HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

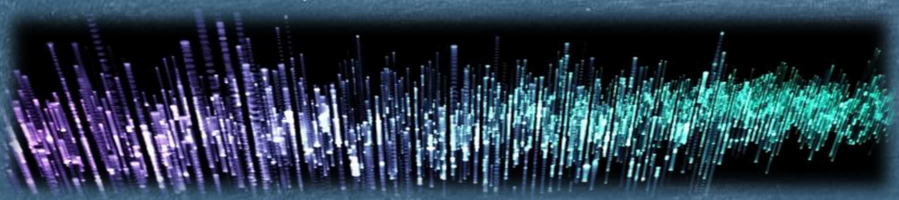
ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Τι περιέχει το HY215?

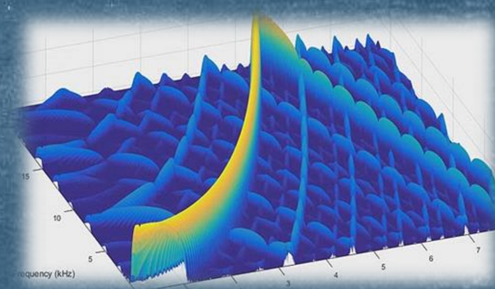
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ~~Τυχαία Σήματα~~
- Δειγματοληψία



- **Συσχετίσεις (review…)**

REMINDER

- **Περιοδικά Σήματα**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ενέργειας**

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων

- Θα λάβουμε ιδιαίτερη βοήθεια σχετικά με τα σήματα ισχύος που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  - Εξίσου σημαντικές είναι όμως και για τα υπόλοιπα σήματα

- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι **φασματικές πυκνότητες σχετίζονται** με τους ***μετασχηματισμούς Fourier*** των σημάτων που εμπλέκονται στις συσχετίσεις τους

- Ας ξεκινήσουμε με τα τελευταία (σήματα ενέργειας)

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Ας ξεκινήσουμε με τα τελευταία (σήματα ενέργειας)
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή*** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$x(\tau + t_0) \leftrightarrow X(f)e^{j2\pi f t_0}$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + t)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(X(f) e^{j2\pi f t} \right) dt$$

$$= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Άρα ο **μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας** ισούται με $|X(f)|^2$

$$\boxed{\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2}$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος
- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \qquad x(t) \in \Re$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \qquad \forall\, f$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \,\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x}$$

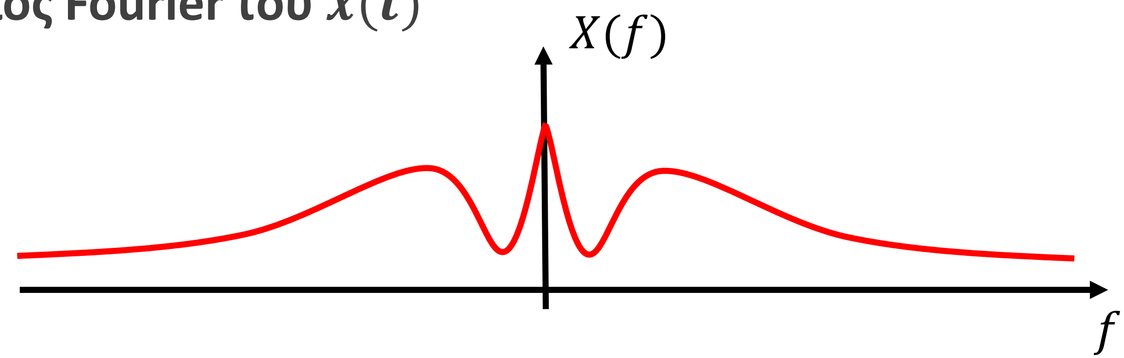
- **Βλέπουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

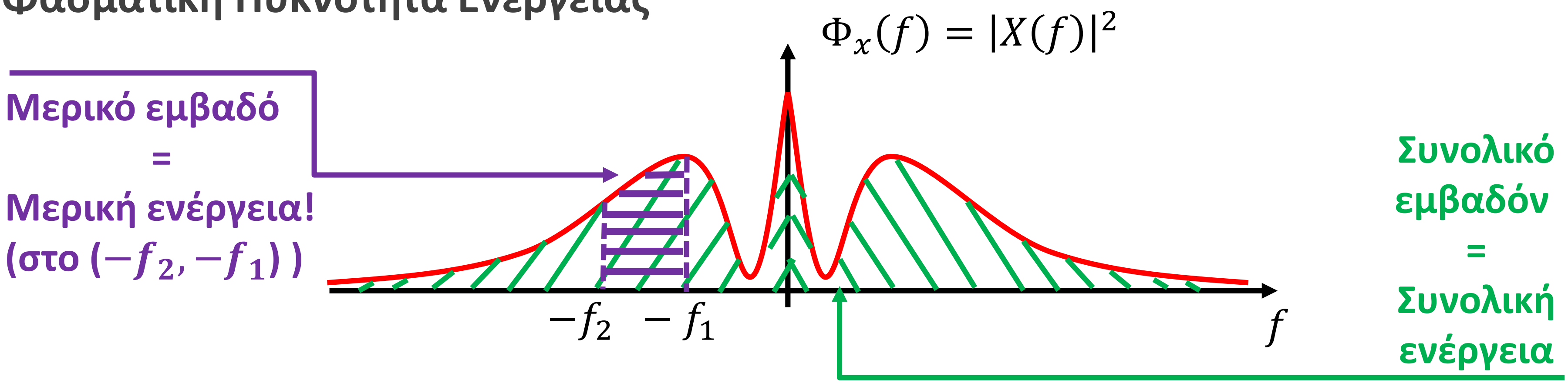
$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Συνάρτηση κατανομής ενέργειας ως προς f

- **Παράδειγμα:**
  Μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$



- **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας**



- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f) \end{aligned}}$$

- Παρατηρήστε ότι αφού

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau), \qquad x(t), y(t) \in \Re$$

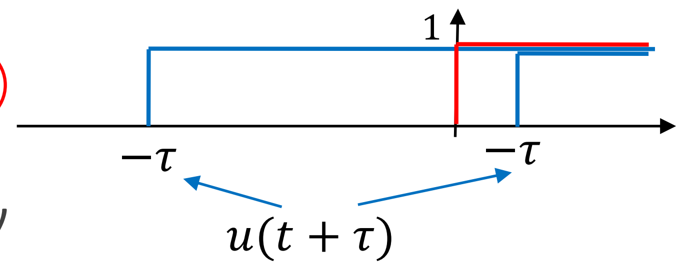
ισχύει ότι

$$\boxed{\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)}$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

1



○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-2at}u(t), \qquad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

(a) Είναι

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t) \cdot e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-2at} \cdot e^{-2a\tau} u(t)u(t+\tau)dt$$

$$= e^{-2a\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at}u(t)u(t+\tau)dt \quad (1)$$

Είναι $u(t) = 1, \boxed{t>0,}$ ενώ $u(t+\tau) = 1, \; t+\tau>0 \Rightarrow \boxed{t>-\tau}$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Παράδειγμα:

- $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt$

$$= e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} e^{-3at} \right) \Big]_{-\tau}^{+\infty} = e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-3at} - e^{3a\tau} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left(0 - e^{3a\tau} \right) = \frac{1}{3a} e^{a\tau}, \ \tau < 0 = \frac{1}{3a} e^{a\tau} u(-\tau).$$

- $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt$

$$= e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} e^{-3at} \right) \Big]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-3at} - 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau}, \ \tau > 0 = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau} u(\tau).$$

Συνολικά, $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a} \left(e^{-2a\tau} u(\tau) + e^{a\tau} u(-\tau) \right).$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

$$X^*(f) = \frac{1}{a-j2\pi f}$$

(β) $\varphi_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{F} \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$

Είναι $x(t) = e^{-at}u(t), \ a>0 \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$

$y(t) = e^{-2at}u(t), \ a>0 \xleftrightarrow{F} Y(f) = \frac{1}{2a+j2\pi f}$

Άρα $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \frac{1}{(a-j2\pi f)(2a+j2\pi f)} =$

$= \frac{A}{a-j2\pi f} + \frac{B}{2a+j2\pi f}$, μπορούμε να βρούμε ότι $A = \frac{1}{3a} = B$

Οπότε $\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{2a+j2\pi f}$, κι από πίνακες

έχουμε $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau)\right)$.

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$\boxed{\sum X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow \sum X_k \delta(f - k f_0)}$$

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Για τα **περιοδικά** σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του **μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων**
  - Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση
- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x(t+\tau)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι (από πίνακες)

$$\boxed{\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)}$$

- **Ας επιβεβαιώσουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ισχύς του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Parseval!

$$\phi_x(0) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x(t+0)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)dt = P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- Άραγε, αν ολοκληρώσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, θα πάρουμε τη συνολική ισχύ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)\, df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)df$$

- Επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)df = 1$$

τότε

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x}$$

- **Επιβεβαιώθηκε!**

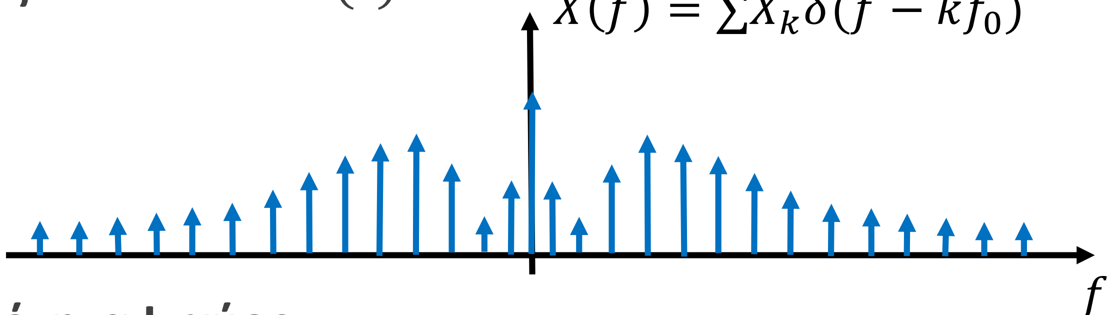
- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

Συνάρτηση κατανομής ισχύος ως προς f

- **Παράδειγμα:**
  Μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$

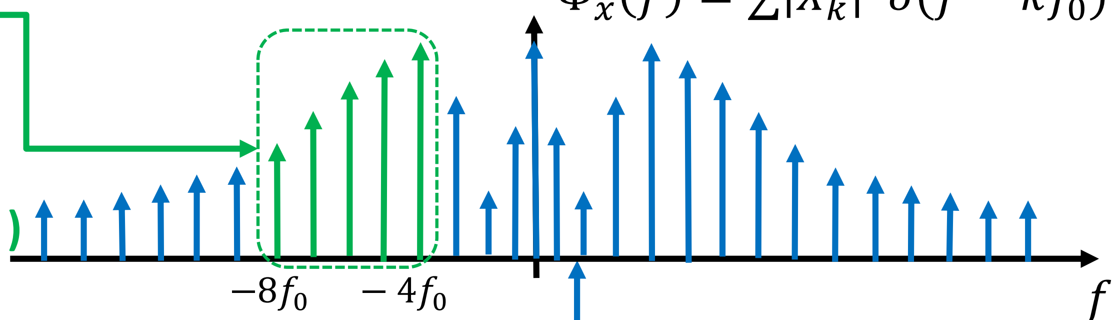
$X(f) = \sum X_k \delta(f - kf_0)$



- **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος**

$\Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$

Μερικό «εμβαδό»
=
Μερική ισχύς!
(στο $[-8f_0, -4f_0]$)



Συνολικό «εμβαδό»
=
Συνολική ισχύς

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Θυμηθείτε ότι ένας τρόπος να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier είναι μέσω του μετασχ. Fourier **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος!

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

- Η αυτοσυσχέτιση περιοδικών σημάτων είναι κι αυτή ένα περιοδικό σήμα!
- …και έχει συντελεστές Fourier $|X_k|^2$!
- Μπορούμε άραγε αυτούς να τους βρούμε με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω?
- **ΝΑΙ!** ☺
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $|X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπτώντας τη φασματική πυκνότητα *ενέργειας* **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος, δηλ.

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0^2} |X(f, T_0)|^2 \Big|_{f=kf_0}$$

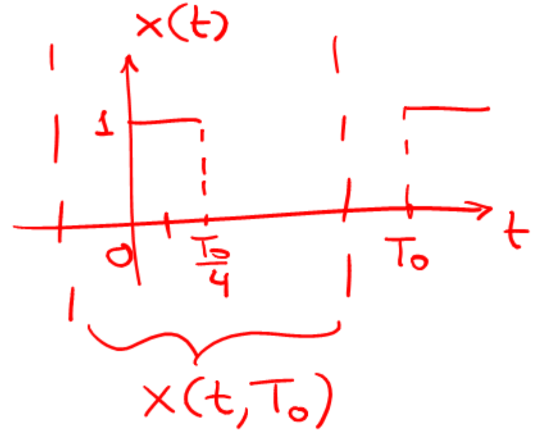
- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \leftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT)e^{-j2\pi f t_0}$$

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t,T_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$$



Θεωρούμε τη μια περίοδο του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ. την $x(t,T_0)$. Είναι:

$$x(t,T_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{8}}{\frac{T_0}{4}}\right) \xleftrightarrow{F} X(f,T_0) = \frac{T_0}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)e^{-j\pi f\frac{T_0}{4}}$$

Άρα $$\Phi_x(f,T_0) = |X(f,T_0)|^2 = \left(\frac{T_0}{4}\right)^2\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2\cdot\cancel{\left|e^{-j\pi f\frac{T_0}{4}}\right|^2}^{\,1}$$

$$= \frac{T_0^2}{16}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 = \frac{T_0^2}{16}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right).$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

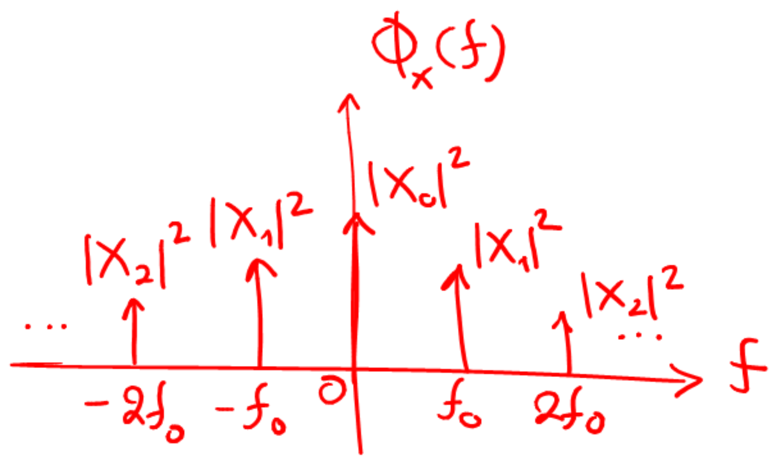
- Παράδειγμα:

Άρα $$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f,T_0)\Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{\cancel{T_0^2}}\frac{\cancel{T_0^2}}{16}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right)\Big|_{f=kf_0}$$

$$= \frac{1}{16}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}kf_0\right) \overset{f_0T_0=1}{=\!=} \frac{1}{16}\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = |X_k|^2$$

Οπότε

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2\,\delta(f-kf_0) = \frac{1}{16}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$$



← Την κατανομή της ισχύος του περιοδικού σήματος στη συχνότητα

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι η **διαφασματική πυκνότητα ισχύος** αποτελεί το μετασχ. Fourier της **ετεροσυσχέτισης** δυο περιοδικών σημάτων

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

- Όμως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} = \boldsymbol{\frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0)}$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} = \boldsymbol{\frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0)}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Άρα

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T_0^2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\boldsymbol{X^*(kf_0, T_0) Y(kf_0, T_0)}] \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T_0^2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\boldsymbol{X(kf_0, T_0) Y^*(kf_0, T_0)}] \delta(f - kf_0)$$

- Καταφέραμε και σχετίσαμε και **τις (δια)φασματικές πυκνότητες ισχύος περιοδικών σημάτων** με τους **μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου** του/των περιοδικού/ών σήματος/ων

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι **φασματικές πυκνότητες** μπορούν να **υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων**
- Για **απεριοδικά σήματα ισχύος**, κάτι τέτοιο **δεν** ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για τέτοια σήματα ισχύος ισχύει η σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2$$

με

$$X(f,T) = F\left\{x(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

δηλ. το **μετασχ. Fourier ενός <u>τμήματος</u> του σήματος ισχύος** $x(t)$, διάρκειας T

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να **μην** υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η **μελέτη των σημάτων ισχύος** στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται **μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους**
  - …και **όχι** μέσω του μετασχ. Fourier των ιδίων των σημάτων ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

$$A, \forall t \leftrightarrow A\delta(f)$$

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος $x(t) = u(t)$

Βρήκαμε ότι $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \ \forall \ \tau$.

Άρα

$$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} =$$

$$= F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f).$$

Άρα $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2} \xleftrightarrow{F} \Phi_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f)$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Σύνοψη:
- Σήματα ενέργειας:

$$
\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\
\phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\
\phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)
\end{aligned}
$$

☺

- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$
\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \\
\phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \\
\phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k \delta(f - kf_0)
\end{aligned}
$$

☺

- Σήματα ισχύος (απεριοδικά):

$$
\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) \\
\phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) \\
\phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f)
\end{aligned}
$$

☹

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την απόκριση συχνότητας $H(f)$, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$
- Θα συμβολίζουμε με $\phi_x(\tau), \phi_y(\tau)$ τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με $\Phi_x(f), \Phi_y(f)$ τις αντίστοιχες πυκνότητες

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_y(\tau) &= y(\tau) * y(-\tau) \\ &= \big(x(\tau) * h(\tau)\big) * \big(x(-\tau) * h(-\tau)\big) \\ &= \big(x(\tau) * x(-\tau)\big) * \big(h(\tau) * h(-\tau)\big) \\ &= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)\end{aligned}$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\boxed{\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)}$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για **σήματα ενέργειας**:

$$\boxed{\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2}$$

όπως αναμενόταν

- Για **περιοδικά σήματα**:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\,\delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2\,\delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\boxed{\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2|H(kf_0)|^2\,\delta(f - kf_0)}$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

☹

- Για **σήματα ισχύος**:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

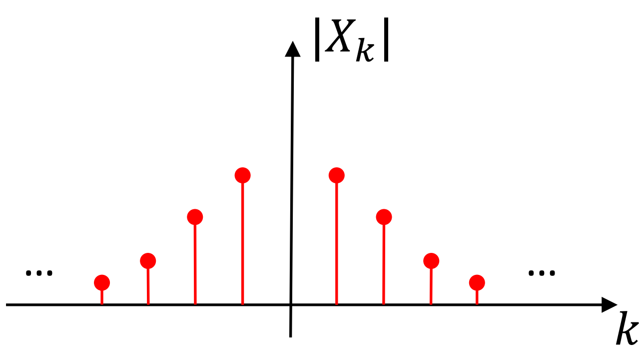
μια και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

Για το σπίτι..

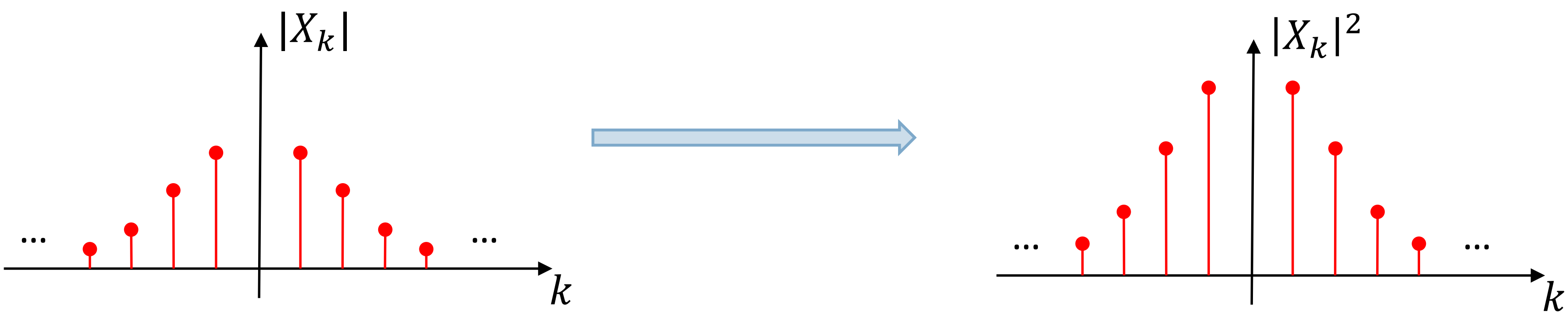
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα**:
  - Αναπτύσσονται σε σειρά Fourier
  - Περιγράφονται από τους συντελεστές Fourier, $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$
  - Οι τελευταίοι μας πληροφορούν για το πλάτος $|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi k f_0 t}$ που «περιέχεται» στο περιοδικό σήμα
  - Αν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορούν *επιπλέον* για το πλάτος $2|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του συνημιτόνου συχνότητας kf_0 που «περιέχεται» στο πραγματικό περιοδικό σήμα
  - Το περιοδικό σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης των συντελεστών Fourier (είτε ως προς k είτε ως προς f)
  - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** των συντελεστών Fourier όπως το παρακάτω



<u>Ερώτημα</u>: το διπλανό φάσμα είναι **φάσμα πλατών**. Αν θέλω να έχω ένα **φάσμα ισχύος**, δηλ. να δω πόση ισχύ φέρει κάθε συχνότητα kf_0, τι πρέπει να κάνω?

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα**:
  - Αρκεί να πάρουμε το μέτρο των συντελεστών Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!

Για το σπίτι..



  - Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται **φάσμα ισχύος ή φασματική πυκνότητα ισχύος** του περιοδικού σήματος!
    - Μας πληροφορεί για το **πόση από τη συνολική ισχύ του περιοδικού σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα $\boldsymbol{kf_0}$**
    - Η ισχύς αυτή είναι απλά $|X_k|^2$, για τη συχνότητα kf_0
    - … ή, αν πρόκειται για πραγματικό σήμα, η ισχύς του **συνημιτόνου** συχνότητας kf_0 είναι $2|X_k|^2$
  - Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ισχύος** του περιοδικού σήματος!
  - Το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$
    - … και εναλλακτικά το σχεδιάζουμε σε συνεχή άξονα f, αντί του διακριτού άξονα k
      - … αλλάζουμε στο σχήμα το k σε f, και χρησιμοποιούμε συναρτήσεις Δέλτα αντί για «στρογγυλά» κεφαλάκια

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα**:
  - Ποιο **σήμα στο χρόνο** αντιστοιχεί σε αυτήν την **φασματική πυκνότητα ισχύος**?
    - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ισχύος $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
  - Η **περιοδική αυτοσυσχέτιση** $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
  - Η περιοδική αυτοσυσχέτιση είναι περιοδική με την **ίδια περίοδο** με το περιοδικό σήμα, και άρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier! Πως?
  - Προφανώς ως

$$\phi_x(\tau) = \sum |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

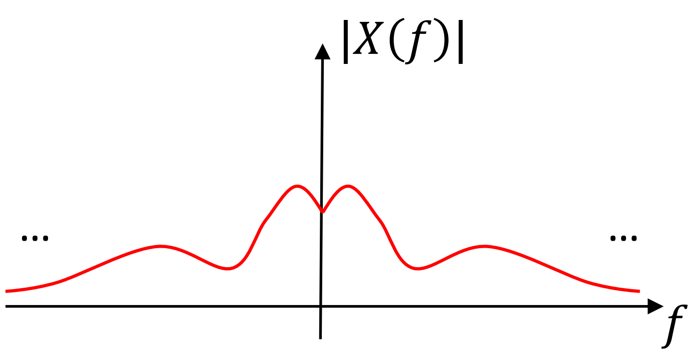
και όπως είπαμε πριν,

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

Για το σπίτι..

- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας**:
  - **ΔΕΝ** αναπτύσσονται σε σειρά Fourier αλλά αναλύονται με το Μετασχηματισμό Fourier
  - Περιγράφονται από τον ίδιο το μετασχηματισμό, $X(f)$
  - Ο τελευταίος μας πληροφορεί για το πλάτος $df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi(df)t}$ που «περιέχεται» στο σήμα
  - Αν το σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορεί *επιπλέον* για το πλάτος $2df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του συνημιτόνου συχνότητας df που «περιέχεται» στο πραγματικό σήμα
  - Το σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης του μετασχηματισμού Fourier (ως προς f)
  - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** του μετασχηματισμού Fourier όπως το παρακάτω

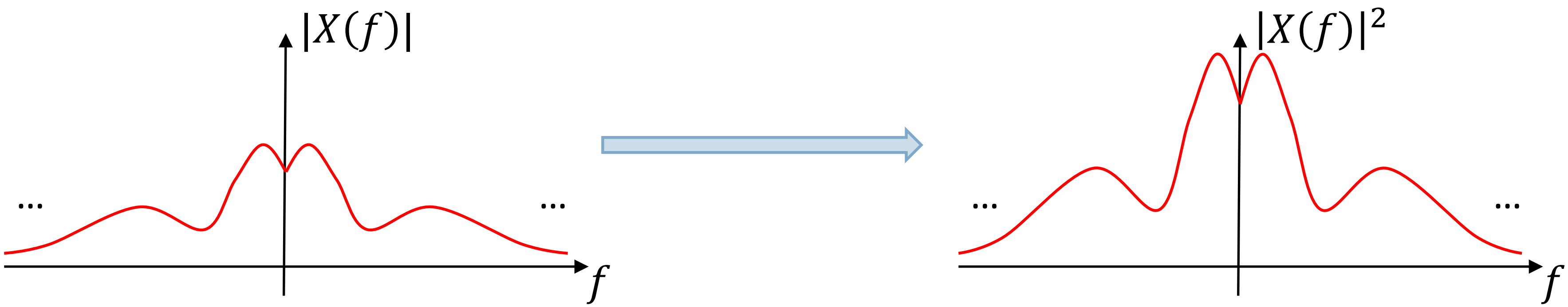


<u>Ερώτημα</u>: το διπλανό φάσμα είναι **φάσμα πλάτους**. Αν θέλω να έχω ένα **φάσμα ενέργειας**, δηλ. να δω πόση ενέργεια φέρει κάθε συχνότητα df, τι πρέπει να κάνω?

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

Για το σπίτι..

- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας**:
  - Αρκεί να πάρουμε το μέτρο του μετασχ. Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



  - Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται **φάσμα ενέργειας ή φασματική πυκνότητα ενέργειας** του σήματος!
    - Μας πληροφορεί για το πόση από τη συνολική ενέργεια του σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα kf_0
    - Η ενέργεια αυτή είναι απλά $df|X(df)|^2$, για τη συχνότητα df
  - Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ενέργειας** του σήματος!
  - Μαθηματικά, το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$ (προφανές)

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας**:
  - Ποιο **σήμα στο χρόνο** αντιστοιχεί σε αυτήν την **φασματική πυκνότητα ενέργειας**?
    - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ενέργειας $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
  - Η **αυτοσυσχέτιση** $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
- **Σήματα ισχύος** (απεριοδικά):
  - Τα απεριοδικά σήματα ισχύος **δεν** μπορούν **πάντα** να περιγραφούν στο χώρο των φασματικών πυκνοτήτων **με όρους του μετασχ. Fourier τους**
    - …ακόμα κι αν συμπεριλάβουμε συναρτήσεις Δέλτα ή άλλες «εξωτικές» συναρτήσεις/κατανομές
  - Οπότε η **μελέτη τους γίνεται με το μετασχ. Fourier απ'ευθείας της αντίστοιχης συνάρτησης συσχέτισής τους**
  - Παρόμοια γενικεύονται οι έννοιες για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

Για το σπίτι..

- Διαισθητική σύνοψη
- **ΓΧΑ συστήματα**:
  - Όταν μια φασματική πυκνότητα εισόδου περνά μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα, η φασματική πυκνότητα αυτή **επηρεάζεται** από το σύστημα
    - Είναι σαν να λέμε ότι **η κατανομή ενέργειας/ισχύος ενός σήματος εισόδου επηρεάζεται από το σύστημα όταν περνά μέσα από αυτό**
      - …λογικό, αφού ένα σύστημα μεταβάλλει συχνοτικά την είσοδό του (κόβοντας συχνότητες, ενισχύοντας ή καταστέλλοντας άλλες, κλπ) και έτσι αλλάζει την κατανομή ενέργειας/ισχύος της, δίνοντας έτσι ένα διαφορετικό σήμα εξόδου (και μια αντίστοιχα διαφορετική - σε σχέση με την είσοδο - φασματική πυκνότητα)
      - **Μην ξεχνάτε**: η φασματική πυκνότητα είναι απλά μια **συχνοτική περιγραφή** ενός σήματος **με όρους ενέργειας ή ισχύος ανά συχνότητα**! (αντί για πλάτος + φάση ανά συχνότητα)
  - Αν υποθέσουμε ότι τα ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται από κρουστικές αποκρίσεις που είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες (και άρα έχουν μετασχ. Fourier = απόκριση σε συχνότητα), τότε η φασματική πυκνότητα του συστήματος θα είναι

$$\Phi_h(f) = |H(f)|^2$$

  - Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

Για το σπίτι..

- Διαισθητική σύνοψη
- **ΓΧΑ συστήματα**:
  - Η σχέση

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

δεν πρέπει να σας εκπλήσσει

  - Γιατί γνωρίζετε ότι

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

για σήματα ενέργειας, ενώ για περιοδικά σήματα

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

  - Αν υψώσετε τα μέτρα των σχέσεων αυτών στο τετράγωνο, θα πάρετε τα αποτελέσματα των φασματικών πυκνοτήτων που είδαμε σε αυτή τη διάλεξη!! ☺

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ