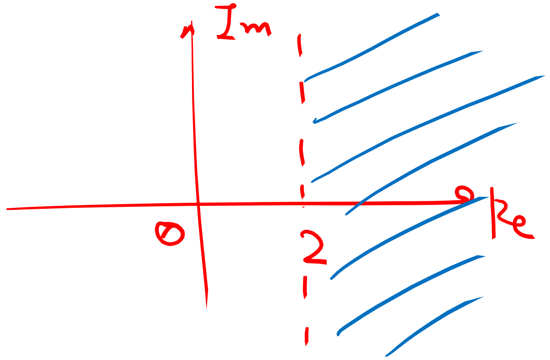
○ Βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

a) $\Re\{z\} > 2$

b) $|z-(4-j7)| = 2$

c) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$

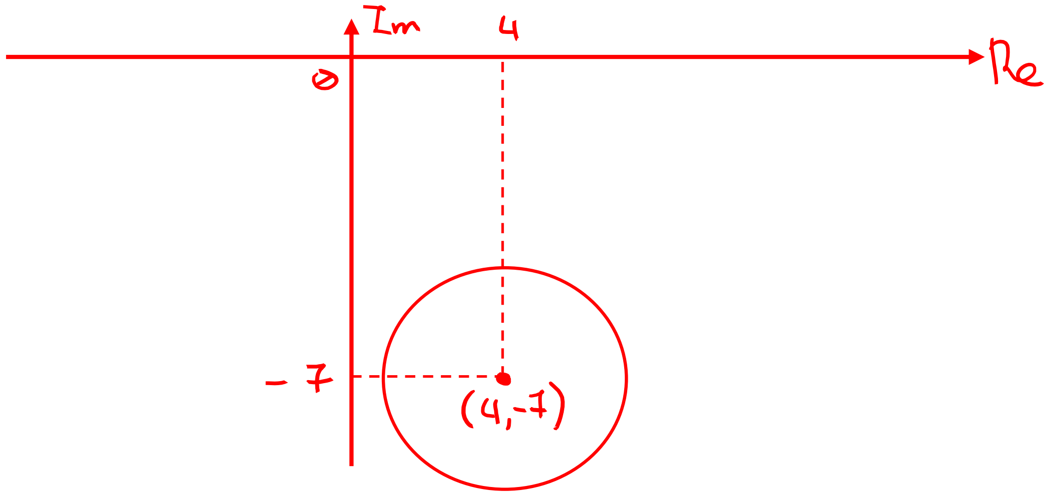
a)



b) $|z-(4-j7)| = 2 \iff |z-(4-j7)|^2 = 4$

$|x+jy-4+j7|^2 = 4 \iff |(x-4)+j(7+y)|^2 = 4$

$(x-4)^2+(y+7)^2 = 4$



• Παράδειγμα:

γ) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$ ⇝ η φάση του $z+1$ ισούται με $\frac{\pi}{3}$

Αν $z = x+jy$, τότε $z+1 = (x+1)+jy$, η φάση του θα είναι

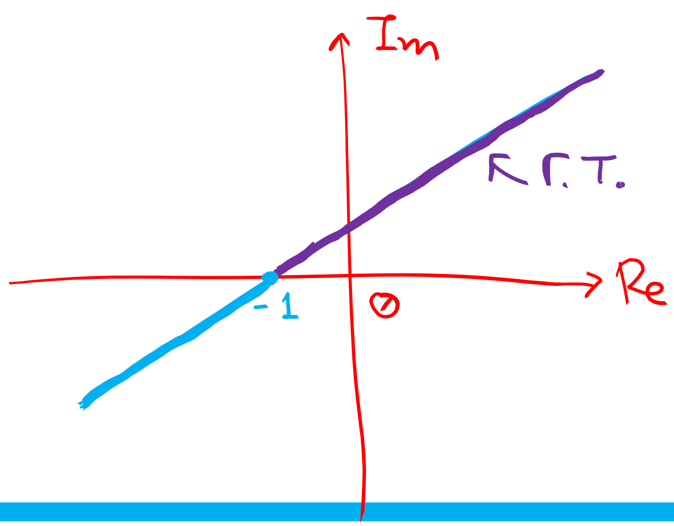
$\arg(z+1) = \tan^{-1}\frac{y}{x+1}$, για $x+1>0 \Rightarrow \boxed{x>-1}$

δηλ.

$$\tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan\left(\tan^{-1}\frac{y}{x+1}\right) = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{y}{x+1} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}(x+1) = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$



$x>-1$

- **Μιγαδικές Συναρτήσεις**
- Οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν ως πεδίο ορισμού ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου και πεδίο τιμών μιγαδικούς (εν γένει) αριθμούς
- Μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι (εν γένει) τεσσάρων διαστάσεων
- Μπορούμε όμως να σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της, ή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της
- Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, και της παραγωγισιμότητας έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και διαφορές με αυτές που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις
- Μια εκτενής παρουσίαση είναι εκτός σκοπού
  - Θα αντιμετωπίσουμε τις (όποιες) μιγαδικές συναρτήσεις όταν τις συναντήσουμε
- Θα μας απασχολήσουν περισσότερο **συναρτήσεις του χρόνου t** οι οποίες (μερικές φορές) θα παίρνουν **μιγαδικές τιμές**
- Ας δούμε μια τέτοια απλή και ΠΟΛΥ σημαντική συνάρτηση **του χρόνου t**
- Τη συνάρτηση

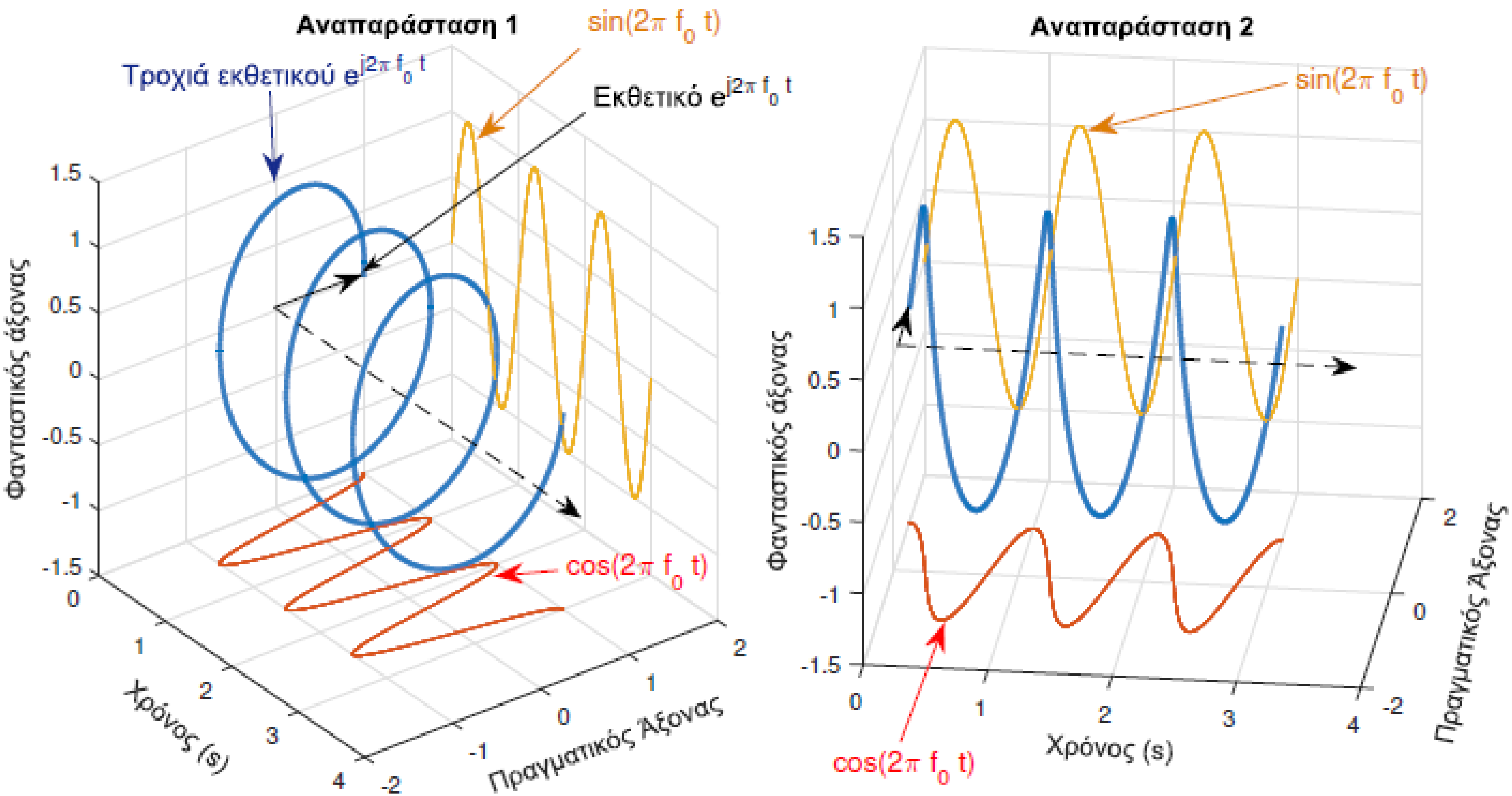
$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

- **Η συνάρτηση $\boldsymbol{x(t) = e^{j2\pi f_0 t}}$**
- Η συνάρτηση αυτή είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία παίρνει μιγαδικές τιμές!
- Άρα για τη σχεδίασή της χρειαζόμαστε έναν άξονα t
- Επίσης, θέλουμε ένα μιγαδικό «χώρο» για να βάζουμε τις τιμές της, π.χ. $x(0), x(1), \ldots$
- Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η συνάρτηση θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα σταθερού μοναδιαίου μήκους…
  - …αφού $\left|e^{j\theta(t)}\right| = |\cos\theta(t) + j\sin\theta(t)| = \sqrt{\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta\,(t)} = 1\ldots$

το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του χρόνου σε σπειροειδή τροχιά

- Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή με συχνότητα f_0 Hz
- Ας δούμε πως μοιάζει μια τέτοια συνάρτηση…

- **Η συνάρτηση** $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ $= \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$



- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**
- Θα παρατηρήσατε ότι η προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο (χρόνος, πραγματικός άξονας) αποτελεί ένα συνημίτονο!
- Αντίθετα, η προβολή στο επίπεδο (χρόνος, φανταστικός άξονας) «σχηματίζει» ένα ημίτονο!
- Αυτό είναι συνεπές με τη σχέση του Euler:

$$\Re\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

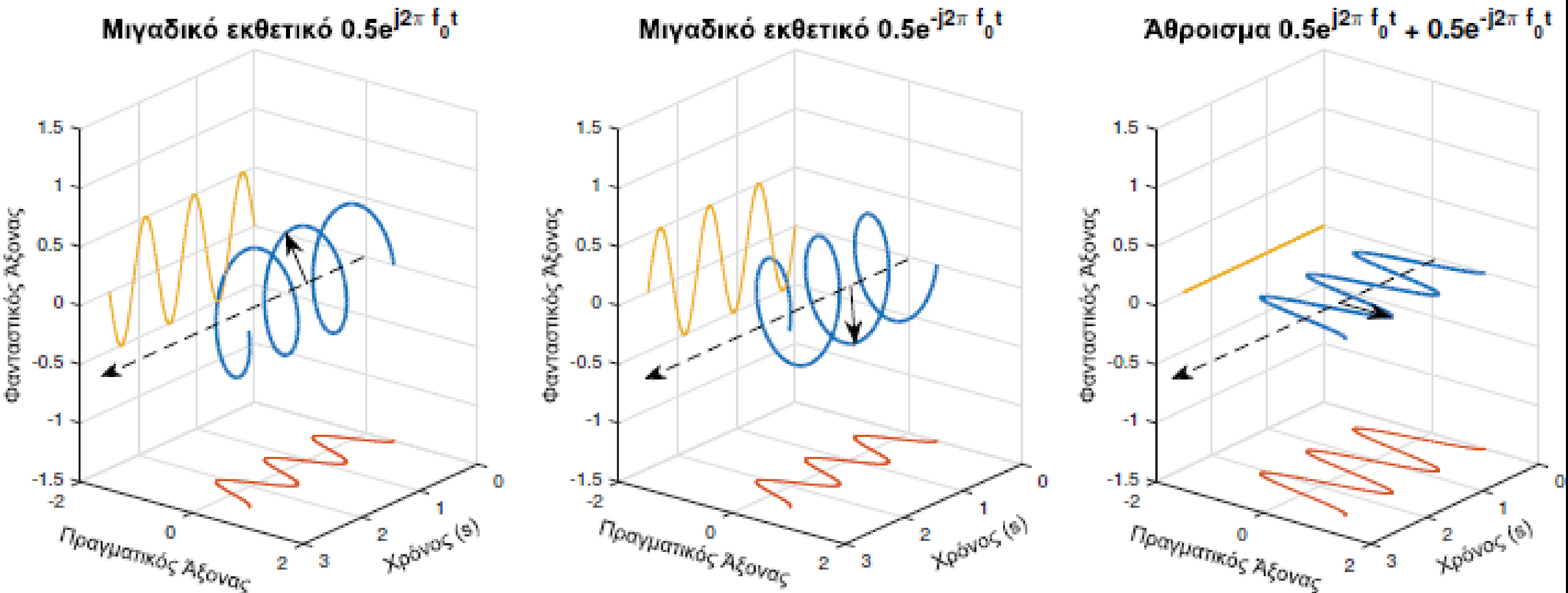
$$\Im\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπετε ότι το άθροισμα δυο συζυγών εκθετικών συναρτήσεων δίνει μια πραγματική συνάρτηση!
- Ας το δούμε αυτό οπτικά…

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**

$\cos(2\pi f_c t)$

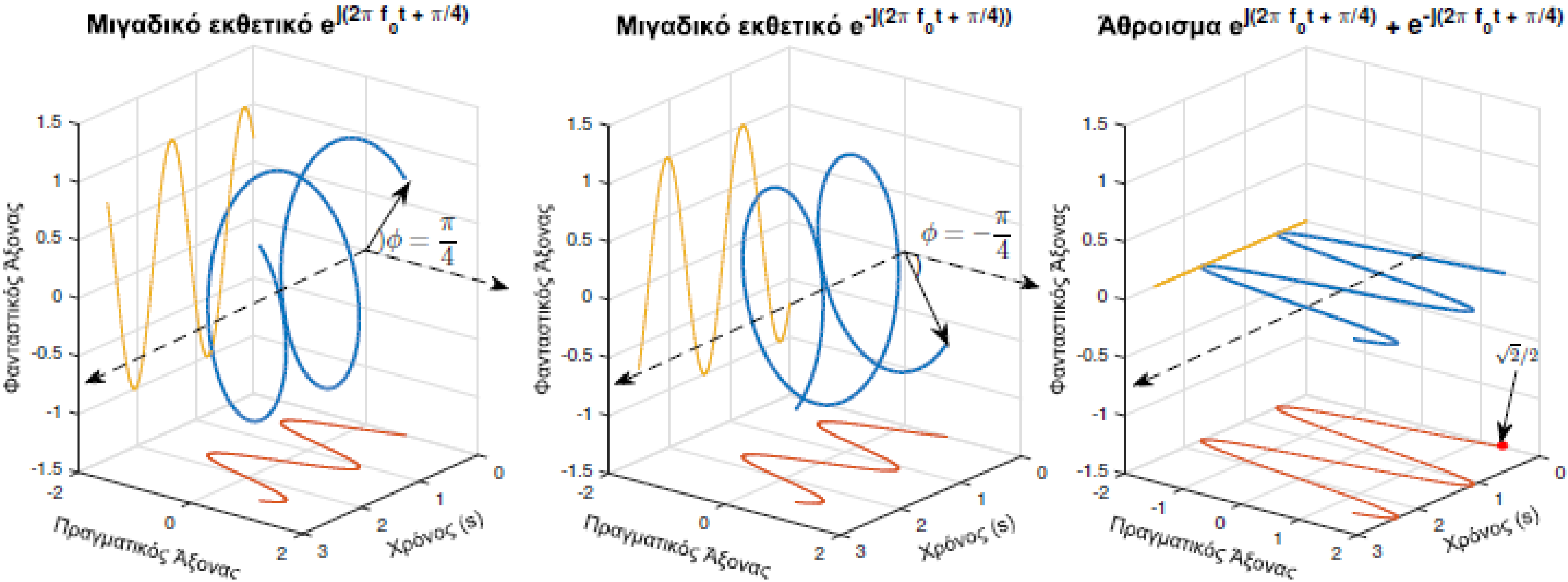
||



- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$**

$\cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right)$

||



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ