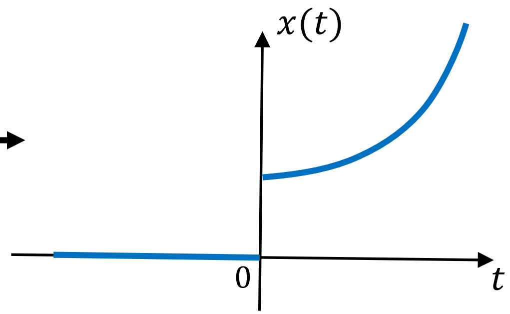
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 11Η

- Μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (?) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων
- Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)
  - Κάποια σήματα ισχύος
  - Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος
- Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$
  - Δεν έχει μετασχ. Fourier
  - Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?



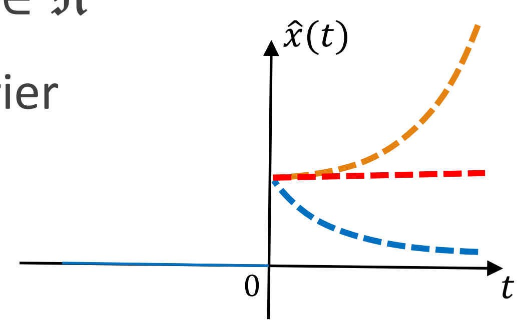
$$a < 0$$

- Ας το κάνουμε να έχει! ☺
- Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = e^{at}e^{-\sigma t}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \qquad \sigma \in \Re$$

- Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{-j2\pi f t}dt$$



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

- Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα

- Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! ☺

- Από την παραπάνω σχέση

$$\hat{X}(f) = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\overbrace{(\sigma + j2\pi f)}^{s} t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{x(t)}{\boxed{e^{at} u(t)}} e^{-st} dt = X(s)$$

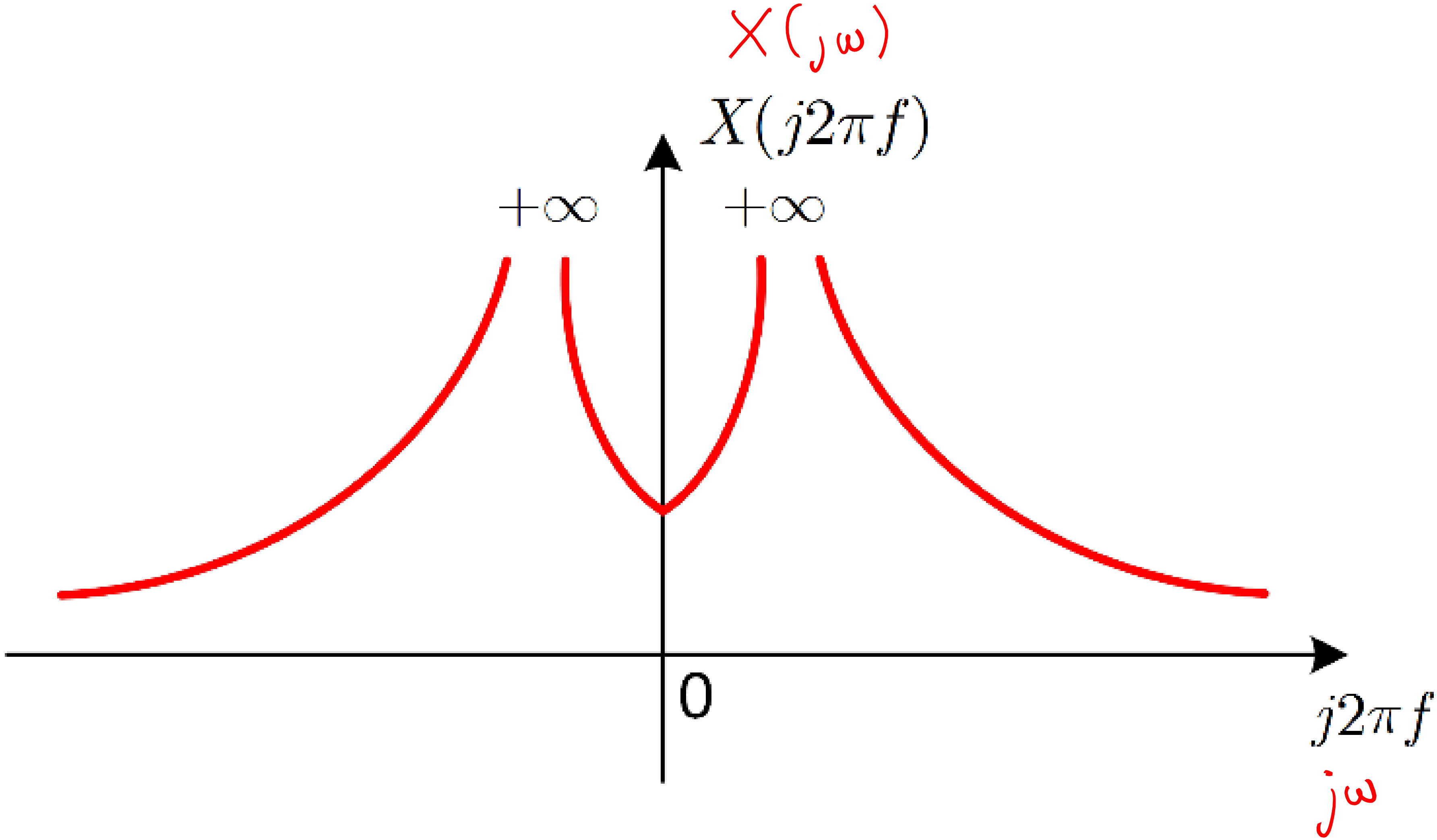
- Οπότε βρήκαμε έναν άλλο μετασχηματισμό ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}

- Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόνταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$

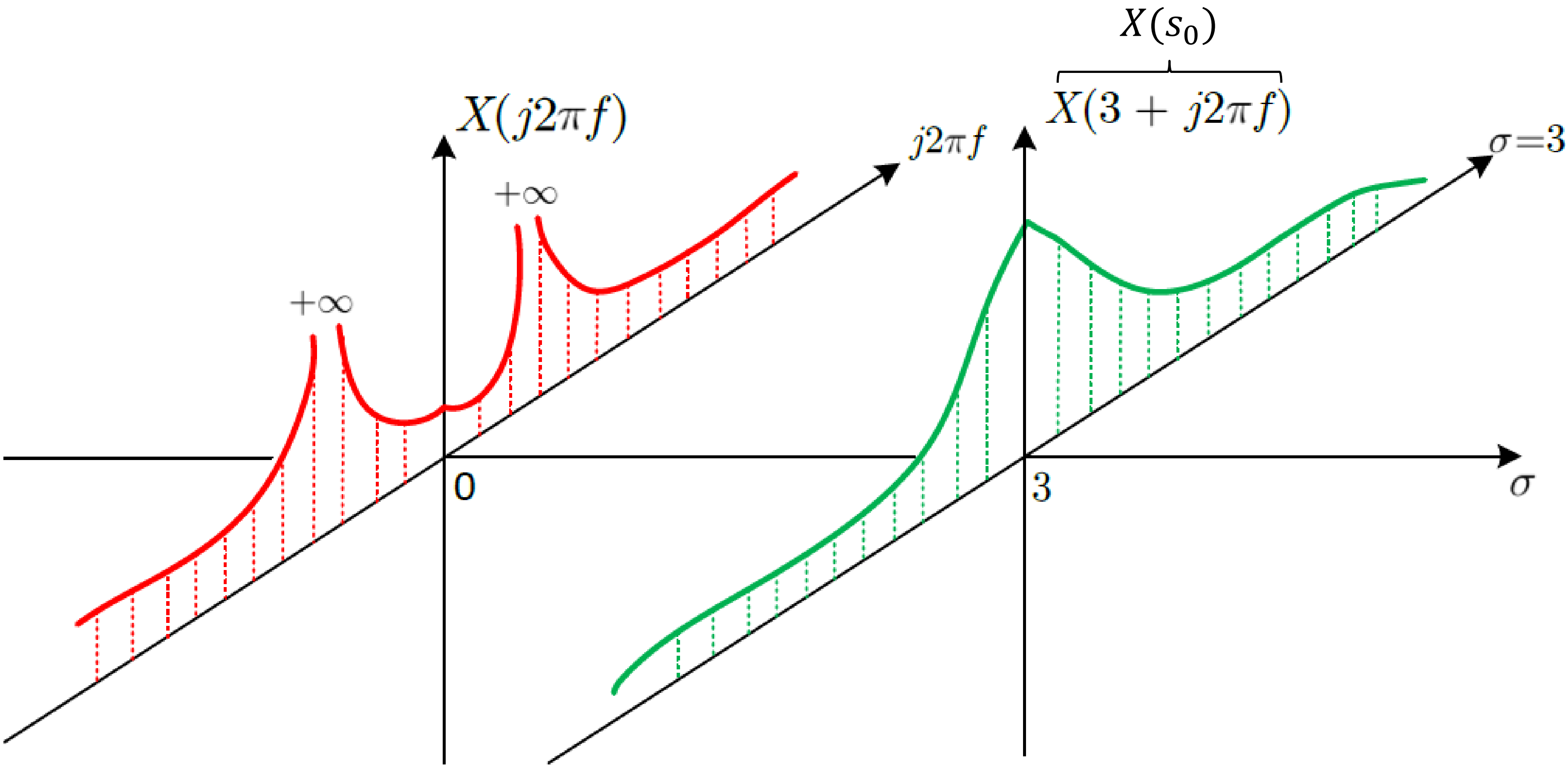
- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται

μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας
  - Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$
- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence)**
  - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής
- Ορισμός Μετασχ. Laplace

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

  - Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε…

- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξενίζει...
- Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

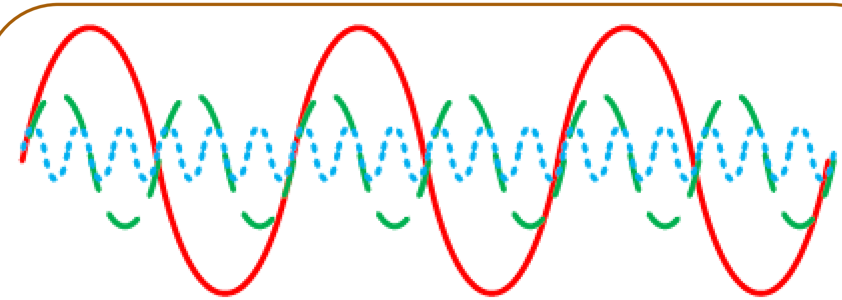
$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(f)e^{j2\pi f t}df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{X}(f)e^{\sigma t}\right)e^{j2\pi f t}df$$

$e^{(a-\sigma)t}u(t)$

- Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

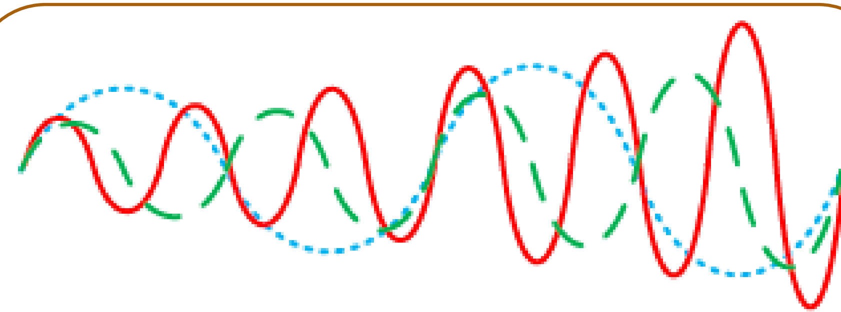
$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} 2\left|\hat{X}(f)\right|e^{\sigma t}\cos\left(2\pi f t + \hat{\phi}(f)\right)df$$

$\sigma = 0$



(α΄) Σταθερού πλάτους ημίτονα

$\sigma \neq 0$

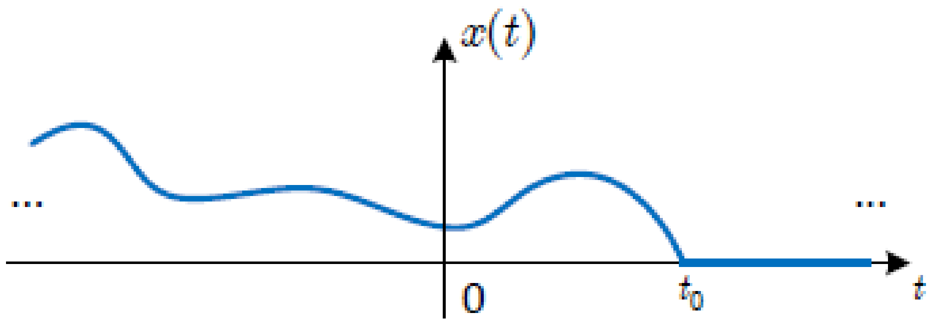


(β΄) Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

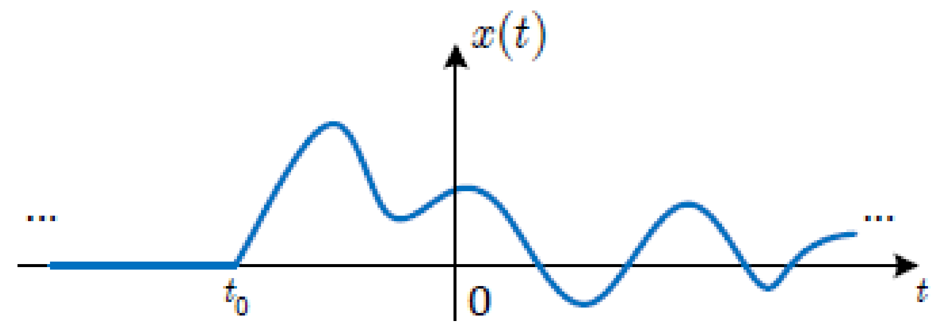
- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**
- Πλευρικότητα

$$x(t) = 0, \qquad t > t_0$$

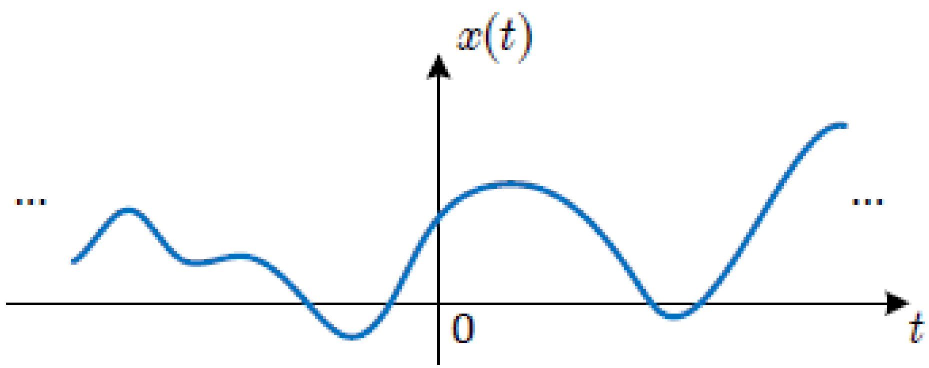
$$x(t) = 0, \qquad t < t_0$$



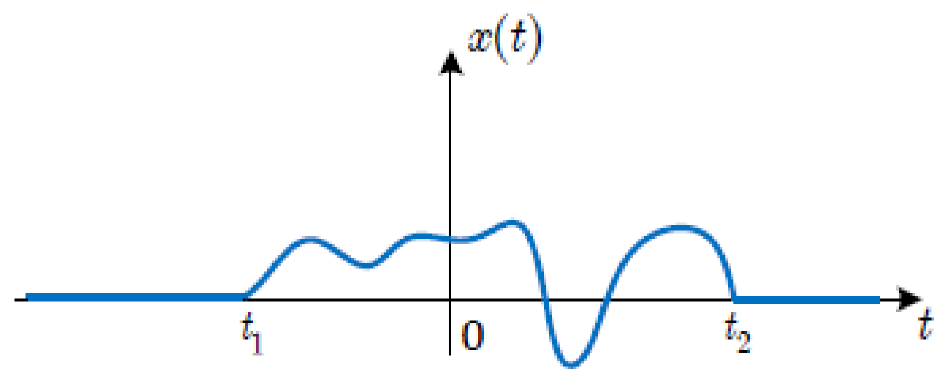
(α΄) Αριστερόπλευρο σήμα.



(β΄) Δεξιόπλευρο σήμα.



(γ΄) Αμφίπλευρο σήμα.



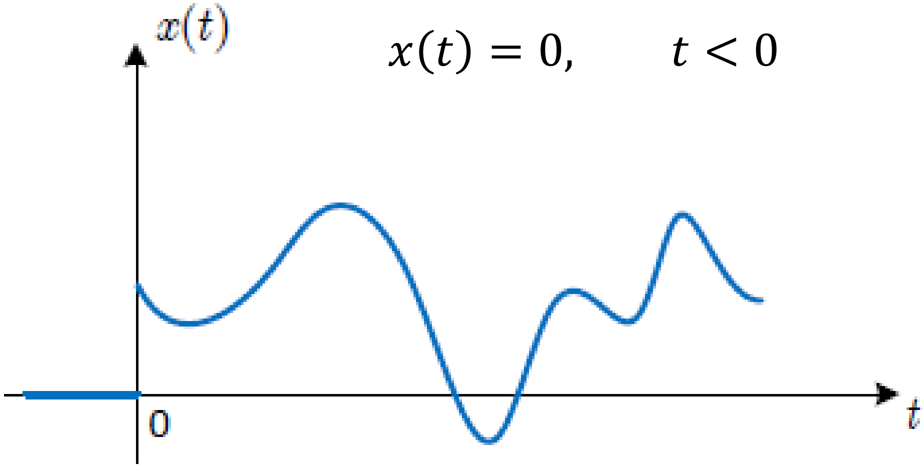
(δ΄) Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.

$$x(t) = 0, \qquad t_1 < t < t_2$$

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

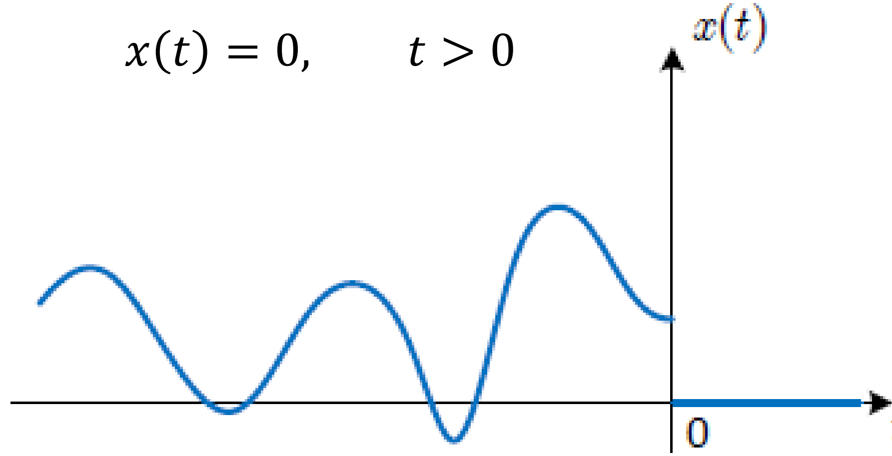
- Αιτιατότητα

$$x(t) = 0, \qquad t < 0$$

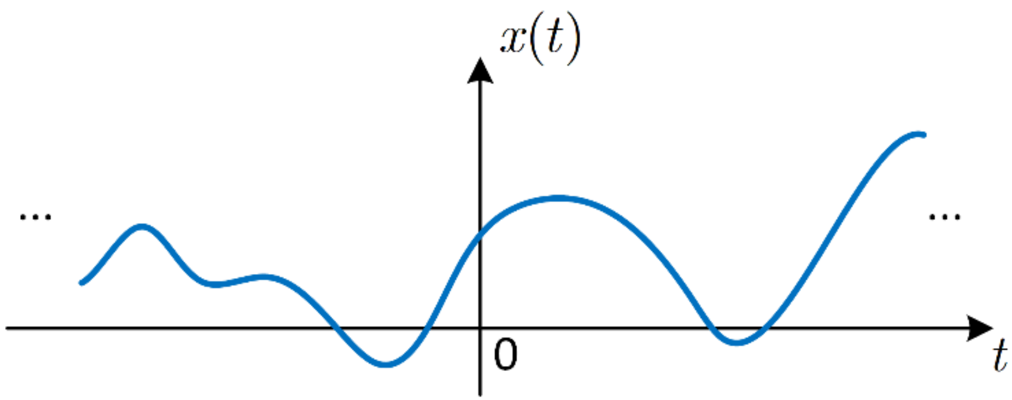


(α′) *Αιτιατό Σήμα.*

$$x(t) = 0, \qquad t > 0$$



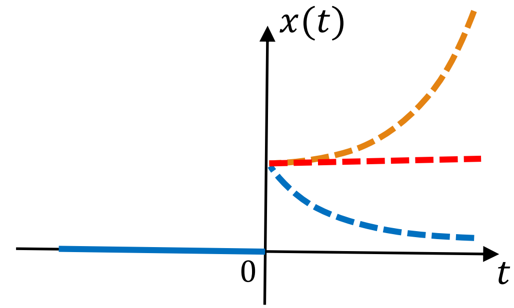
(β′) *Αντι-αιτιατό σήμα.*



(γ’) *Μη-αιτιατό σήμα*

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t), a \in \Re$



Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} \underbrace{u(t)}_{1,\ t>0} e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{+\infty}$$

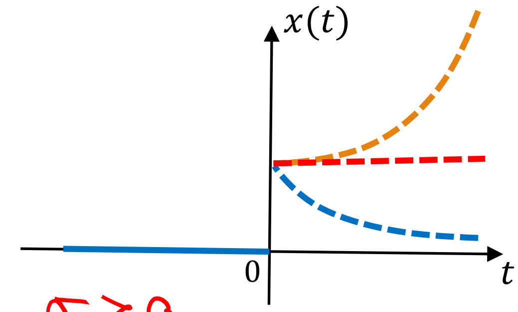
$$= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (1)$$

Είναι

$$\lim_{t\to+\infty} \left(e^{at} \cdot e^{-(\sigma + j2\pi f)t} \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi f t} \right) = 0$$

αν και μόνο αν $a - \sigma < 0 \Leftrightarrow \boxed{\sigma > a}$ Άρα $(1) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t), a \in \Re$



Βρήκαμε ότι

$$e^{at}u(t),\ a \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a},\ \sigma > a$$

ή

$\mathrm{Re}\{s\} > a$

- $X(s) = \dfrac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$

⇝ Πόλοι: $s = a$, γιατί $X(a) = \infty$

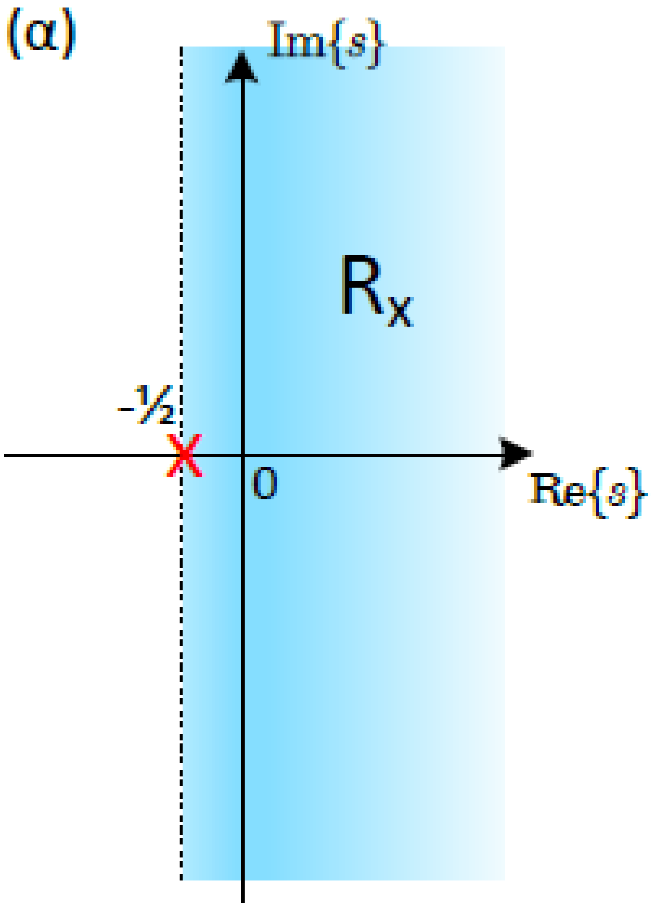
⇝ Μηδενικό: $s = \infty$, γιατί $X(\infty) = 0$

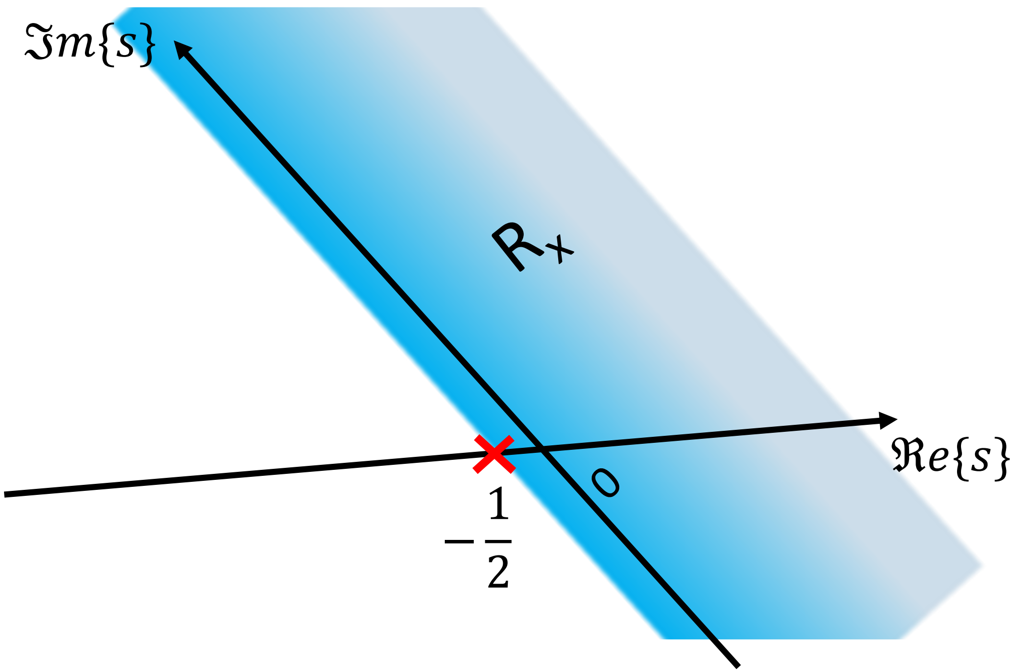
- Τιμές του s όπου $X(s) = 0$: **μηδενικά , O**
- Τιμές του s όπου $X(s) \to \infty$: **πόλοι , X**

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:

$x(t) = e^{-t/2}u(t)$, $s = -\frac{1}{2}$, πόλος

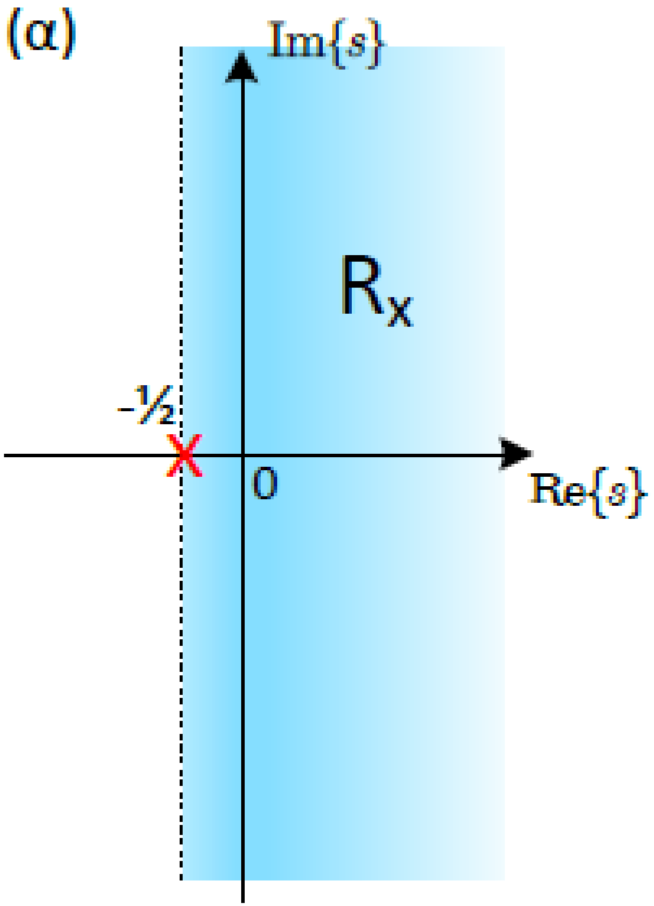
$\sigma > -\frac{1}{2}$, $ROC = R_x$

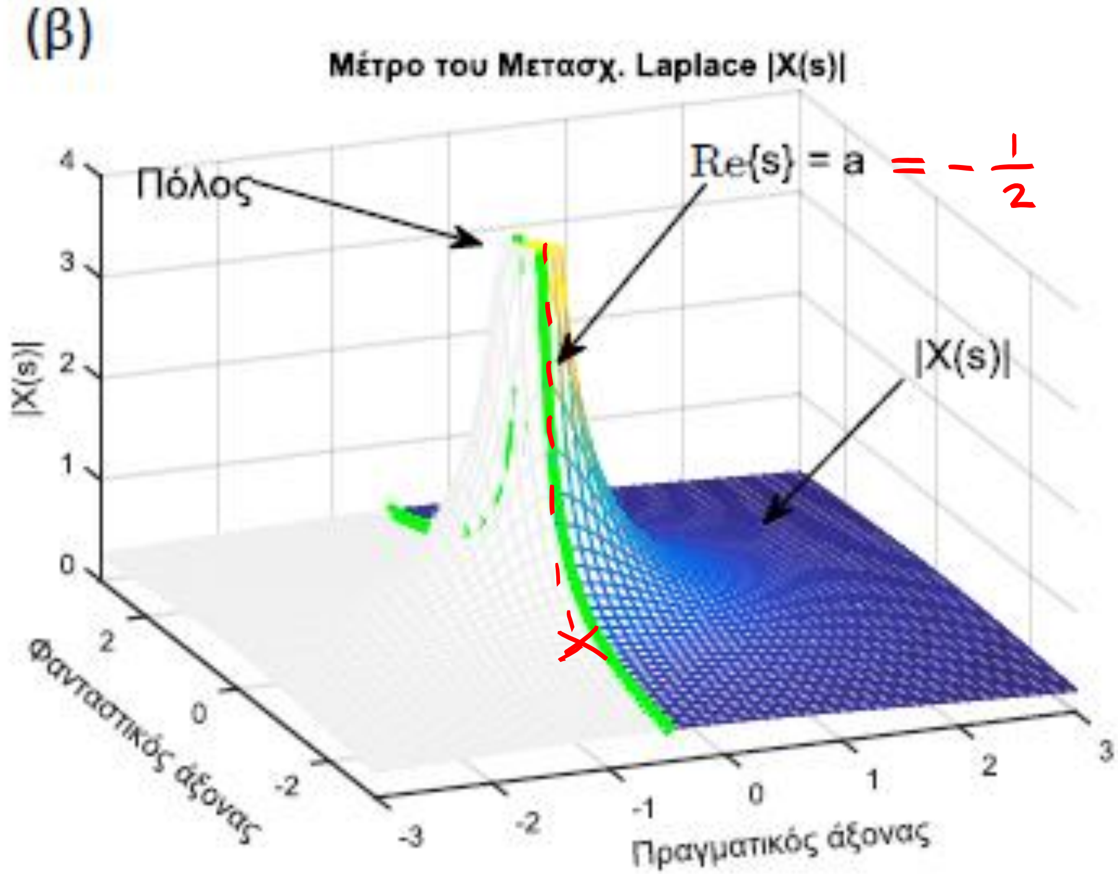




- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:

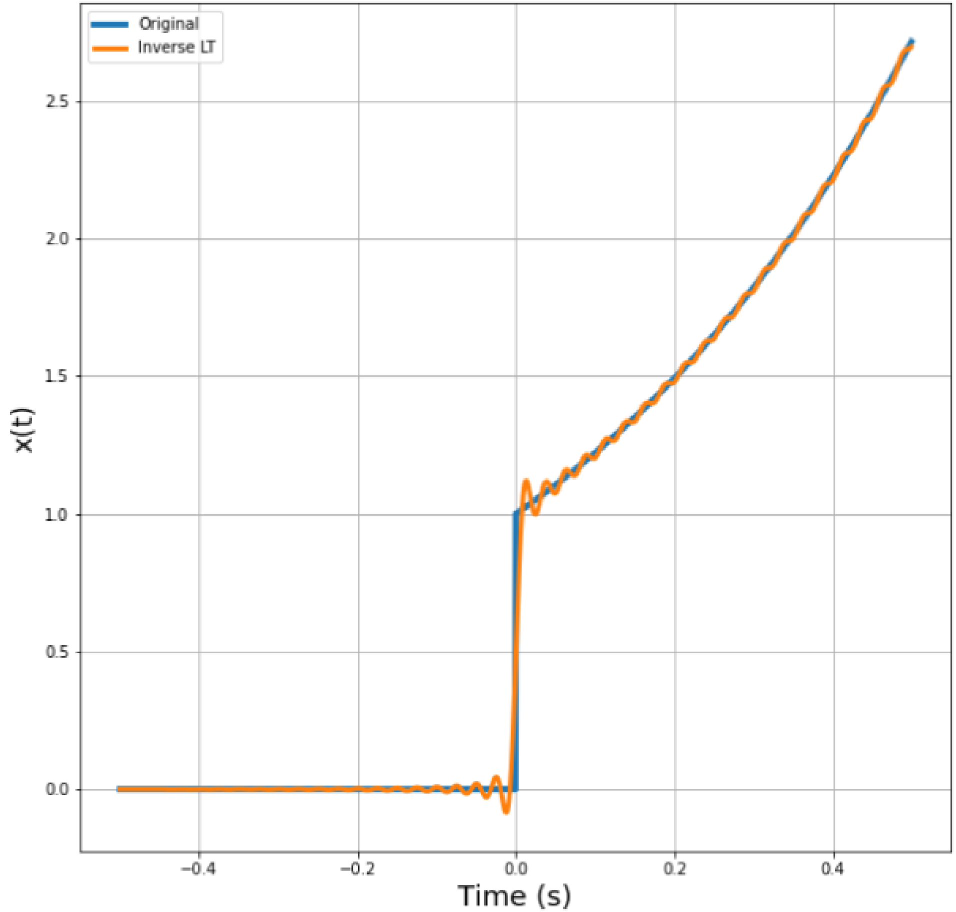
$x(t) = e^{-t/2}u(t)$, $s = -\frac{1}{2}$, πόλος
$\sigma > -\frac{1}{2}$, ROC $= R_x$



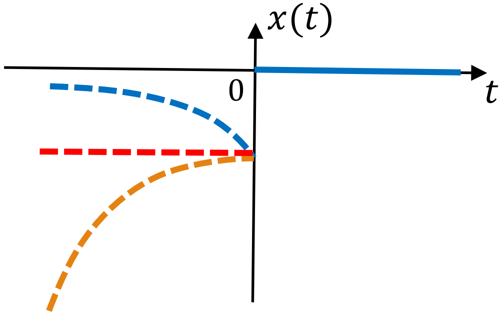


- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Κώδικας για $a = 2$:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


a = 2
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.001
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-1/2, 1/2, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-40, 40, df)
# Τιμή του σίγμα - μια από τις πολλές πιθανές
sigma = 4
# Σήμα στο χρόνο
x = np.concatenate((np.zeros(t[t<0].shape), np.exp(a*t[t>0])))
# Μετασχηματισμός Laplace για s = 2 + j2πf
X = 1 / (sigma - a + 1j*2*np.pi*f)
# Αρχικοποίηση
xinv = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Laplace
for i in range(1, len(f)):
    xinv = xinv + X[i]* np.exp((sigma + 1j*2*np.pi*f[i])*t)

# Κανονικοποίηση
xinv = df*xinv

# Γραφήμα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x, linewidth=4, label='Original')
plt.plot(t, xinv.real, linewidth=3, label='Inverse LT')
plt.grid()
plt.xlabel('Time (s)', fontsize = 18)
plt.ylabel('x(t)', fontsize = 18)
plt.legend()
```



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t), a \in \Re$



Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{at}u(-t)e^{-st}dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt = -\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{s-a}\left(\lim_{t\to-\infty} e^{(a-s)t} - 1\right) \quad (1)$$

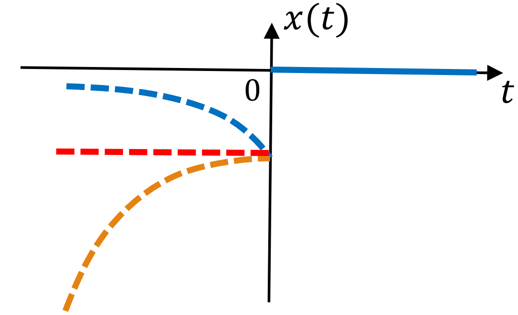
Είναι

$$\lim_{t\to-\infty} e^{at}\cdot e^{-\sigma t}\cdot e^{-j2\pi f t} = \lim_{t\to-\infty} e^{(a-\sigma)t}e^{-j2\pi f t} = 0, \text{ αν}$$

$$a-\sigma>0 \iff \boxed{\sigma < a}. \text{ Άρα } (1) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \ \sigma < a$$

• Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t), a \in \Re$



Βρήκαμε ότι

$$-e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma < a$$

ή

$$Re\{s\} < a$$

• $X(s) = \dfrac{1}{s-a}, \quad \sigma < a$

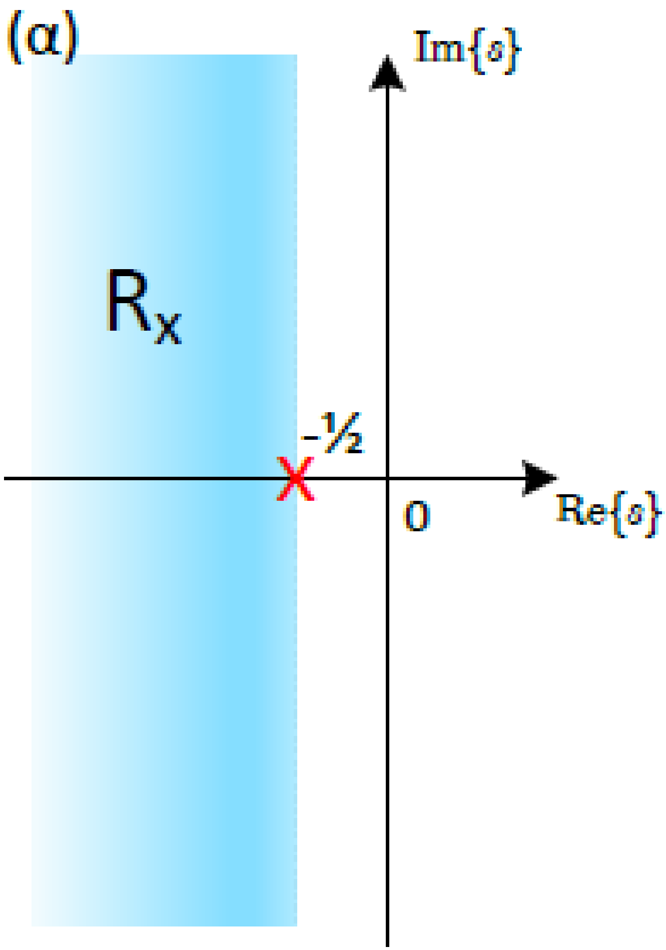
$\leadsto$ Πόλος : $s = a$, γιατί $X(a) = \infty$

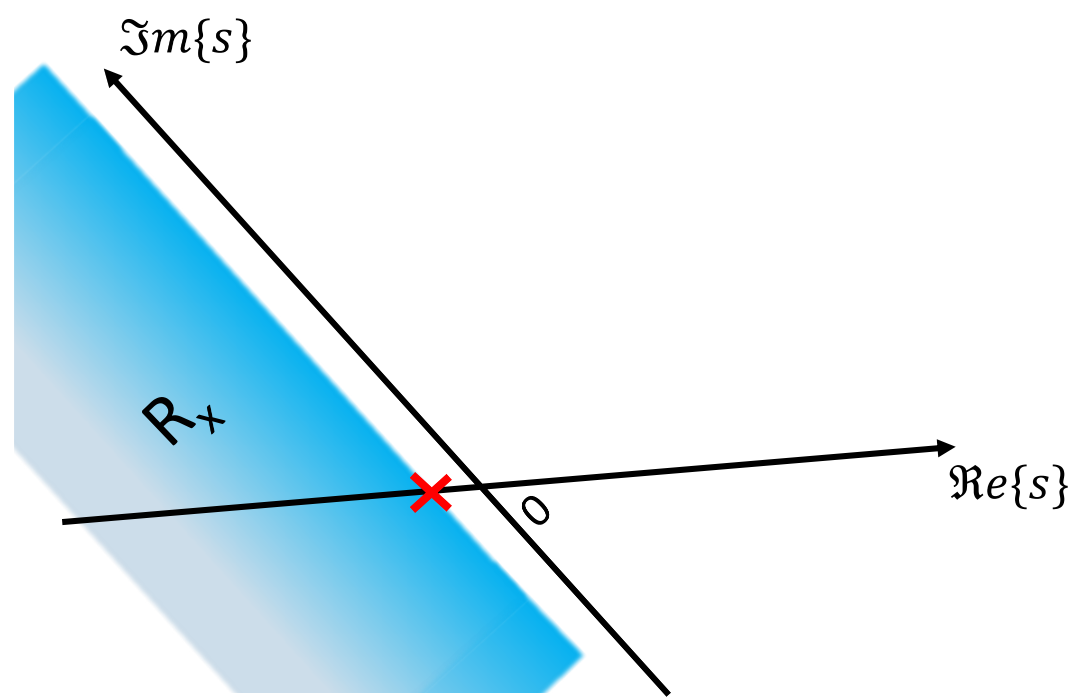
$\leadsto$ Μηδενικό : $s = \infty$, γιατί $X(\infty) = 0$

- Τιμές του s όπου $X(s) = 0$: **μηδενικά , O**
- Τιμές του s όπου $X(s) \to \infty$: **πόλοι , X**

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:

$x(t) = -e^{-t/2}u(-t)$, $s = -\frac{1}{2}$, πόλος
$\sigma < -\frac{1}{2}$, $ROC = R_x$

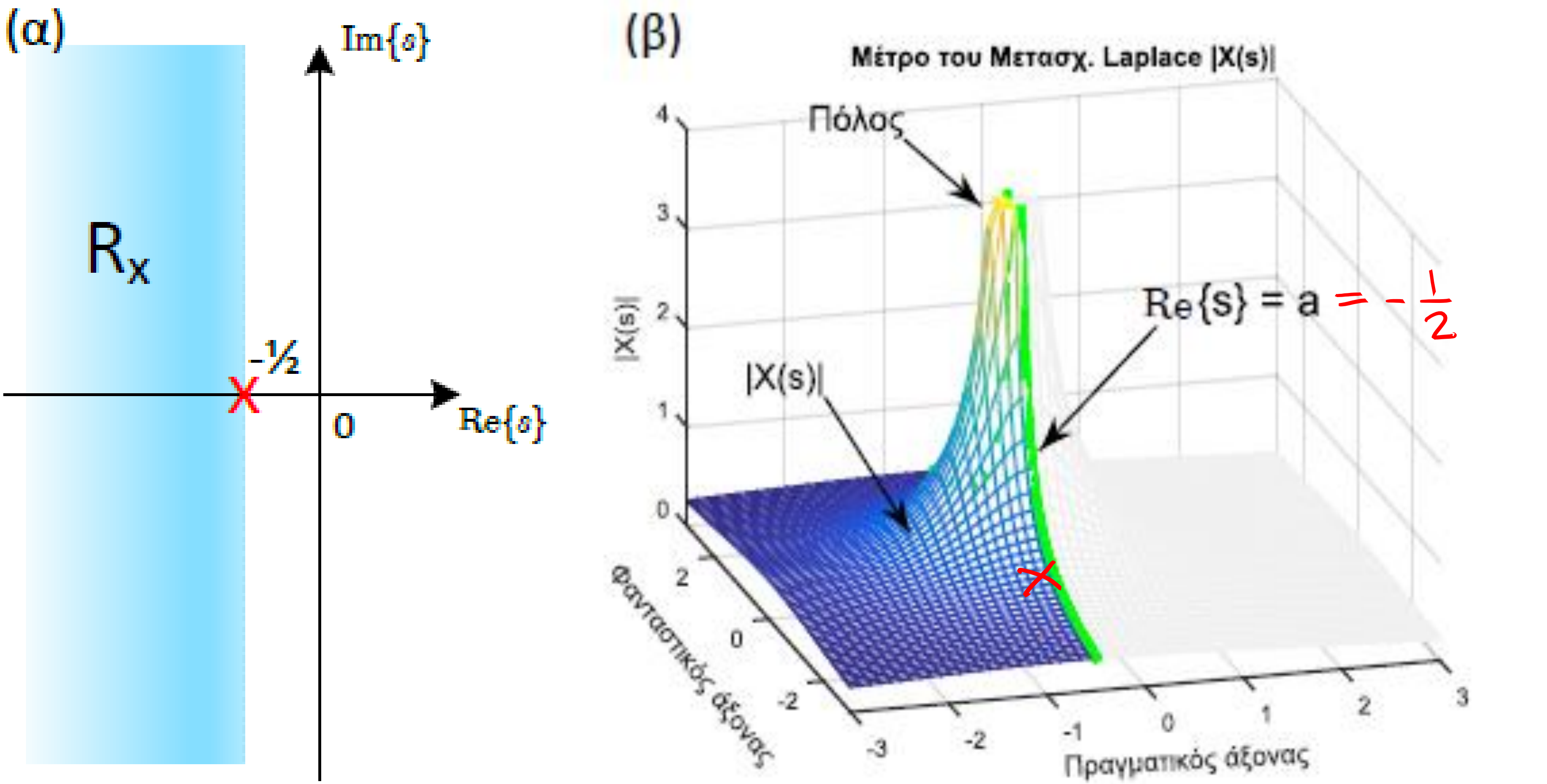




- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:

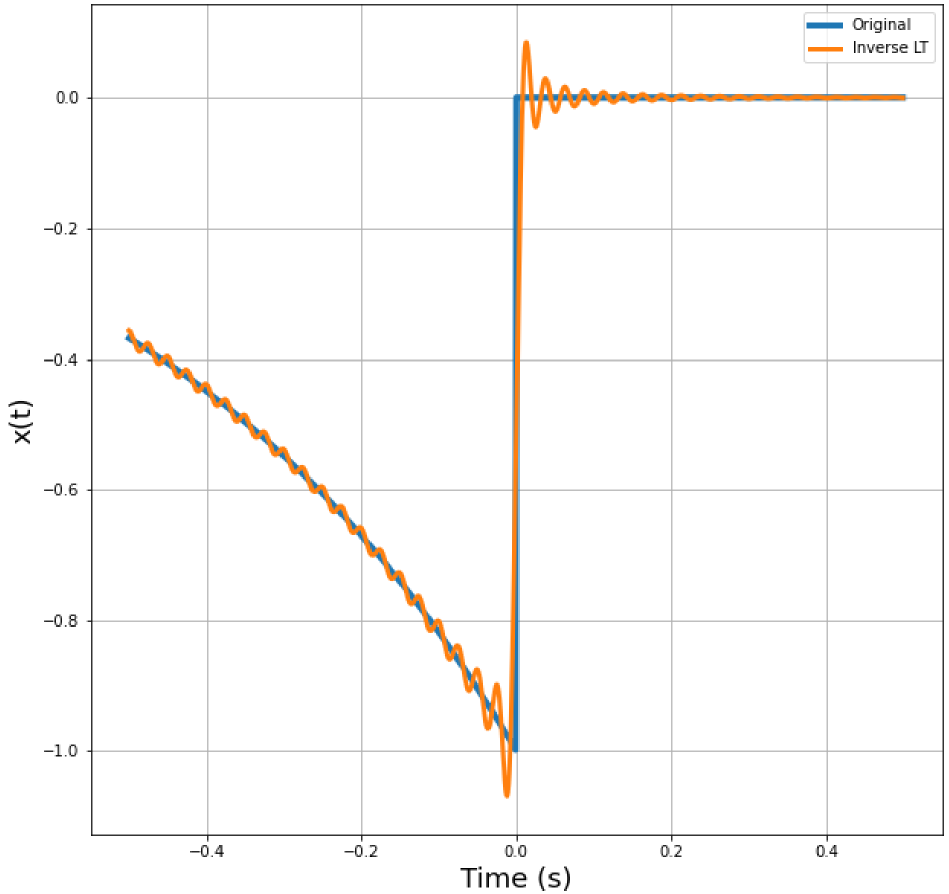
$x(t) = -e^{-t/2}u(-t)$, $s = -\frac{1}{2}$, πόλος

$\sigma < -\frac{1}{2}$, ROC$=R_x$

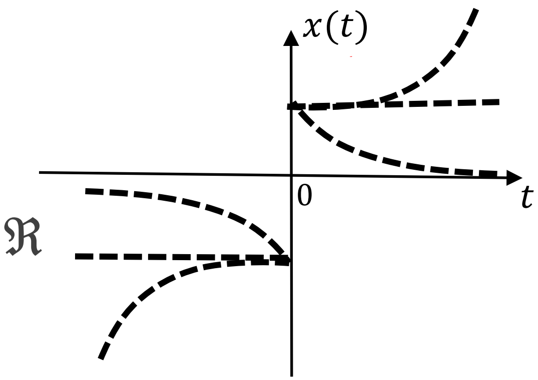


- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Κώδικας για $a = 2$:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


a = 2
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.001
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-1/2, 1/2, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-40, 40, df)
# Τιμή του σίγμα - μια από τις πολλές πιθανές
sigma = -3
# Σήμα στο χρόνο
x = np.concatenate((-np.exp(a*t[t<0]), np.zeros(t[t>0].shape)))
# Μετασχηματισμός Laplace για s = -1 + j2πf
X = 1 / (sigma - a + 1j*2*np.pi*f)
# Αρχικοποίηση
xinv = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Laplace
for i in range(1, len(f)):
    xinv = xinv + X[i]* np.exp((sigma + 1j*2*np.pi*f[i])*t)

# Κανονικοποίηση
xinv = df*xinv

# Γραφήμα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x, linewidth=4, label='Original')
plt.plot(t, xinv.real, linewidth=3, label='Inverse LT')
plt.grid()
plt.xlabel('Time (s)', fontsize = 18)
plt.ylabel('x(t)', fontsize = 18)
plt.legend()
```



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος



$$x(t) = \overbrace{e^{at}u(t)}^{x_1} \overbrace{-e^{bt}\,u(-t)}^{x_2}, \qquad a, b \in \Re$$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, e^{-st}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\, e^{-st}\, dt$$ (με βάση τα προηγ. slides)

$$= \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} = \frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)}$$

$\sigma > a \qquad \sigma < b$

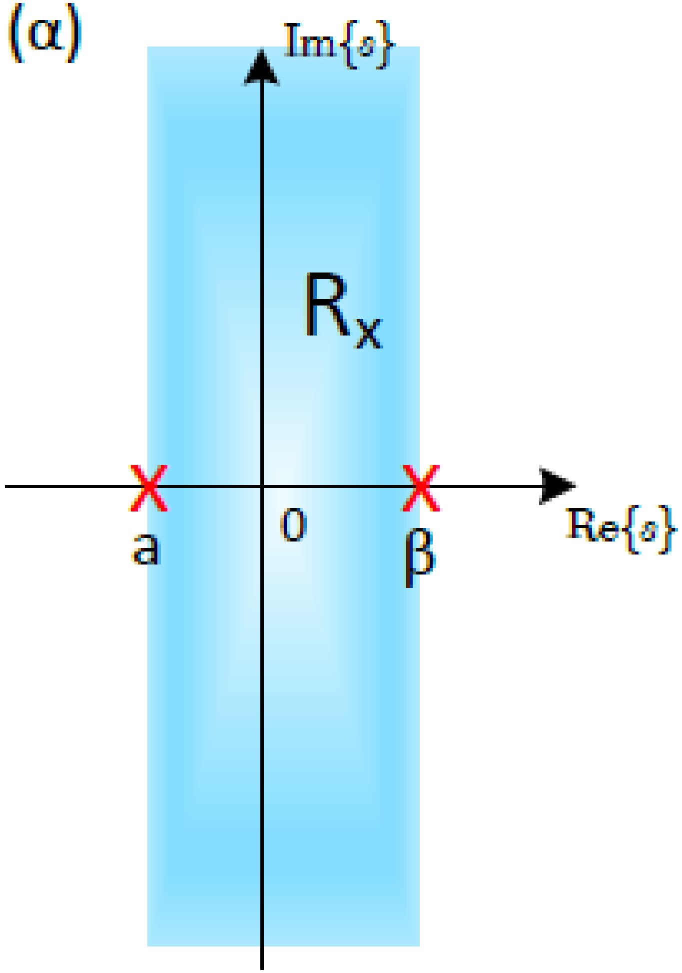
- Αν $a < b$, τότε $R_x : \{a < \sigma < b\}$
- Αν $a \geq b$, τότε $R_x : \{\varnothing\}$, κενό σύνολο

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: $a < b$

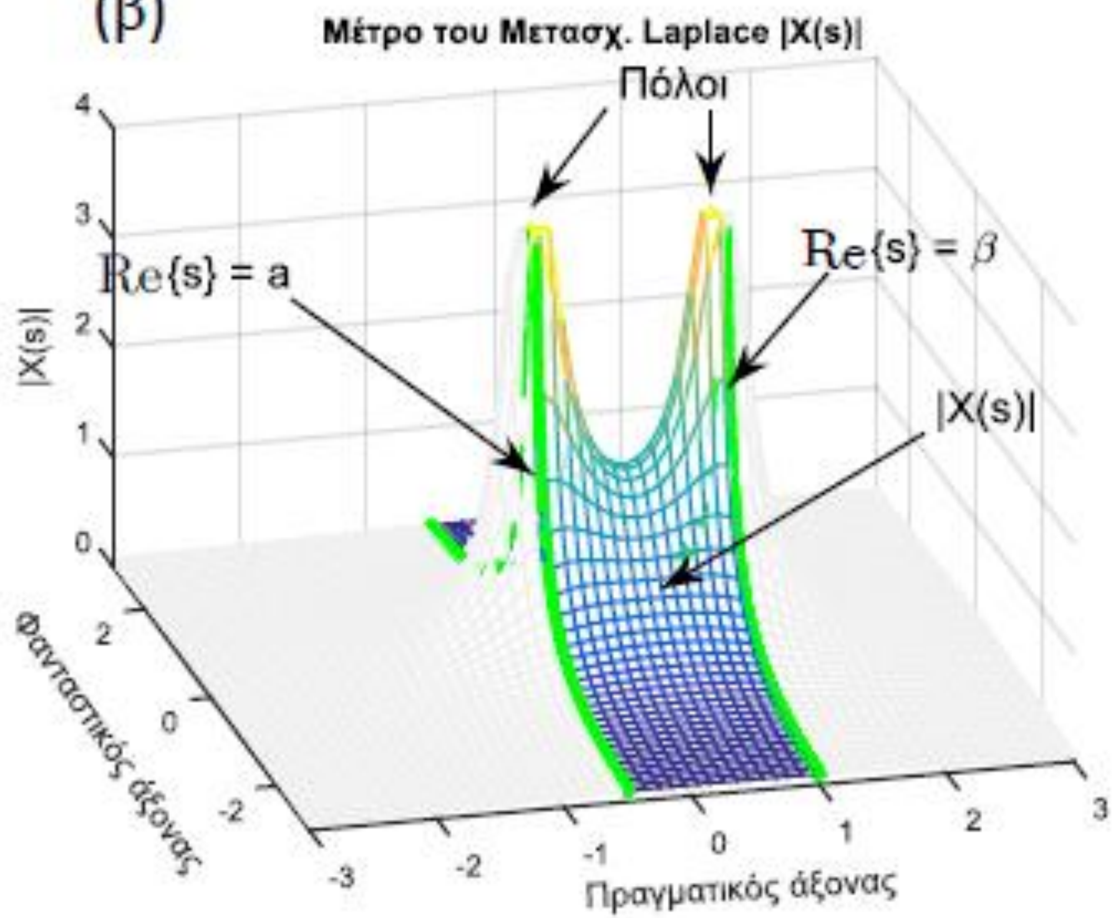
~ Πόλοι: $s = a$, $s = b$

~ Μηδενικά: $s = \frac{a+b}{2}$, $s = \infty$

(α)



(β)



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

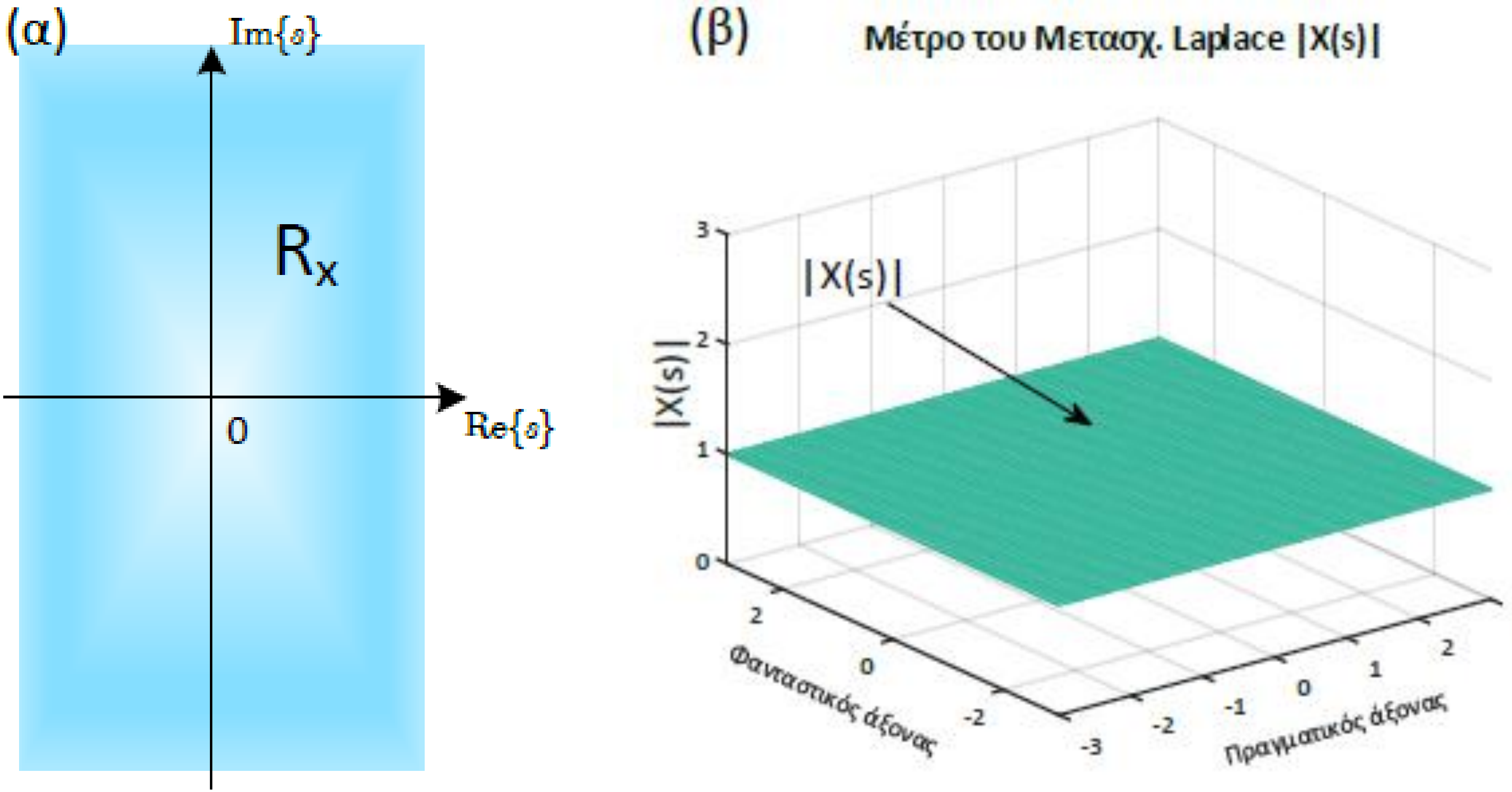
$$x(t) = \delta(t)$$

Είναι $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$

Άρα

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1 \ , \ \forall s$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παρατηρήσεις:

1. Το **πεδίο σύγκλισης** καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

- **Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης**
- Ιδιότητες:

1. Ένα **πεδίο σύγκλισης** δεν περιέχει **ΠΟΤΕ πόλους**!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
   a) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   b) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου αριστερά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   c) Μια λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
   d) Όλο το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f} = X(\sigma + j2\pi f)\Big|_{\sigma=0}$$

- Άρα ο Μετασχ. Fourier είναι μια «**υποπερίπτωση**» του μετασχ. Laplace?

- Άρα ο μετασχ. Laplace είναι μια «**γενίκευση**» του μετασχ. Fourier?

- Η αλήθεια είναι ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να προκύψει εκτιμώντας το μετασχ. Laplace επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. για $s = j2\pi f$

- Όπως και ότι μπορούμε – μερικές φορές – να πάρουμε το μετασχ. Laplace από το μετασχ. Fourier θέτοντας $j2\pi f = s$

- Όμως κάποια πράγματα θέλουν προσοχή… ☺

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- **1.** Για να γίνει η εκτίμηση

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

πρέπει το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace να περιέχει το φανταστικό άξονα

- **2.** Ακόμα κι αν δεν τον περιέχει, δε σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier δεν μπορεί να βρεθεί
  - Απλώς δεν υπολογίζεται μέσω του μετασχ. Laplace
  - Μπορεί να βρεθεί μέσω συναρτήσεων Δέλτα π.χ.

- **3.** Αν το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier συγκλίνει, τότε ο μετασχ. Laplace υπάρχει για κάποιο πεδίο σύγκλισης που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα και μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $j2\pi f = s$
  - Για παράδειγμα, όταν ο μετασχ. Fourier είναι ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$
  - Ενώ αν χρησιμοποιούμε γενικευμένες συναρτήσεις $\left(\pi.\chi.\, \delta(t)\right)$, η γενίκευση αυτή δε δουλεύει

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

- Βρήκαμε πριν ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{a + s}, \sigma > -a$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) = X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

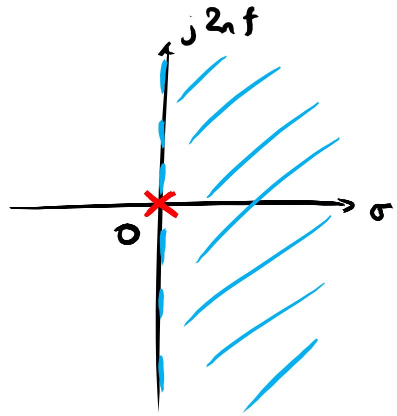
- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Αντίθετα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \qquad \sigma > 0$$



- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) \neq X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) \neq X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

- Ο λόγος είναι ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού δεν περιέχει το φανταστικό άξονα, αλλά και το ότι ο μετασχ. Fourier δεν προκύπτει από σύγκλιση του ορισμού
  - Χρειαζόμαστε γενικευμένη συνάρτηση για τη σύγκλιση

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- Πέρα όμως από τις τυπικές μαθηματικές σχέσεις, τι άλλο υπάρχει?
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$ για $a = 4$ και $a = 2$
- Προφανώς μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

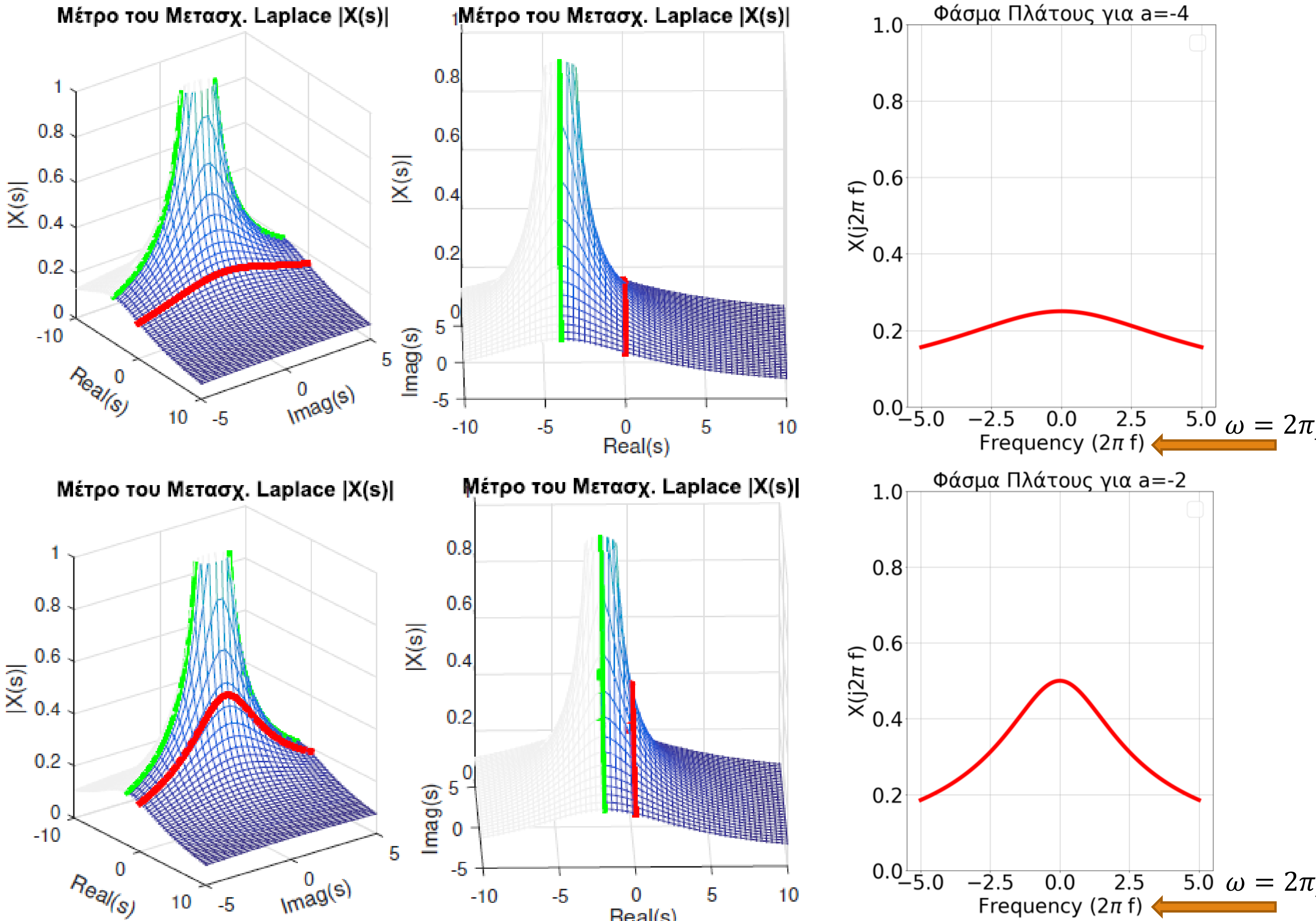
$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

και

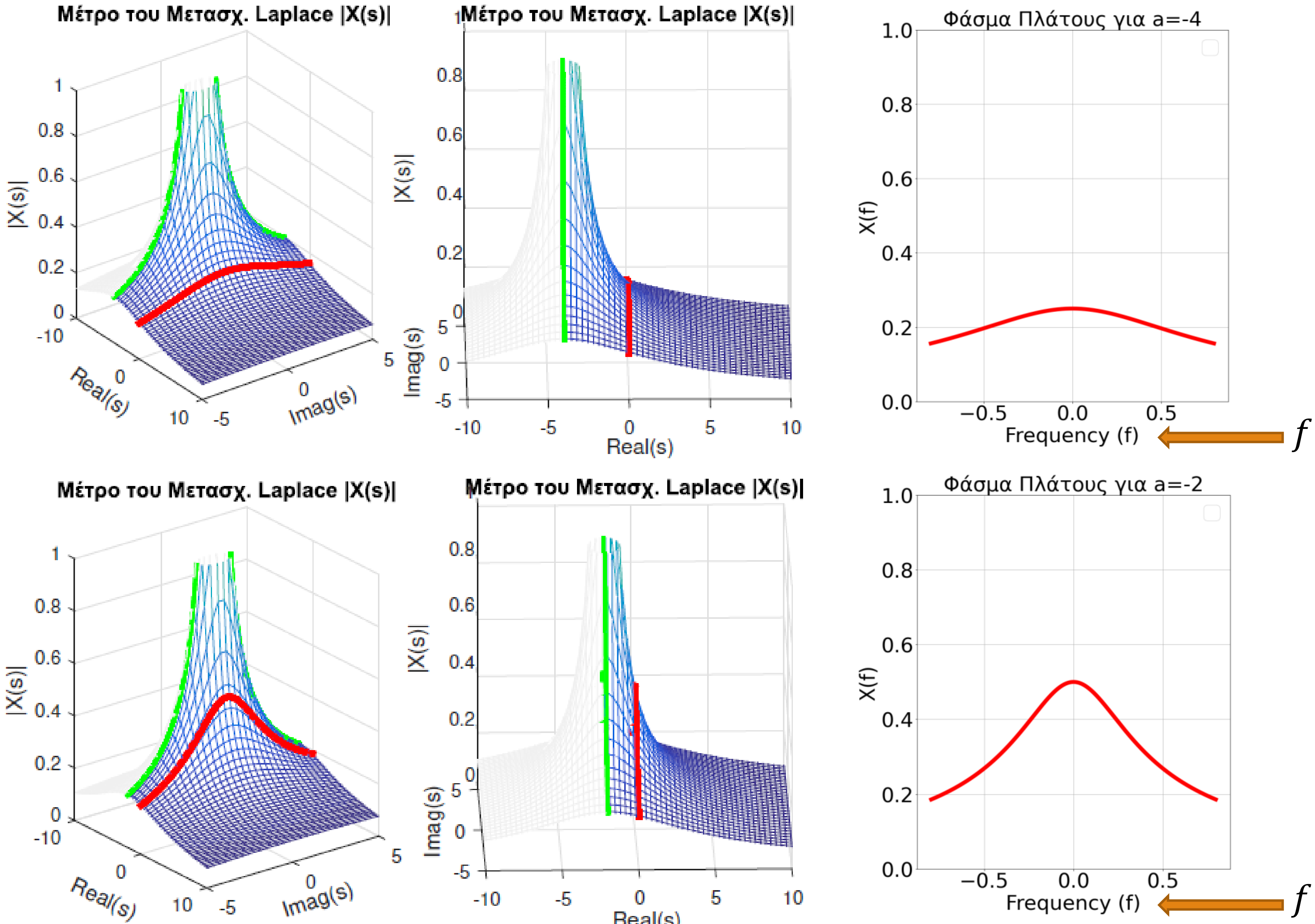
$$X(s) = \frac{1}{a + s} \Rightarrow |X(s)| = \frac{1}{\sqrt{(a+\sigma)^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

- Ας απεικονίσουμε τις δυο περιπτώσεις για τις διαφορετικές τιμές του a
- Προσέξτε ότι το $s = -a$ είναι ο πόλος του μετασχηματισμού Laplace!

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**



• Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier



- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Η προηγούμενη συζήτηση αποκαλύπτει την κύρια χρήση του μετασχ. Laplace: ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων!**
- Το προηγούμενο παράδειγμα μας υποδεικνύει ότι αν θέλουμε να «ενισχύσουμε» πολύ τις συχνότητες γύρω από το μηδέν, μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύστημα της μορφής

$$H(s) = \frac{A}{s+0.5}, \sigma > -0.5$$

- Το σύστημα αυτό θα έχει μετασχ. Fourier

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 0.5}$$

εφ' όσον το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα

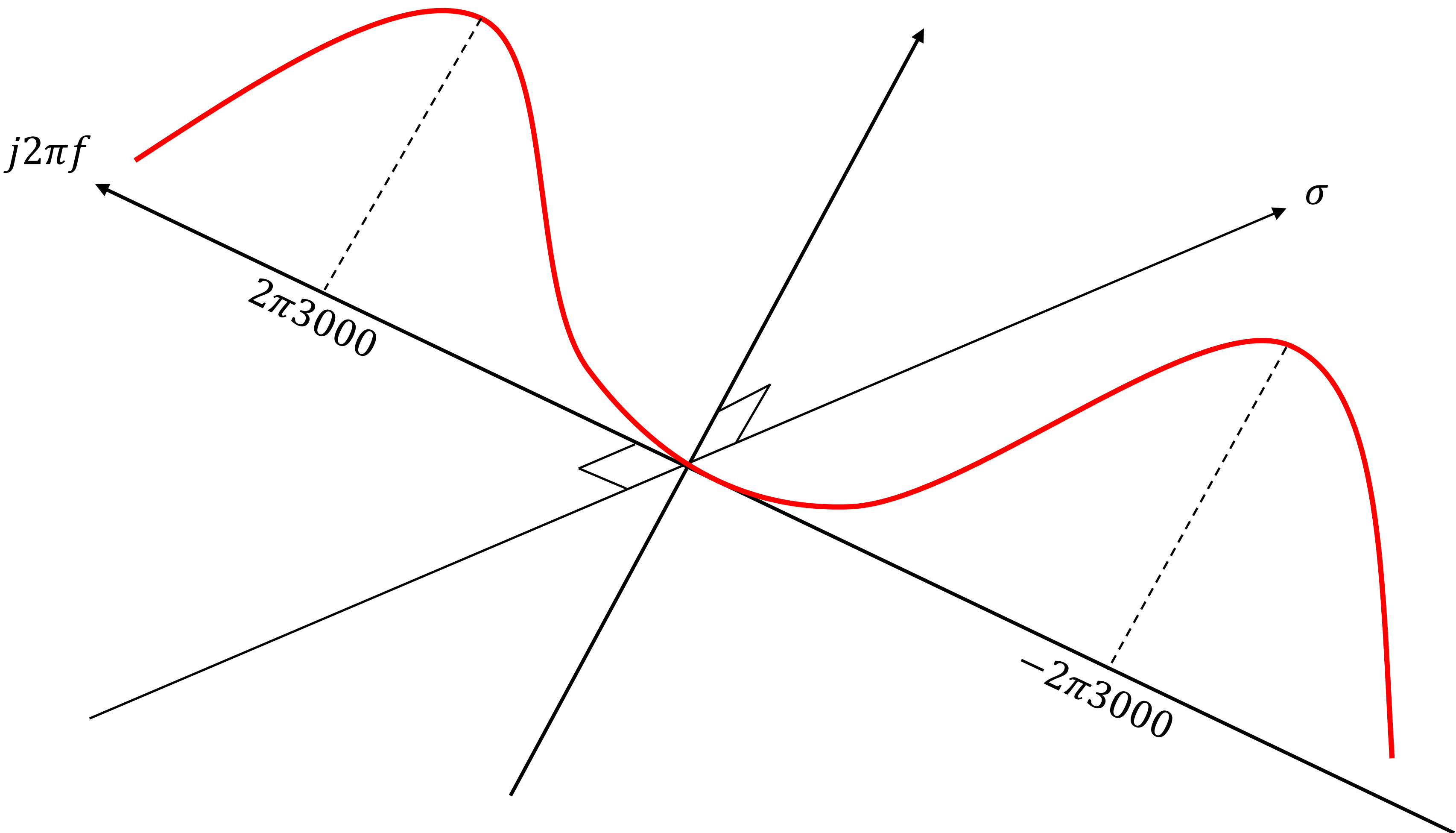
$$\sigma = 0$$

- Η κρουστική του απόκριση θα είναι λοιπόν

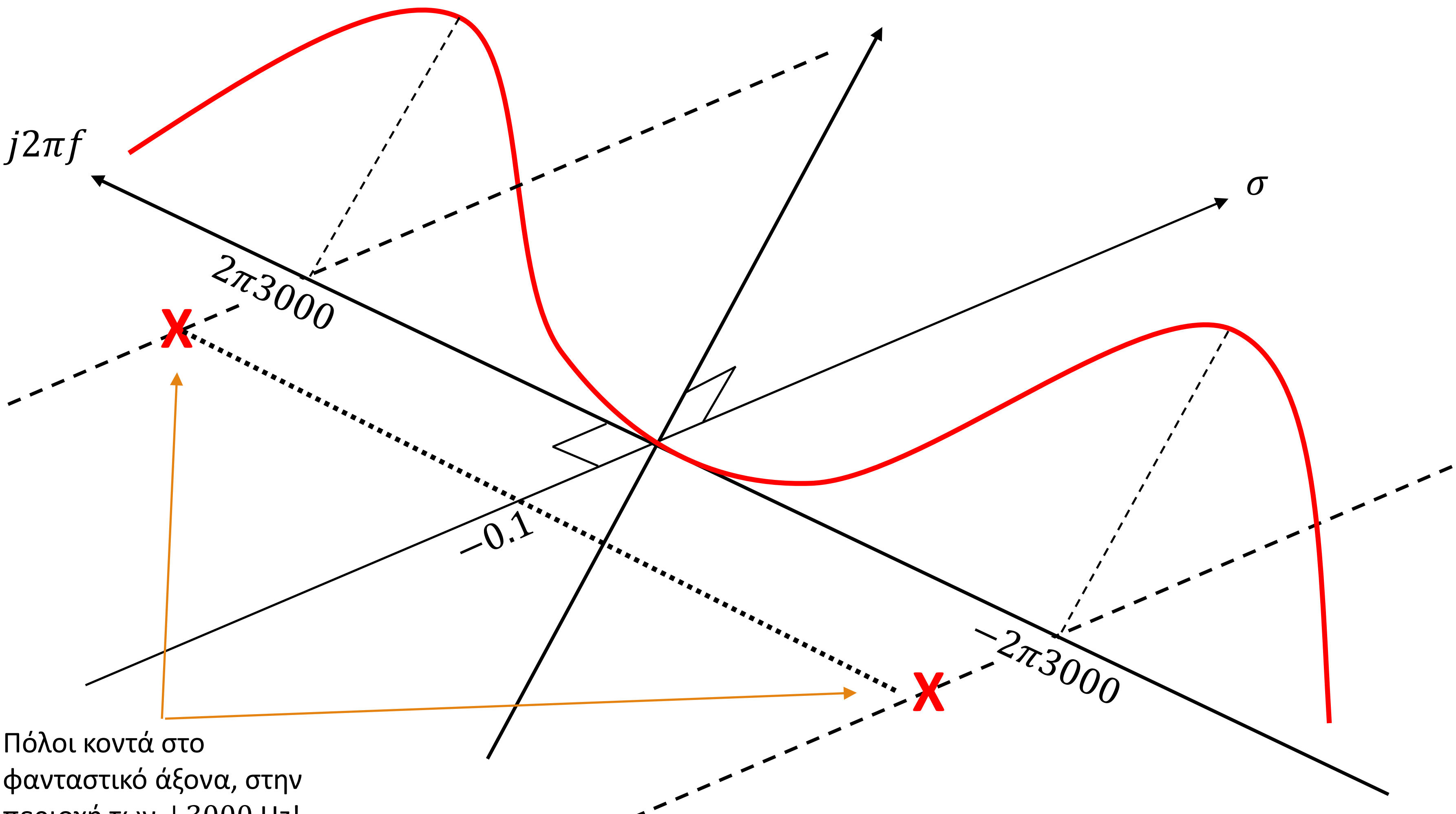
$$h(t) = Ae^{-0.5t}u(t)$$

- Αν κάνουμε συνέλιξη ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου (π.χ. ήχο) με την παραπάνω κρουστική απόκριση, οι συχνότητες γύρω από το μηδέν θα ενισχυθούν πολύ σε πλάτος!
  - Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται **χαμηλές**
  - Αντίστοιχα, όλες οι άλλες θα μείνουν περίπου ίδιες (κατά πλάτος) ή (ανάλογα το φίλτρο) θα μεταβληθούν κι αυτές αλλά πολύ λιγότερο σε σχέση με τις χαμηλές

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Κι αν θέλουμε ένα πραγματικό (άρα συζυγώς συμμετρικό ως προς f) φίλτρο που να ενισχύει πολύ τις συχνότητες γύρω από τα 3000 Hz?**



- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Κι αν θέλουμε ένα πραγματικό (άρα συζυγώς συμμετρικό ως προς f) φίλτρο που να ενισχύει πολύ τις συχνότητες γύρω από τα 3000 Hz?**



Πόλοι κοντά στο φανταστικό άξονα, στην περιοχή των ± 3000 Hz!

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Ποιό θα είναι το φίλτρο μας στην τελευταία περίπτωση?**
- Ο ένας πόλος θα αντιστοιχεί σε ένα σύστημα της μορφής

$$H_1(s) = \frac{A_1}{s + (-0.1 + j2\pi 3000)}, \sigma > -0.1$$

  και ο άλλος πόλος σε ένα σύστημα της μορφής

$$H_2(s) = \frac{A_2}{s + (-0.1 - j2\pi 3000)}, \sigma > -0.1$$

- Ο συνδυασμός σε σειρά των δυο συστημάτων θα δώσει το σύστημα

$$H(s) = \frac{A_1}{[s + (-0.1 + j2\pi 3000)]} \frac{A_2}{[s + (-0.1 - j2\pi 3000)]}, \sigma > -0.1$$

- Με λίγες πράξεις παίρνουμε

$$H(s) = \frac{A_1 A_2}{s^2 - 6s + 3.55\text{x}10^8}, \sigma > -0.1$$

- Σύντομα θα δούμε πως αντιστρέφουμε στο χρόνο ένα τέτοιο κλάσμα.... ☺
  - Στην πράξη, η παραπάνω μορφή μας είναι αρκετή για να υλοποιήσουμε το φίλτρο!!
  - Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με συστήματα στο χώρο του Laplace αργότερα...

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ