# ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

- **Η συνάρτηση μεταφοράς**

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

**συνάρτηση μεταφοράς**

Κρουστική απόκριση $h(t) \leftrightarrow$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **Ν το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το $c$
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$

- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**
- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή $t_0$ πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**
- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$
- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

- Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος
- Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

## ❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)}$$

## ❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $s$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (μόνο αν $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i}, \qquad R_H$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

## ❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} s^n X(s), \quad R_x$$

- **Παράδειγμα:**
  - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι αιτιατό.

Μεταφέραμε τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace.

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

Οπότε

$$Y(s)\left(s^2 - s - 2\right) = X(s)$$

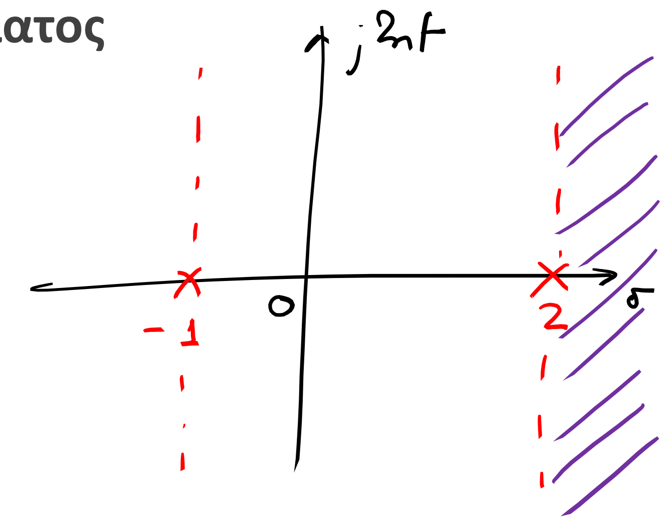
$$\frac{Y(s)}{X(s)}\left(s^2 - s - 2\right) = 1$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = H(s), \quad R_H$$

## Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

Είναι $H(s) = \dfrac{1}{(s-2)(s+1)}$ , $R_H$




Αιτιατό: $h(t) = 0,\ t<0$

Λόγω αιτιατότητας, το $R_H = \{\sigma > 2\}$

Οπότε

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}, \quad \sigma > 2$$

Είναι

$$A = H(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{1}{\cancel{(s-2)}(s+1)}\cancel{(s-2)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3}$$

$$B = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s-2)\cancel{(s+1)}}\cancel{(s+1)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$$

## ❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

Άρα

$$H(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+1}, \quad \sigma > 2$$

$\bullet\ \sigma > 2$ $\quad$ $\bullet\ \sigma > -1$

$\bullet\ \sigma < 2$ $\quad$ $\bullet\ \sigma < -1$

γιατί $\{\sigma > 2\} \cap \{\sigma > -1\} = \sigma > 2$

Τελικά,

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right) u(t).$$

## ❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)$$

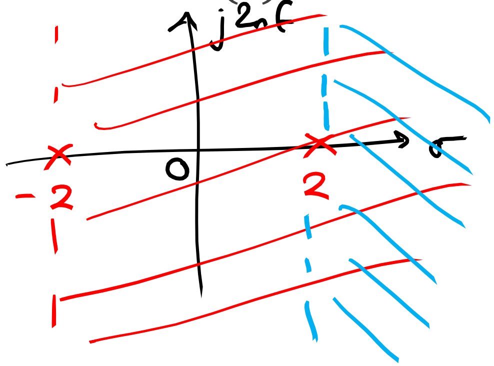
$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

# Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

  - Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$




Από πριν

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \quad \sigma > 2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \sigma > -2$$, με χρήση πινάκων ζευγών Μ.L.

Άρα

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s+1)}, \quad R_Y = R_X \cap R_H = \{\sigma > 2\} \cap \{\sigma > -2\} = \{\sigma > 2\}.$$

Είναι

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

# ❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

○ Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$

Με γνωστό τρόπο, $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{3}$

Άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}, \quad \sigma > 2$$

• $\sigma > 2$ • $\sigma > -2$ • $\sigma > -1$

• $\sigma < 2$ • $\sigma < -2$ • $\sigma < -1$

$$\{\sigma > 2\} \cap \{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > -1\} = \{\sigma > 2\}$$

Από πίνακα ζευγών

$$y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

## ❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο και το σύστημα αιτιατά
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \dots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

$$\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)$$

## ❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}y(t) \leftrightarrow s^nY(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-)}$$

- **Παράδειγμα:**

○ Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2,\ \ y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$

Θα είναι:

- $6y(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} 6Y(s)$
- $5y'(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} 5\left(sY(s) - \sum_{i=1}^{1} s^{1-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-)\right) = 5\left(sY(s) - s^{1-1}y(0^-)\right)$ $= 5\left(sY(s) - y(0^-)\right)$ $= 5\left(sY(s) - 2\right)$ $= 5sY(s) - 10$
- $y''(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} s^2Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{2-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-) =$

$= s^2Y(s) - \left(s^{2-1}\frac{d^0}{dt^0}y(0^-) + s^{2-2}\frac{d^1}{dt^1}y(0^-)\right)$

$= s^2Y(s) - \left(s \cdot y(0^-) + y'(0^-)\right) = s^2Y(s) - 2s - 1$

# ❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

$x(t) = e^{-4t}u(t)$

$x(0^-) = ?$

$\updownarrow L$

$\frac{1}{s+4}, \sigma > -4$

- $x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)$
- $x'(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} sX(s) - x(0^-) = sX(s) - 0 = sX(s)$

Οπότε

$$6Y(s) + 5sY(s) - 10 + s^2Y(s) - 2s - 1 = X(s) + sX(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) - 2s - 1 - 10 = X(s)(s+1)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) - 2s - 11 = X(s)(s+1)$$

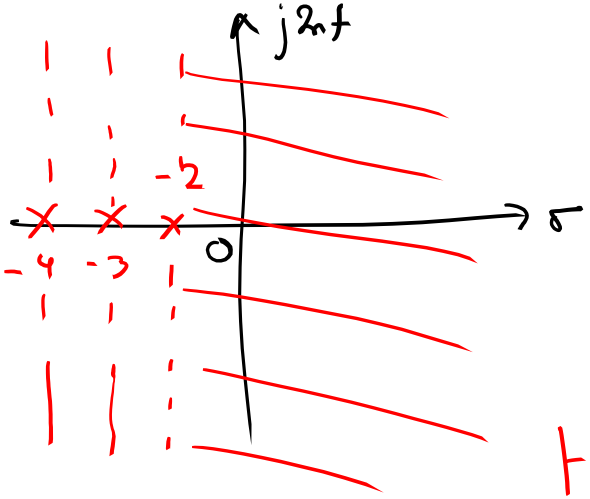
$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) = X(s)(s+1) + 2s + 11$$

$$Y(s) = \frac{X(s)(s+1) + 2s + 11}{\left(s^2 + 5s + 6\right)} = \frac{(s+1)X(s) + 2s + 11}{(s+2)(s+3)}$$

# Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{(s+2)(s+3)} = \quad = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}, \quad \sigma > -2$$




Άρα τελικά

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4},$$

με $A = \frac{13}{2}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{3}{2}$

$\sigma > -2 \qquad \sigma > -3 \qquad \sigma > -4$

και από πίνακες ζευγών

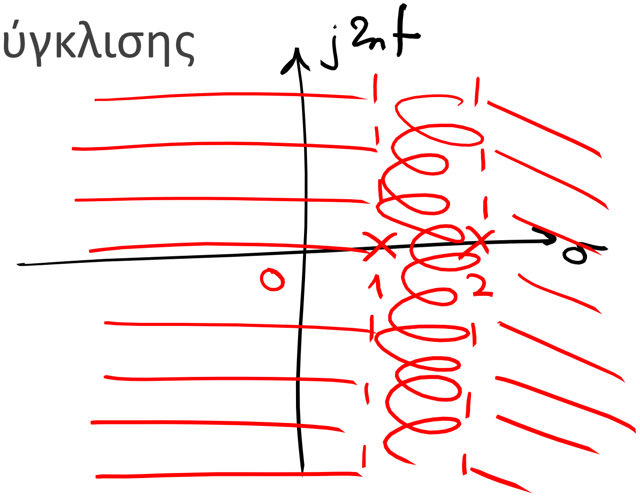
$$y(t) = \frac{13}{2} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-3t} u(t) - \frac{3}{2} e^{-4t} u(t)$$

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης




Είναι

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)}$$

Πιθανά πεδία σύγκλισης:
- $\sigma > 2$
- $\sigma < 1$
- $1 < \sigma < 2$

Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα:

$$H(s) = -2\frac{1}{s-1} + 3\frac{1}{s-2}$$

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**
- Παράδειγμα:

Είναι

$$H(s) = -2\frac{1}{s-1} + 3\frac{1}{s-2}$$

- $\sigma < 1$
- $\sigma > 1$

- $\sigma < 2$
- $\sigma > 2$

$\rightarrow \sigma > 2 : \{\sigma > 1\} \cap \{\sigma > 2\}$

$$h(t) = -2e^{t}u(t) + 3e^{2t}u(t)$$

$\rightarrow \sigma < 1 : \{\sigma < 1\} \cap \{\sigma < 2\}$

$$h(t) = 2e^{t}u(-t) - 3e^{2t}u(-t)$$

$\rightarrow 1 < \sigma < 2 : \{\sigma > 1\} \cap \{\sigma < 2\}$

$$h(t) = -2e^{t}u(t) - 3e^{2t}u(-t)$$

# Συνεχίζεται... ☺