ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

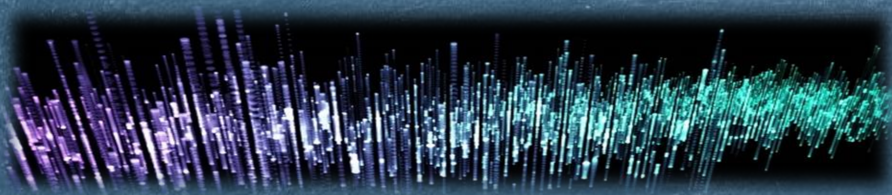
ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

Τι περιέχει το HY215?

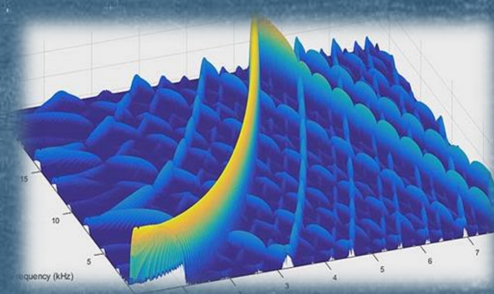
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



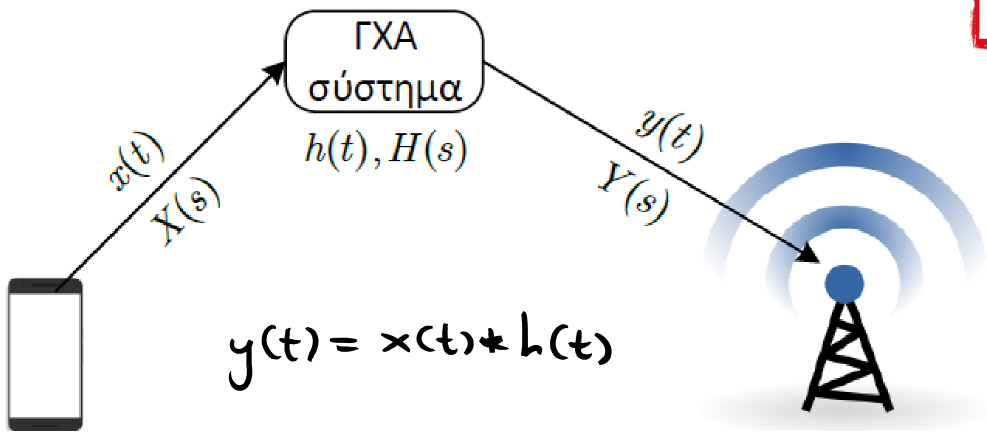
2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ~~Τυχαία Σήματα~~
- Δειγματοληψία



- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**

REMINDER



- Με ιδανικό κανάλι επικοινωνίας, θα είχαμε

$$Y(s) = X(s)$$

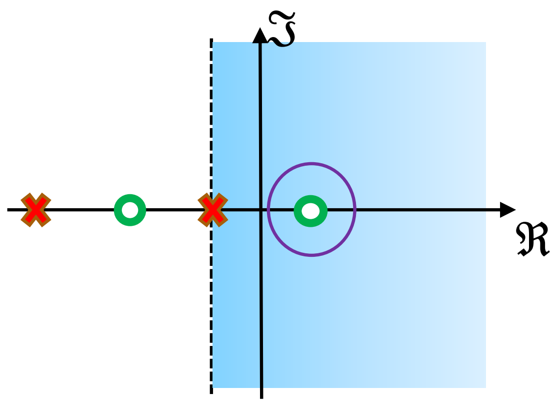
- Στην πράξη

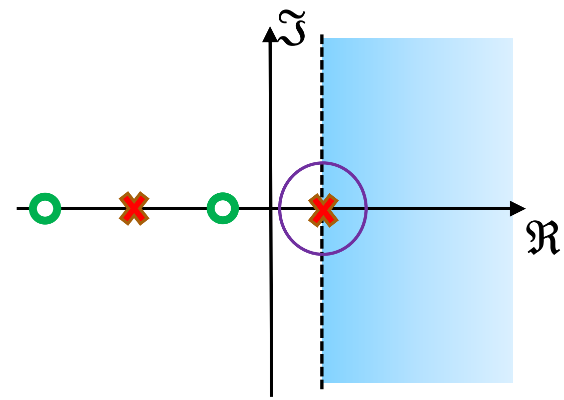
$$Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow Y'(s) = \overbrace{\boxed{\frac{1}{\cancel{H(s)}}}}^{H_{inv}(s)} \cancel{H(s)}X(s) = X(s)$$

έτσι ώστε $Y(f) = X(f)$

- Πολλές φορές το $H_{inv}(s)$ δεν είναι πραγματοποιήσιμο, γιατί δεν είναι ευσταθές η/και αιτιατό
- Πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες καταστάσεις?
- Μπορούμε έστω να έχουμε $Y(s) \approx X(s) \Rightarrow Y(f) \approx X(f)$?

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**
- Από το τελευταίο παράδειγμα της προηγούμενης διάλεξης, είδαμε ότι μπορεί να **<u>μην</u>** μπορούμε να έχουμε ευσταθές **και** αιτιατό *αντίστροφο* σύστημα (ταυτόχρονα), ακόμα κι αν το σύστημά μας είναι ευσταθές **και** αιτιατό!
- **<u>Ερώτηση</u>**: *τι πρέπει να ισχύει για ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έτσι ώστε αν αυτό είναι ευσταθές και αιτιατό, να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα?*
- Ας το δούμε με ένα παράδειγμα





- **Ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα μόνον όταν όλοι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!**
- Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ελάχιστης φάσης (minimum phase)**
  - ...για λόγους που δεν είναι εμφανείς ☺

- **Συστήματα All-pass**

- Μια επίσης σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα all-pass
  - Ολοπερατά (in Greek ☺), δηλ. αφήνουν να περάσουν **όλες** οι συχνότητες στην έξοδο, χωρίς να μεταβάλλει το **πλάτος** τους

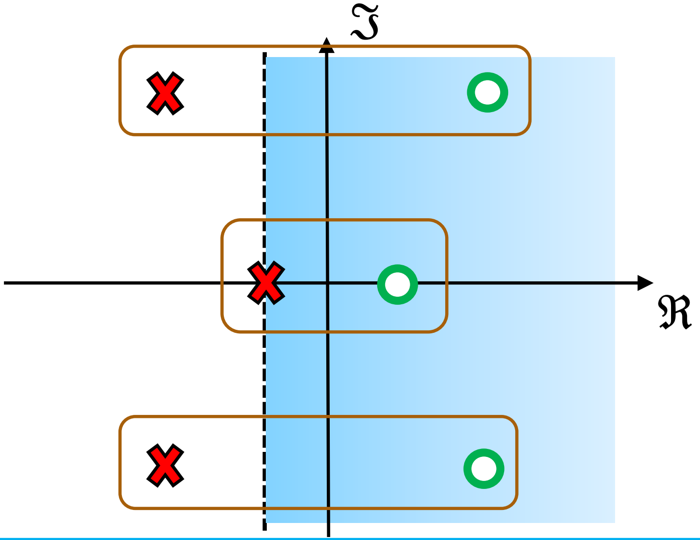
- Η απόκριση πλάτους τους δίνεται ως

$$\left|H_{ap}(f)\right| = 1, \qquad \forall \; f$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^{M} \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \Rightarrow H_{ap}(f) = \prod_{k=1}^{M} \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k}$$

- Οι πόλοι και τα μηδενικά ενός all-pass συστήματος βρίσκονται σε ζεύγη $(a_k, -a_k^*)$, δηλ. εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα
  - Με ίδιο φανταστικό αλλά αντίθετο πραγματικό μέρος



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση x All-pass**

- Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κάθε ΓΧΑ σύστημα σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass:

$$H(s) = H_{ap}(s)H_{min}(s)$$

- Γιατί είναι χρήσιμη μια τέτοια παραγοντοποίηση?

- Απόκριση πλάτους:

$$|H(s)|\Big|_{s=j2\pi f} = \big|H_{ap}(s)\big||H_{min}(s)|\Big|_{s=j2\pi f}$$

δηλ:

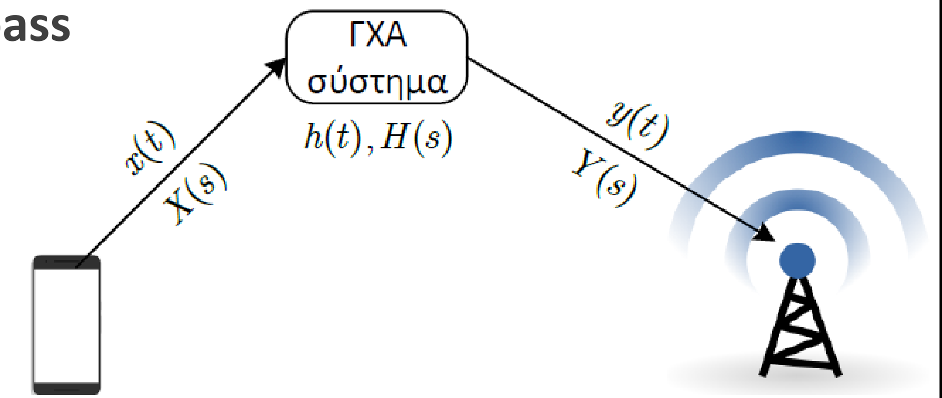
$$|H(f)| = \big|H_{ap}(f)\big||H_{min}(f)| = 1 \cdot |H_{min}(f)| = |H_{min}(f)|$$

- Το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει **την ίδια απόκριση πλάτους** με το ΓΧΑ σύστημα!
  - Προφανώς όμως δε θα έχει την ίδια απόκριση φάσης

- Απόκριση φάσης:

$$\angle H(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle H_{min}(f)$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**



- Επιστρέφοντας στο πρόβλημα...
- Αν το σύστημα $\frac{1}{H(s)}$ δεν είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε δεν μπορούμε να το υλοποιήσουμε
- Μπορούμε όμως να υλοποιήσουμε το $\frac{1}{H_{min}(s)}$!!
- Εγγυημένα, το σύστημα αυτό θα είναι ευσταθές και αιτιατό! ☺

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{H_{min}(s)}} \longrightarrow y'(t)$$

- Τι συμβαίνει στην έξοδο της παραπάνω διάταξης?

$$Y(s)' = Y(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = H(s)X(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = \left[H(s)\frac{1}{H_{min}(s)}\right]X(s)$$

- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|}\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Στο χώρο του Fourier:

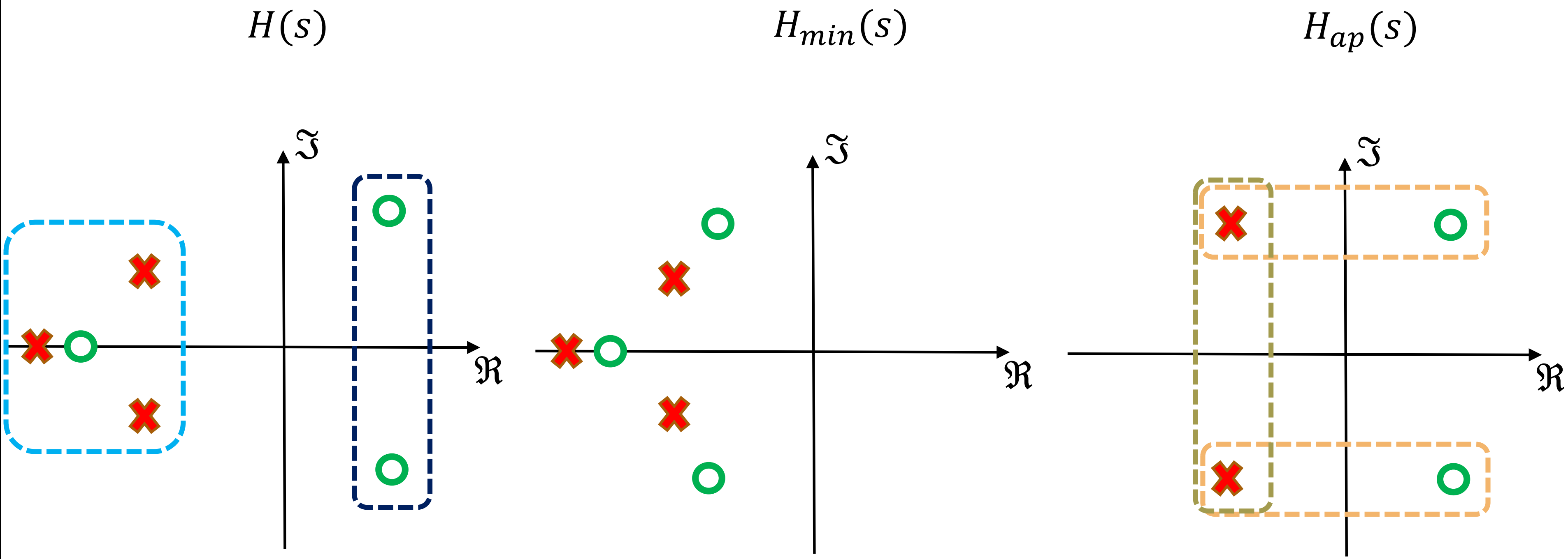
$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|}\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Πλήρης** ακύρωση της απόκρισης πλάτους του καναλιού!
- Το λαμβανόμενο σήμα έχει **ακριβώς το ίδιο φάσμα πλάτους** με αυτό που έφυγε από τον πομπό! ☺
- Προφανώς, η φάση του ληφθέντος σήματος θα διαφέρει από αυτή του πομπού
- Ας δούμε πόσο:

$$\angle Y'(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f)$$

- Ανάλογα με την εφαρμογή, η διαταραχή στη φάση μπορεί να είναι ανεπαίσθητη ή αρκετά σοβαρή
- Σε επικοινωνίες φωνής, δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα…

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:

Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης και all-pass

1. Οι πόλοι και τα μηδενικά του αριστερού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης.
2. Τα μηδενικά του δεξιού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα all-pass. Για να είναι αυτό έγκυρο all-pass σύστημα, προσθέτουμε πόλους σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.
3. Οι πόλοι που προστέθηκαν στο all-pass σύστημα πρέπει να ακυρωθούν στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης. Έτσι, προσθέτουμε μηδενικά στο τελευταίο σύστημα, στις ίδιες ακριβώς θέσεις με τους πόλους του all-pass συστήματος.

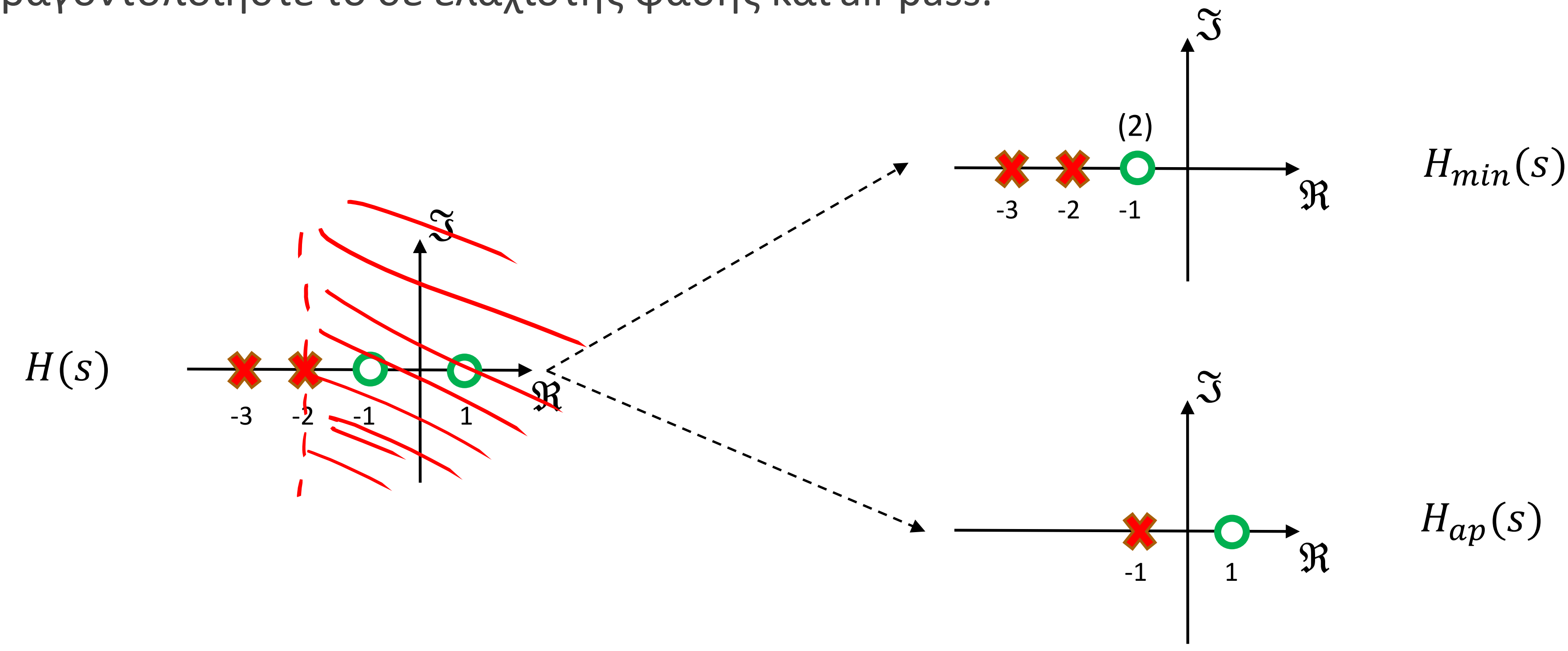
- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

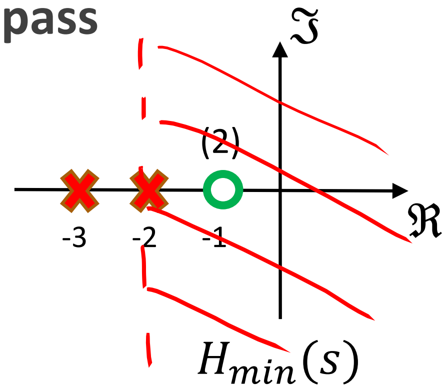
$$H(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+3)}, \qquad \sigma > -2$$

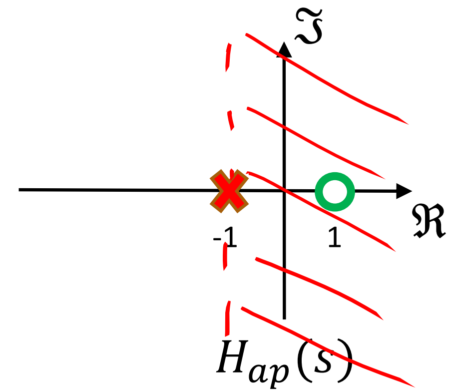
Παραγοντοποιήστε το σε ελάχιστης φάσης και all-pass.



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Παράδειγμα:

$\sigma > -2$





$$H_{min}(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+3)(s+2)}, \longrightarrow \sigma > -2$$

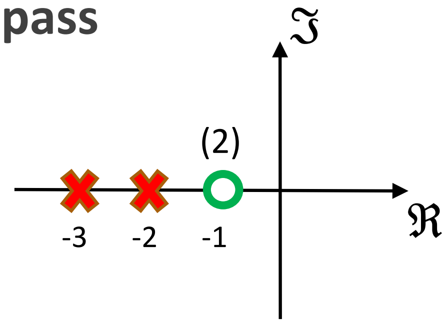
$$H_{ap}(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)} \longrightarrow \sigma > -1$$

$(s+1)$ → εξουδετερώνεται από ^{2}

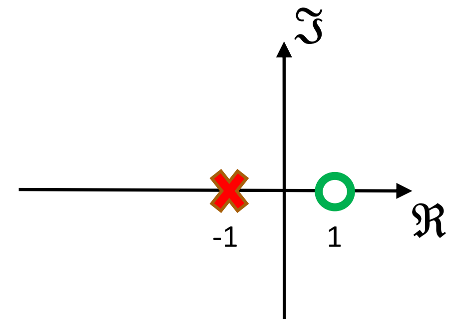
$$\{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > -1\} = \{\sigma > -1\} \;!\; \text{Γιατί?}$$

Άρα $\sigma > -2$ και όχι $\sigma > -1$!

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Παράδειγμα:



$H_{min}(s)$



$H_{ap}(s)$

Εξήγηση:

Στο παράδειγμα αυτό, πράγματι τα επιμέρους ROC είναι $R_{min} = \{\sigma > -2\}$ και $R_{ap} = \{\sigma > -1\}$, αλλά το συνολικό ROC – όπως μας το δίνει η εκφώνηση – δεν είναι $\{\sigma > -1\} = \{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > -1\}$, αλλά $R_H = \{\sigma > -2\}$.

Γιατί? Επειδή κατά το γινόμενο $H_{min}(s) H_{ap}(s)$, ο πόλος στο $s = -1$ εξουδετερώνεται από ένα μηδενικό στο $s = -1$.

Άρα τα πιθανά ROCs για το $H(s)$ δεν ορίζονται από τους πόλους $s=-3$, $s=-2$, $s=-1$ αλλά μόνο από τους $s=-2$, $s=-3$.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ