ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η

- Μετασχηματισμός Laplace - Ιδιότητες

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s),$	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n-οστη παραγώγιση στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

- Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t)$$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [Ax(t) + By(t)]e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t)e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} By(t)e^{-st}dt = A\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt + B\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt$$

$$= AX(s) + BY(s)$$

με πεδία σύγκλισης R_x, R_y αντίστοιχα. Για να υπάρχει ο μετασχηματισμός, πρέπει τα δυο πεδία σύγκλισης να έχουν μη κενή τομή. Άρα $R_z \supseteq R_x \cap R_y$. Γιατί όμως $\supseteq$?

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Βρείτε το μετασχ. Laplace του αθροίσματος των σημάτων

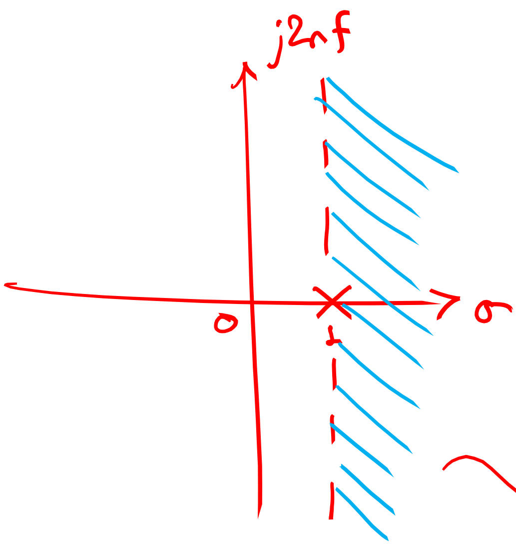
$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \underbrace{\sigma > 2}_{R_x}, \qquad Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)}, \underbrace{\sigma > 2}_{R_y}$$

Είναι

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{(s-1)-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{\cancel{s-2}}{(s-1)\cancel{(s-2)}}$$

$$= \frac{1}{s-1}, \quad R_Z = ?$$



$\sigma > 1$

ή

$\sigma < 1$

✓ **Μόνο στην περίπτωση αλληλοεξουδετέρωσης πόλου-μηδενικού είναι πιθανό να έχουμε πεδίο σύγκλισης μεγαλύτερο της τομής των επιμέρους!**

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x}(\mathbf{t})$ $\mathbf{y}(\mathbf{t})$	$\mathbf{X}(\mathbf{s})$ $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x

• Απόδειξη:

$$z(t) = x^*(t)$$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-st}dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-s^*t}dt\right)^* = X^*(s^*)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

○ Έστω ένα σήμα $x(t) \in \Re$ με ρητό Μετασχ. Laplace $X(s)$. Για το σήμα γνωρίζετε ότι:

❑ έχει έναν πόλο στη θέση $s_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi}{3}}$ κι έναν πόλο στη θέση s_2

❑ έχει ένα μηδενικό στη θέση $s_3 = -1$

❑ $X(0) = 2$

Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε για το $X(s)$

Επειδή $x(t) \in \mathbb{R}$, τότε $x^*(t) = x(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*) = X(s)$.

Αν s_z είναι μηδενικό, τότε $X(s_z) = 0 \Rightarrow X^*(s_z^*) = 0$!

Αν s_p είναι πόλος, τότε $X(s_p) = \infty \Rightarrow X^*(s_p^*) = \infty$!

Άρα: αν $x(t) \in \mathbb{R}$, τότε οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Laplace $X(s)$ "έρχονται" σε συζυγή ζεύγη!!

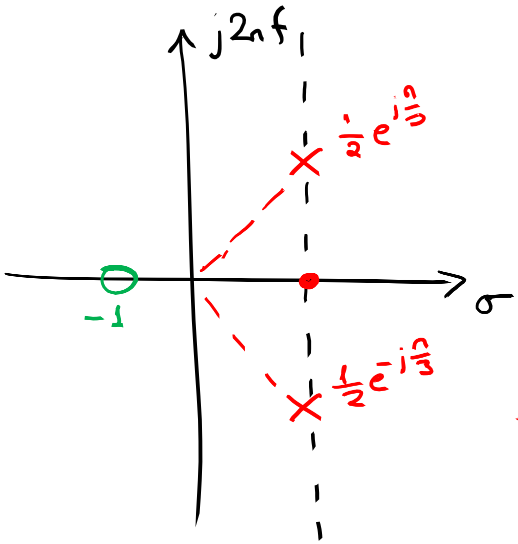
Οπότε ο άγνωστος πόλος s_2 είναι ο $s_1^* = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}}$!

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Οπότε

$$X(s) = A \frac{(s+1)}{\left(s - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(s - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}, \quad R_x$$

$$* \quad Re\left\{\frac{1}{2}e^{\pm j\frac{\pi}{3}}\right\} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$



$$= A \frac{s+1}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}}, \quad R_x$$

Ξέρουμε ότι $X(0) = 2 \Leftrightarrow A \dfrac{0+1}{0^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Άρα τελικά

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}}, \quad R_x \overset{*}{=} ?$$

$$\sigma > \frac{1}{4}$$

$$\sigma < \frac{1}{4}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

• Απόδειξη:

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t) * y(t)\big) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) e^{-st} dt\right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(s) e^{-s\tau} d\tau = Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= Y(s)X(s)$$

• Πεδίο σύγκλισης θα πρέπει να είναι τουλάχιστον η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Ξανά, σε περίπτωση αλληλοεξουδετέρωσης πόλων-μηδενικών, πρέπει να το ελέγχουμε

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

○ Έστω δυο σήματα $x(t) = e^{at}u(t)$, $y(t) = e^{2at}u(t)$. Υπολογίστε τη $\underbrace{\text{συνέλιξη τους}}_{c_{xy}(t)}$.

Είναι

$$x(t) = e^{at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$$

$$y(t) = e^{2at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = \frac{1}{s-2a}, \quad \sigma > 2a$$

Άρα

$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}, \quad R_c = R_x \cap R_Y = \{\sigma > 2a\}$$

Έχουμε

$$C_{xy}(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-2a}$$

$$A = C_{xy}(s)(s-a)\Big|_{s=a} = \frac{1}{\cancel{(s-a)}(s-2a)}\cancel{(s-a)}\Big|_{s=a} = \frac{1}{s-2a}\Big|_{s=a} = -\frac{1}{a}$$

• **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

$$B = C_{xy}(s)(s-2a)\Big|_{s=2a} = \frac{1}{(s-a)\cancel{(s-2a)}}\cancel{(s-2a)}\Big|_{s=2a} = \frac{1}{s-a}\Big|_{s=2a} = \frac{1}{a}$$

Άρα

$$C_{xy}(s) = \frac{-\frac{1}{a}}{s-a} + \frac{\frac{1}{a}}{s-2a} = \left(-\frac{1}{a}\right)\underset{\sigma>a}{\frac{1}{s-a}} + \left(\frac{1}{a}\right)\underset{\sigma>2a}{\frac{1}{s-2a}},$$

με πεδίο σύγκλισης $R_c = \{\sigma > 2a\}$.

$\cap$

Από πίνακα με ζεύγη, έχουμε:

$$C_{xy}(t) = -\frac{1}{a}e^{at}u(t) + \frac{1}{a}e^{2at}u(t)$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{2at} - e^{at}\right)u(t).$$

- **Ο Μονόπλευρος Μετασχ. Laplace**
- Μονόπλευρος μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Ουσιαστικά αποτελεί το μετασχ. Laplace που ξέρουμε ήδη, αλλά για αιτιατά σήματα
- Κάποιες ιδιότητες είναι λίγο διαφορετικές

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big]_{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

- Θα τον επισκεφτούμε ξανά όταν μιλήσουμε για συστήματα στο χώρο του Laplace

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2}-e^{-sT/2})$	Όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$

- **Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace**

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$e^{-a\|t\|},\ a > 0$	$\frac{2a}{a^2 - s^2}$	$a > \mathrm{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$t\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2 - (2\pi f_0)^2}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}, \quad \boxed{\sigma < -2}$$

$$s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot 1\cdot 10}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{3\pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Είναι

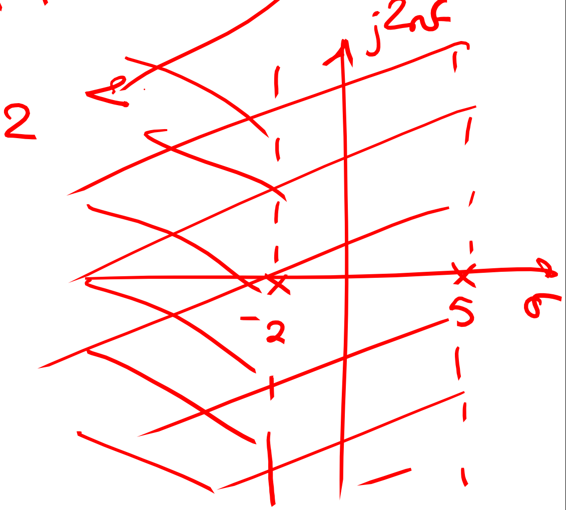
$$X(s) = \frac{s+7}{(s-5)(s+2)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+2}$$

Είχαμε βρίσκαμε ότι $A = \frac{12}{7}$, $B = -\frac{5}{7}$, άρα

$$X(s) = \frac{12}{7}\frac{1}{s-5} - \frac{5}{7}\frac{1}{s+2}, \quad \sigma < -2$$

- $\sigma < 5$
- $\sigma > 5$

- $\sigma < -2$
- $\sigma > -2$



- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

Από πίνακα ζευγών.

$$x(t) = \frac{12}{7}\left(-e^{5t}u(-t)\right) - \frac{5}{7}\left(-e^{-2t}u(-t)\right)$$

$$= \frac{5}{7}e^{-2t}u(-t) - \frac{12}{7}e^{5t}u(-t).$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

Ζεύγη	Ιδιότητες

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s}$$

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}, \sigma > 0$$

- Αναπτυγμα σε μερικά κλάσματα ...

- Είναι $X(s) = \frac{\frac{1}{s^2+4}}{s} = \frac{Y(s)}{s}$. Αναζητώ το $y(t)$

Είναι $Y(s) = \frac{1}{s^2+4}$. Ξέρουμε από πίνακα ότι $\sin(2\pi f_0 t)u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}, \sigma>0$

Για $2\pi f_0 = 2$, το ζεύγος μας δίνει

$$\frac{1}{2}\sin(2t)u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{s^2+4}, \sigma>0$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

Ζεύγη

Ιδιότητες

- Παράδειγμα:

Άρα τελικά

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2} \sin(2\tau)\, \overset{1,\ \tau>0}{\cancel{u(\tau)}}\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \frac{1}{2} \sin(2\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{t} \sin(2\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(2\tau) \right) \Big|_{0}^{t}$$

$$= -\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t), \quad t>0$$

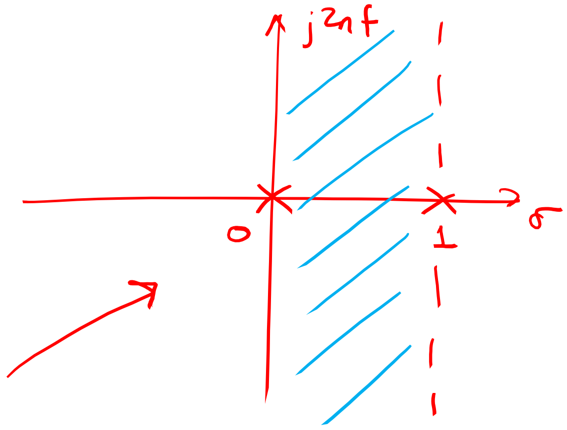
Πιο κομψά, $x(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t) \right) u(t)$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2+2}{s^3-s}, \qquad 0 < \sigma < 1$$



Το παράδειγμα αυτό λύνεται εύκολα με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα — το ενδιαφέρον εδώ είναι το πεδίο σύγκλισης, που αποτελεί μια "λωρίδα" στο μιγαδικό επίπεδο, και άρα περιμέναμε να αντιστοιχεί σε αμφίπλευρο σήμα στο χρόνο.

Είναι

$$X(s) = \frac{s^2+2}{s^3-s} = \frac{s^2+2}{s(s^2-1)} = \frac{s^2+2}{s(s-1)(s+1)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα:

Με τους γνωστούς τύπους δείξαμε ότι $A = -2$, $B = \frac{3}{2}$, $C = \frac{3}{2}$

Άρα

$$X(s) = -2\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

Ποιά τα πιθανά πεδία σύγκλισης των επιμέρους κλασμάτων?

- $\sigma > 0$ • $\sigma > -1$ • $\sigma > 1$
- $\sigma < 0$ • $\sigma < -1$ • $\sigma < 1$

Πρέπει να επιλέξουμε τα R_1, R_2, R_3 τέτοια ώστε

$$R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{0 < \sigma < 1\}$$

Άρα τελικά, από πίνακες ζευγών:

$$x(t) = -2u(t) + \frac{3}{2}e^{-t}u(t) - \frac{3}{2}e^{t}u(-t)$$

Αμφίπλευρο! (όπως αναμενόταν)

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ