ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

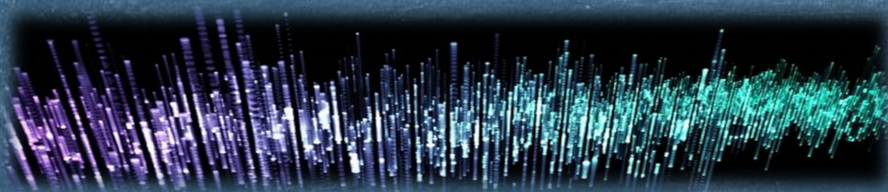
ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

Τι περιέχει το ΗΥ215?

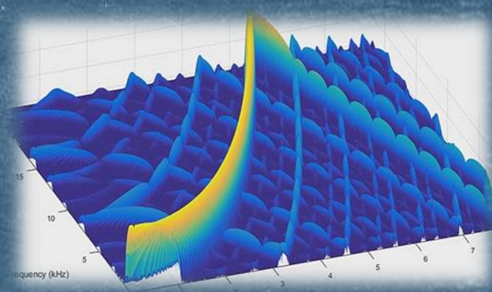
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



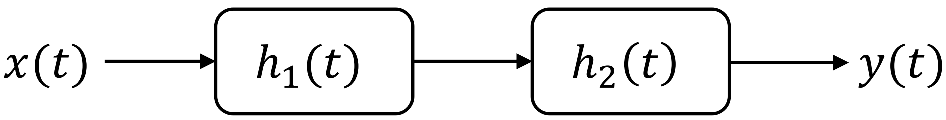
- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**
- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \Re_+$
- Ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος
- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα
- Άρα: **ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του**

- **Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων**

- Διάταξη σε σειρά

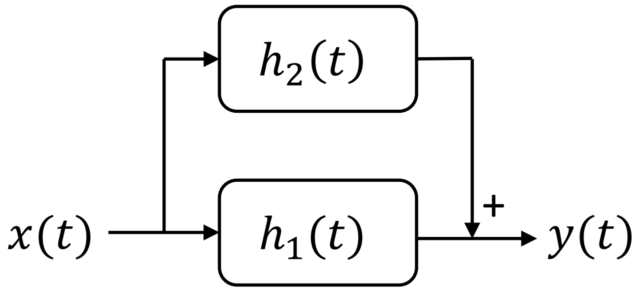


$$y(t) = \underbrace{\boxed{h_1(t) * h_2(t)}}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{H_1(s)H_2(s)}}_{H_{total}(s)} X(s)$$

- Διάταξη σε παραλληλία



$$\begin{aligned} y(t) &= \left(h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)\right) \\ &= \underbrace{\boxed{\left(h_1(t) + h_2(t)\right)}}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{\boxed{\left(H_1(s) + H_2(s)\right)}}_{H_{total}(s)} X(s) \end{aligned}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) \to \infty$
- Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν πόλους και μηδενικά του συστήματος
  - Είναι μόνο αυτά??
- Για παράδειγμα, έστω $H(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \sigma > 3$
- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$
- Προσέξτε όμως ότι

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s}\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = 0$$

- Άρα υπάρχει **ένα** “έξτρα” μηδενικό στο άπειρο!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους και 2 μηδενικά**!

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- Γενικότερα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} = A\frac{s^M\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{s^N\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)} = As^{M-N}\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)}$$

- Αν $M > N \Leftrightarrow M - N > 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M - N$ πόλοι στο άπειρο

- Αν $M < N \Leftrightarrow M - N < 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N - M$ μηδενικά στο άπειρο

- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο

- Άρα :

- **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**

$$\textbf{\# πόλων} = \textbf{\# μηδενικών}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- **Παράδειγμα:**

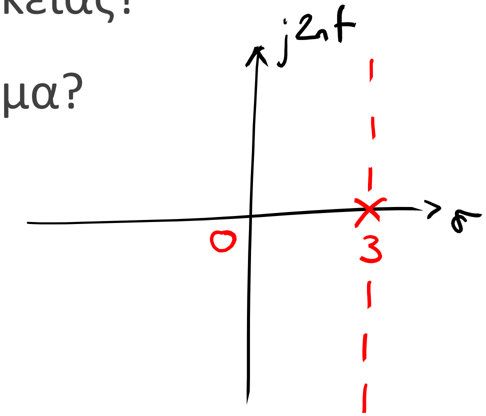
○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $s = 3$

a) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας?

b) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα?

c) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα?

d) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα?



Τα στοιχεία μας λένε ότι το σύστημα έχει έναν (ίσως όχι μοναδικό!) πόλο στο $s=3$ και ότι το σύστημα είναι ευσταθές (αφού $\int |h(t)|dt < \infty$) και άρα στο ROC πρέπει να περιλαμβάνεται ο άξονας $\sigma=0$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- **Παράδειγμα:**

α) ΟΧΙ, γιατί τα πεπερασμένης διάρκειας συστήματα έχουν ROC όλο το μιγαδικό επίπεδο (δεν έχουν πόλους στο μιγαδικό επίπεδο).

β) • πόλος στο $s=3$ μοναδικός: ΝΑΙ, για $\sigma < 3$ έχουμε ευσταθές (συμπεριλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας) και αριστερόπλευρο σύστημα $h(t)$.

• πόλος στο $s=3$ όχι μοναδικός: NAI, αν όλοι οι άλλοι πόλοι έχουν $\sigma > 3$ (πραγματικό μέρος > 3), τότε επιλέγουμε πάλι $\sigma < 3$ NAI, αν οι επιπλέον πόλοι έχουν $\sigma > 0$ (πραγματικό μέρος θετικό). Τότε επιλέγουμε $\sigma < \min(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, με N το πλήθος των πόλων.

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- **Παράδειγμα:**

ΟΧΙ, αν υπάρχει έστω ένας πόλος s_k με $\sigma_k < 0$. Τότε επιλέγοντας $\sigma < \sigma_k$, έχουμε αριστερόπλευρο αλλά όχι ευσταθές σύστημα.

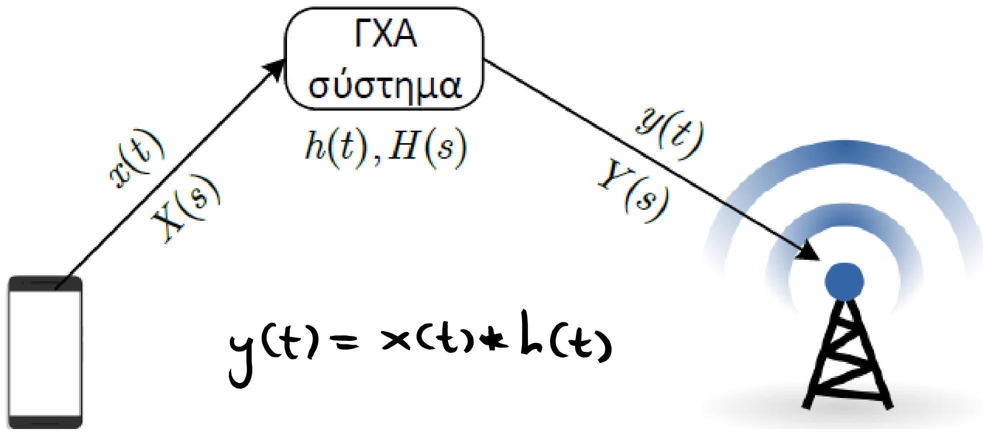
γ) • πόλος στο $s=3$ μοναδικός: ΟΧΙ, γιατί για $\sigma > 3$ δεν περιλαμβάνουμε το φανταστικό άξονα $\sigma = 0$.

• πόλος στο $s=3$ όχι μοναδικός: ΟΧΙ, γιατί είτε καταλήγαμε σε ROC "λωρίδα" (όχι δεξιόπλευρο), είτε ο άξονας $\sigma=0$ δεν περιλαμβάνεται στο ROC που μπορούμε να επιλέξουμε.

δ) • πόλος στο $s=3$ μοναδικός: ΟΧΙ, καθώς δεν μπορούμε να σχηματίσουμε ROC "λωρίδα", που αντιστοιχεί σε αμφίπλευρο σήμα $h(t)$ στο χρόνο.

• πόλος στο $s=3$ όχι μοναδικός: ΝΑΙ, αν όλοι οι επιπλέον πόλοι βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Με ιδανικό κανάλι επικοινωνίας, θα είχαμε

$$Y(s) = X(s)$$

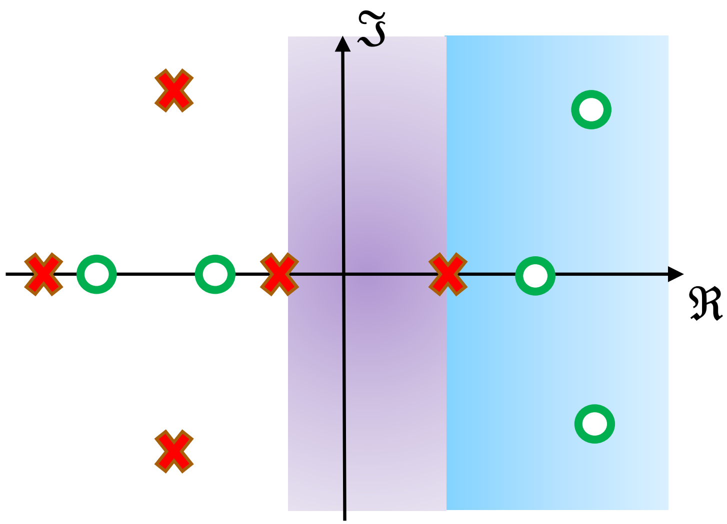
- Στην πράξη

$$Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow Y'(s) = \overset{H_{inv}(s)}{\boxed{\frac{1}{\cancel{H(s)}}}}\cancel{H(s)}X(s) = X(s)$$

έτσι ώστε $Y(f) = X(f)$

- Πολλές φορές το $H_{inv}(s)$ δεν είναι πραγματοποιήσιμο, γιατί δεν είναι ευσταθές η/και αιτιατό
- Πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες καταστάσεις?
- Μπορούμε έστω να έχουμε $Y(s) \approx X(s) \Rightarrow Y(f) \approx X(f)$?

- **Ευστάθεια και Αιτιατότητα**
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια ***ρητή*** συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε αιτιατό, αντι-αιτιατό, ή μη αιτιατό σύστημα (κρουστική απόκριση)
  - Ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης
- Έστω το ακόλουθο διάγραμμα πόλων-μηδενικών που αντιστοιχεί σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς



- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα αιτιατό?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι **και** αιτιατό **και** ευσταθές? ☹

- Για να μπορεί να είναι ένα σύστημα **ευσταθές και αιτιατό, πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου**
- Εναλλακτικά, **όλοι οι πόλοι θα πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος**

- **Αντίστροφο Σύστημα**

- Το αντίστροφο σύστημα ενός δοθέντος ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:

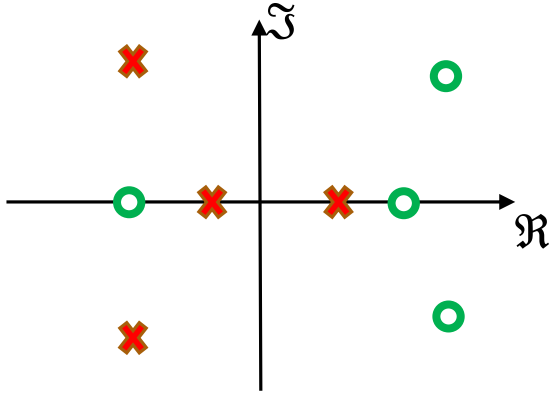
$$h(t) * h_{inv}(t) = \delta(t)$$

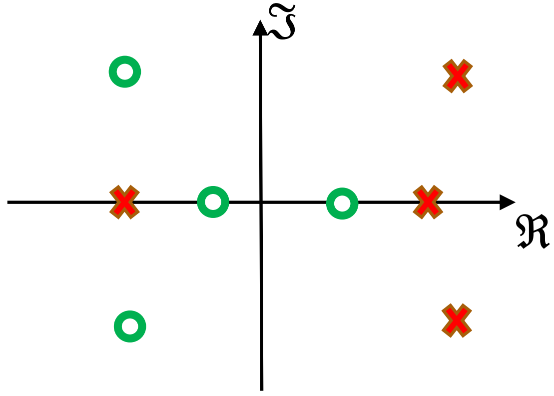
- Στο χώρο του Laplace:

$$H(s)H_{inv}(s) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset$$

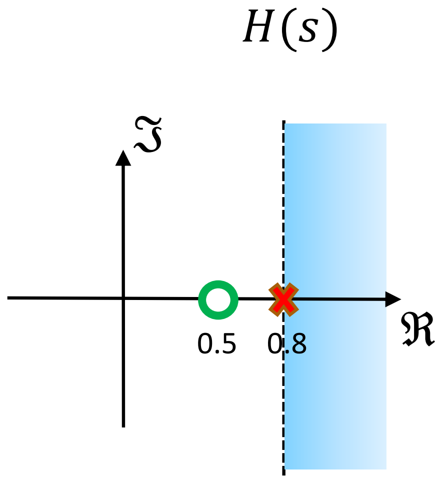
- Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται μηδενικά και πόλοι του αντιστρόφου συστήματος, αντίστοιχα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \rightarrow H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}$$





- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**



○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s - \frac{4}{5}}, \qquad \sigma > \frac{4}{5}$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

Είναι

$$H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{s-1/2}{s-4/5}} = \frac{s-\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}}$$

- $\sigma > \frac{1}{2}$ ✓ γιατί $\{\sigma > \frac{4}{5}\} \cap \{\sigma > \frac{1}{2}\} \neq \emptyset$
- $\sigma < \frac{1}{2}$ ✗

Άρα

$$h_{inv}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4/5}{s-1/2}\right\}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**
  - $$H_{inv}(s) = \frac{s-\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}} = \frac{s-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} = \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}} = \frac{s-\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} - \frac{3}{10}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}$$
    $$= 1 - \frac{3}{10}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

Άρα

$$h_{inv}(t) = \delta(t) - \frac{3}{10} e^{\frac{t}{2}} u(t)$$

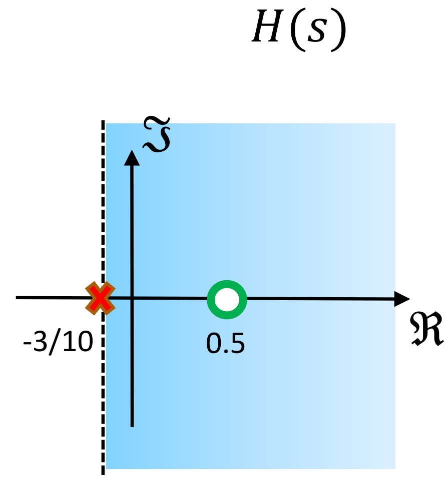
Εναλλακτικά,

$$\begin{array}{l|l} s-\frac{4}{5} & s-\frac{1}{2} \\ \hline -\left(s-\frac{1}{2}\right) & 1 \\ \hline -\frac{3}{10} & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow H_{inv}(s) = 1 + \frac{-\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}},$$

και η υπόλοιπη λύση ίδια

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**



○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{3}{10}}, \qquad \sigma > -\frac{3}{10}$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

Είναι $H_{inv}(s) = \dfrac{s + \frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}$

- $\sigma > \frac{1}{2}$
- $\sigma < \frac{1}{2}$

Και τα δυο είναι έγκυρα!

$H_{inv}(s) = 1 + \dfrac{8}{10} \dfrac{1}{s - \frac{1}{2}}$, άρα:

~> $\sigma > \frac{1}{2}$: $h^{(1)}_{inv}(t) = \delta(t) + \frac{8}{10} e^{\frac{t}{2}} u(t)$

~> $\sigma < \frac{1}{2}$: $h^{(2)}_{inv}(t) = \delta(t) - \frac{8}{10} e^{\frac{t}{2}} u(-t)$

	Ευσταθές	Αιτιατό
$h^{(1)}$	✗	✓
$h^{(2)}$	✓	✗

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- Παράδειγμα:

Εναλλακτικά: $H_{inv}(s) = \dfrac{s+\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}} = \dfrac{s}{s-\frac{1}{2}} + \dfrac{3}{10}\dfrac{1}{s-\frac{1}{2}}$,

με $\sigma > \frac{1}{2}$ ή $\sigma < \frac{1}{2}$.

$$s\frac{1}{s-\frac{1}{2}} = s\,G(s)$$

Από ιδιότητα παραγώγισης, $\frac{d}{dt}g(t) \xleftrightarrow{L} s\,G(s)$, οπότε

$$s\frac{1}{s-\frac{1}{2}} \xleftrightarrow{L^{-1}} \underbrace{\frac{d}{dt}\left(-e^{\frac{t}{2}}u(-t)\right)}_{\sigma < -\frac{1}{2}} \text{ ή } \underbrace{\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}}u(t)\right)}_{\sigma > \frac{1}{2}}$$

Με πράξεις (κάνετέ το!) καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα με το προηγούμενο slide.

Συνεχίζεται... ☺