ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

REMINDER

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}}$, $\boldsymbol{A > 0}$, $\boldsymbol{\varphi \in (-\pi, \pi]}$ τότε η έξοδος θα είναι

$Ae^{j\varphi}\, e^{j2\pi f_0 t}$

ιδιοσυνάρτηση

$$\boldsymbol{y(t) = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} = H(f_0)x(t)}$$

με

ιδιοτιμή

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση** (frequency response)
- Αν

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε

- **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

REMINDER

- **Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου***

- **Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου***

- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$

- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$

- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

$$\boxed{\begin{aligned} |Y(f)| &= |X(f)||H(f)| \\ \phi_y(f) &= \phi_x(f) + \phi_h(f) \end{aligned}}$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**

- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

REMINDER

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο? Ναι, από την ιδιότητα ιδιοσυνάρτησης – ιδιοτιμής!

- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα **ιδιοσυναρτήσεων** του ΓΧΑ συστήματος! ☺

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(kf_0)||X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0))}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(kf_0)||X_k| \cos\left(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0)\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$4 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{2}{\pi}$ Hz

Η θεωρία προβλέπει ότι

$$y(t) = 3\cdot\underbrace{H(0)}_{1/3} + 2\underbrace{\left|H\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right|}_{1/5}\cdot\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} + \underbrace{\varphi_h\left(\tfrac{2}{\pi}\right)}_{-0.927\text{ rad}}\right)$$

Από τη διαφορική εξίσωση:

$$y'(t) + 3y(t) = x(t) \xleftrightarrow{F} j2\pi f\,Y(f) + 3Y(f) = X(f)$$

$$(j2\pi f + 3)\,Y(f) = X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}.$$

$$H(0) = \frac{1}{3}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Im}{Re}$$

Είναι $H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} \xrightarrow{f=\frac{2}{\pi}\,Hz} H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{3+j2\cancel{\pi}\frac{2}{\cancel{\pi}}} = \frac{1}{3+j4}$

Οπότε:

$$\left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| = \left|\frac{1}{3+j4}\right| = \frac{1}{|3+j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\varphi_H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \measuredangle \frac{1}{3+j4} = \measuredangle \frac{(3-j4)}{\underbrace{(3+j4)}_{z}\cdot\underbrace{(3-j4)}_{z^*}} = $$

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

$$= \measuredangle \frac{3-j4}{|3+j4|^2} = \measuredangle \frac{3-j4}{25}$$

$$= \measuredangle\left(\frac{3}{25} + j\frac{-4}{25}\right) \Longrightarrow \varphi_H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \tan^{-1}\frac{-\frac{4}{\cancel{25}}}{\frac{3}{\cancel{25}}} =$$

$= \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \simeq -0.927$ rad, επίσης $H(0) = \frac{1}{3}$.

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

- Άρα τελικά

$$y(t) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.927\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{5} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.927\right)$$

Δείτε στα επόμενα δυο slides πως θα λύναμε την άσκηση αυτή ΧΩΡΙΣ τη χρήση της ιδιότητας της ιδιοσυνάρτησης - ιδιοτιμής, μόνο με χρήση του μετασχ. Fourier.

(... don't try it home alone... :))

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα – με μετασχ. Fourier:

$$x(t) = \sum X_k e^{j2\pi k f_c t} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \sum X_k \delta(f - kf_c)$$

Είναι

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

$$X(f) = F\left\{ 3 + e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j4t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j4t} \right\}$$

$$4t = 2\pi \frac{2}{\pi} t$$

$$= 3\delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

Άρα

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

$$= \frac{1}{3 + j2\pi f} \left(3\delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right) \right)$$

$$= \left.\frac{3}{3 + j2\pi f}\right|_{f=0} \delta(f) + \left.\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{3 + j2\pi f}\right|_{f=\frac{2}{\pi}} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + \left.\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{3 + j2\pi f}\right|_{f=-\frac{2}{\pi}} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

ΕΒΑ

- Παράδειγμα – με μετασχ. Fourier:

$$= 1 \cdot \delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+j4} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3-j4} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\frac{1}{3+j4} \to \frac{1}{5} e^{-j0.927} \qquad \frac{1}{3-j4} \to \frac{1}{5} e^{j0.927}$$

$$= 1 \cdot \delta(f) + e^{j\left(\frac{\pi}{3} - 0.927\right)} \frac{1}{5} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\left(\frac{\pi}{3} - 0.927\right)} \frac{1}{5} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

Άρα (από πίνακες γνωστών ζευγών Μ.F.)

$$y(t) = 1 \, e^{j2\pi 0 t} + \underbrace{e^{j\left(\frac{\pi}{3} - 0.927\right)} \frac{1}{5} e^{j4t} + e^{-j\left(\frac{\pi}{3} - 0.927\right)} \frac{1}{5} e^{-j4t}}$$

$$= 1 + \frac{2}{5} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.927\right).$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} \delta(f - f_0)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο $\longleftrightarrow$ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

- Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Μεταφερόμαστε στο χώρο του Fourier:

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} \quad \text{: ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ}$$

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}$$

Άρα

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}\cdot\left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}\right)$$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{\Gamma}{3+j2\pi f}$$

Είναι :

$$A = Y(f)(1+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5+3j2\pi f}{\cancel{(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\cancel{(1+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-1}$$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5-3}{(2-1)(3-1)} = 1$$

$$B = Y(f)(2+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-2} = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)\cancel{(2+j2\pi f)}(3+j2\pi f)}\cancel{(2+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-2}$$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-2} = \frac{5-6}{(1-2)(3-2)} = 1$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$\Gamma = Y(f)(3+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-3} = -2$$

$$e^{-at}u(t),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Άρα

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{-2}{3+j2\pi f}$$

Οπότε

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t).$$

Δείτε ένα ακόμη παράδειγμα που ΔΕΝ κάναμε στο μάθημα.

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

  - Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, το οποίο παράγει την έξοδο $y(t) = (e^{-t} + e^{-4t})u(t)$. Βρείτε την είσοδο $x(t)$.

Είναι $$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{2}{2+j2\pi f}$$

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f}$$

$$= \frac{5+2j2\pi f}{(1+j2\pi f)(4+j2\pi f)}$$

Είναι $$Y(f) = X(f)H(f) \Longrightarrow X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)}$$

$$= \frac{\dfrac{5+2j2\pi f}{(1+j2\pi f)(4+j2\pi f)}}{\dfrac{2}{2+j2\pi f}} = \frac{(5+2j2\pi f)(2+j2\pi f)}{2(1+j2\pi f)(4+j2\pi f)}$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Θέτω $u = j2\pi f$, $X(u) = \frac{1}{2}\,\frac{(5+2u)(2+u)}{(1+u)(4+u)} = \frac{1}{2}\left[\frac{10+9u+2u^2}{u^2+5u+4}\right]$

Βαθμός (αριθμητή) = Βαθμός (παρονομαστή), άρα δεν μπορώ να κάνω ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Πρέπει να διαιρέσω τα πολυώνυμα

$$\begin{array}{r|l} 2u^2+9u+10 & u^2+5u+4 \\ \hline -(2u^2+10u+8) & 2 \\ \hline 0u^2-u+2 & \end{array} \rightsquigarrow 2 + \frac{2-u}{(1+u)(4+u)}$$

, άρα

$$X(u) = \frac{1}{2}\left(2 + \underbrace{\frac{2-u}{(1+u)(4+u)}}_{G(u)}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + G(u)\right)$$

→ ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα σε αυτόν τον όρο

$G(u) = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{4+u}$, με $A = G(u)(1+u)\Big|_{u=-1} = \frac{2-u}{4+u}\Big|_{u=-1} = 1$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

και $B = G(u)(4+u)\Big|_{u=-4} = \dfrac{2-u}{1+u}\Big|_{u=-4} = -2$

άρα $G(u) = \dfrac{1}{1+u} - \dfrac{2}{4+u} \rightsquigarrow G(f) = \dfrac{1}{1+j2\pi f} - \dfrac{2}{4+j2\pi f}$

Οπότε συνολικά

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{2}{4+j2\pi f}\right)$$

κι από πίνακες

$$x(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι το παραπάνω $x(t)$ δίνει το δοθέν $y(t)$ ως έξοδο από το σύστημα $h(t)$? :)

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για να επιτύχουμε όλα τα ωραία αποτελέσματα που βρήκαμε πριν, υποθέσαμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(f)$ ορίζεται
  - Το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης συγκλίνει

- Ισχύουν όλες οι γνωστές απαιτήσεις για την ύπαρξη της, όπως τις γνωρίσαμε στη μελέτη του Μετασχ. Fourier
  - Η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (μη αναγκαία συνθήκη)
  - Η κρουστική απόκριση να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη

- Αν δε γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση τότε μπορούμε να ξέρουμε αν το σύστημα που **εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις** έχει μετασχ. Fourier?

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Θυμηθείτε ότι, για ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα, μια τέτοια κρουστική απόκριση αποτελείται από όρους της μορφής

παράγωγος

$$\delta^{(n)}(t), \qquad c_i e^{\lambda_i t} u(t), \qquad c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη μόνον όταν δεν υπάρχουν παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα **και** όταν

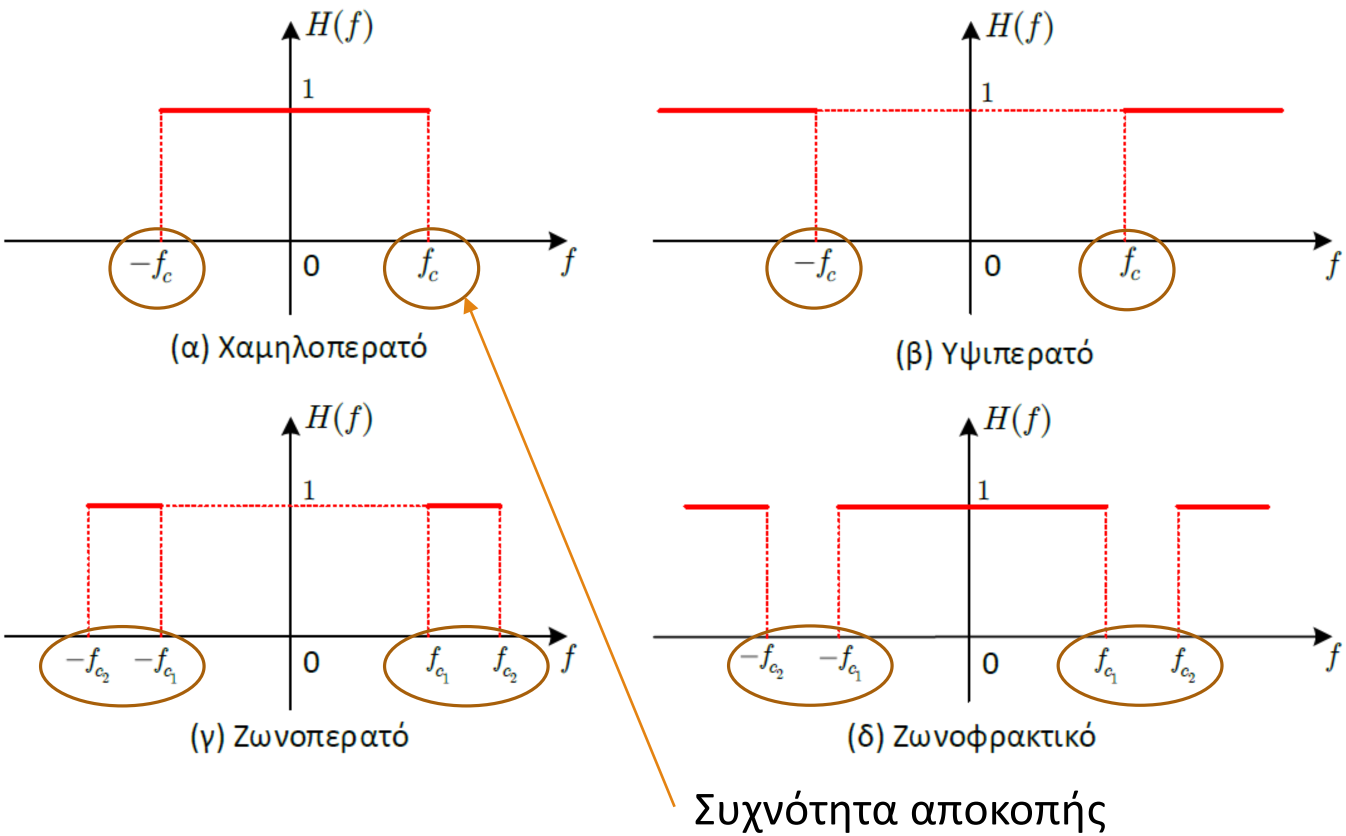
$$\lambda_i < 0 \text{ , αν } \lambda_i \in \Re$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές!

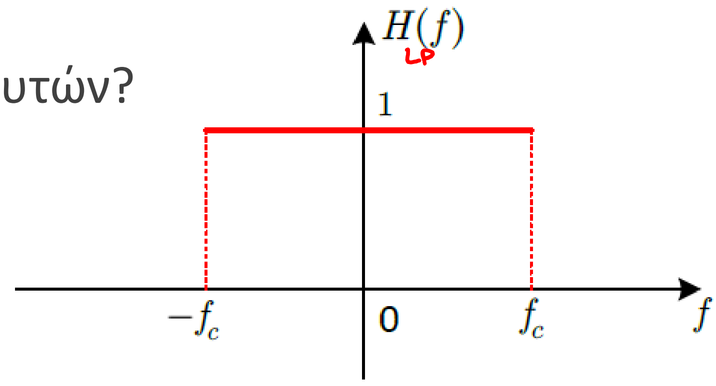
- Όμως αυτό θα σημαίνει ότι **υπάρχει** και ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης! ☺

- Συνοψίζοντας: ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις μπορεί να γραφεί στο χώρο του Μετασχ. Fourier αν και μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές!
  - Θα εξετάσουμε μη αιτιατά συστήματα αργότερα

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
- Θα μελετήσουμε τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (<u>μηδενικής φάσης</u>)
  - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)
- Τέσσερις κατηγορίες
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο**
- **Υψιπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο**



- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο



(α) Χαμηλοπερατό

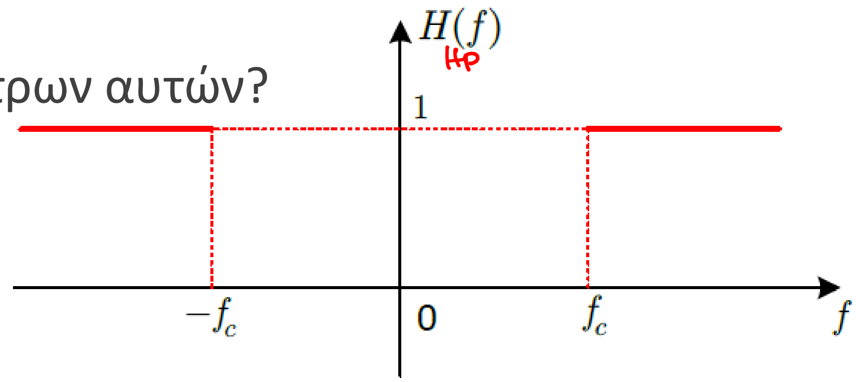
$$H_{LP}(f) = 1 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$h_{LP}(t) = 2f_c \cdot \mathrm{sinc}(2f_c t)$$

Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το υψιπερατό φίλτρο



(β) Υψιπερατό

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f)$$

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \cdot \mathrm{sinc}(2f_c \cdot t)$$

Κρουστική απόκριση

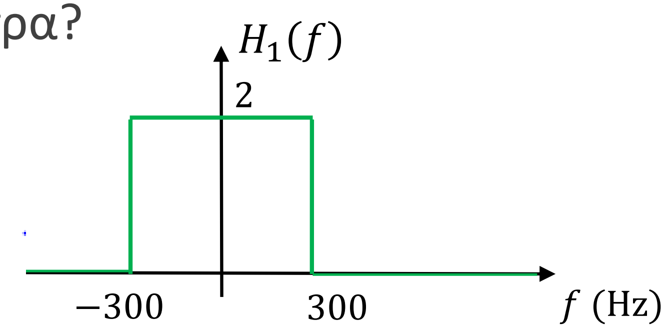
- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

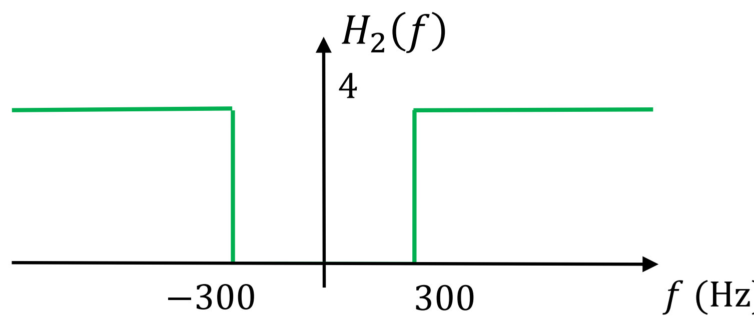
- **Παράδειγμα**:

  - Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

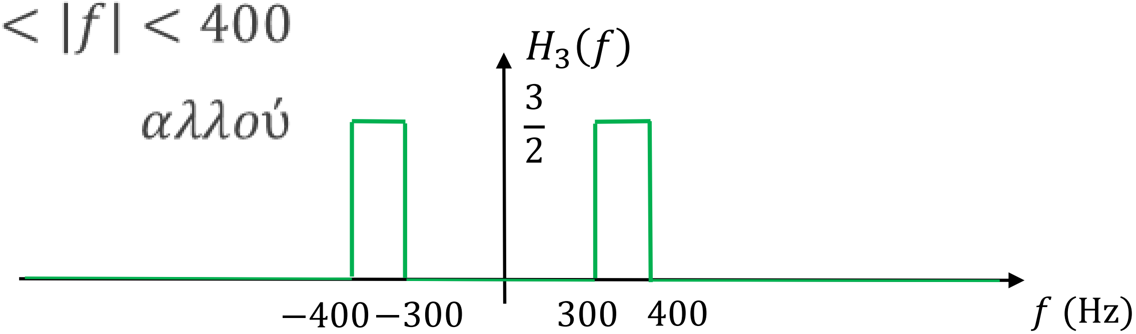
    - $$H(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 300 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



    - $$H(f) = \begin{cases} 4, & |f| > 300 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



    - $$H(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 300 < |f| < 400 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



$\measuredangle H_i(f) = 0$

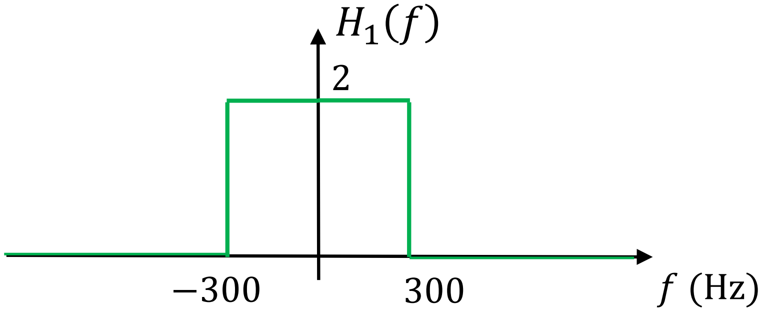
Όλα είναι μηδενικής φάσης, άρα δεν "πειράζαμε" τη φάση της εισόδου

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$H_1(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 300 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



- Η έξοδος θα είναι $y_1(t) = 1 \cdot H_1(0) + 2|H_1(200)| \cdot \cos(2\pi 200t) + |H_1(500)| \cdot \sin(2\pi 500t)$

και $H_1(0) = 2$, $H_1(200) = 2$, $H_1(500) = 0$, άρα

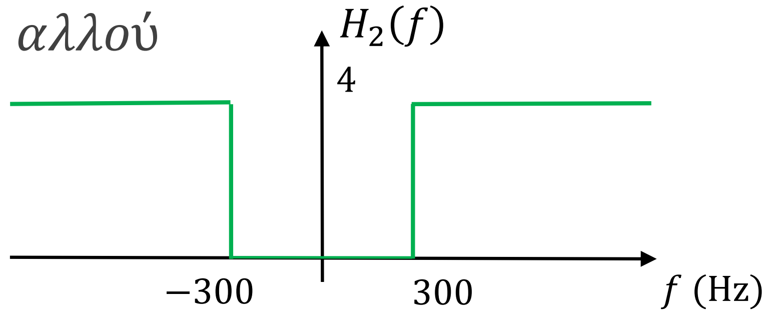
$$y_1(t) = 2 + 4\cos(2\pi 200t)$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**:

  - Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$H_2(f) = \begin{cases} 4, & |f| > 300 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



- Η έξοδος θα είναι $y_2(t) = 1 \cdot H_2(0) + 2|H_2(200)| \cos(2\pi 200t) +$
$+ |H_2(500)| \cdot \sin(2\pi 500t)$

και $H_2(0) = 0$, $H_2(200) = 0$, $H_2(500) = 4$, άρα

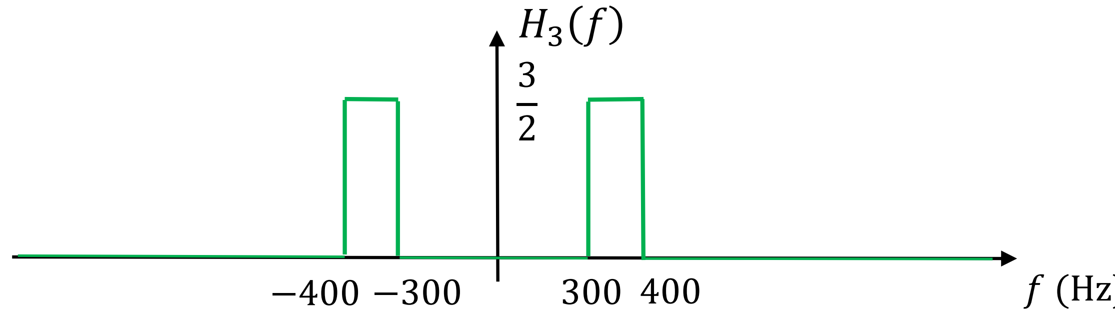
$$y_2(t) = 4\sin(2\pi 500t)$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**:

  - Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$H_3(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 300 < |f| < 400 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



- Όμοια, για το $H_3(f)$, $H_3(0) = H_3(200) = H_3(500) = 0$, άρα

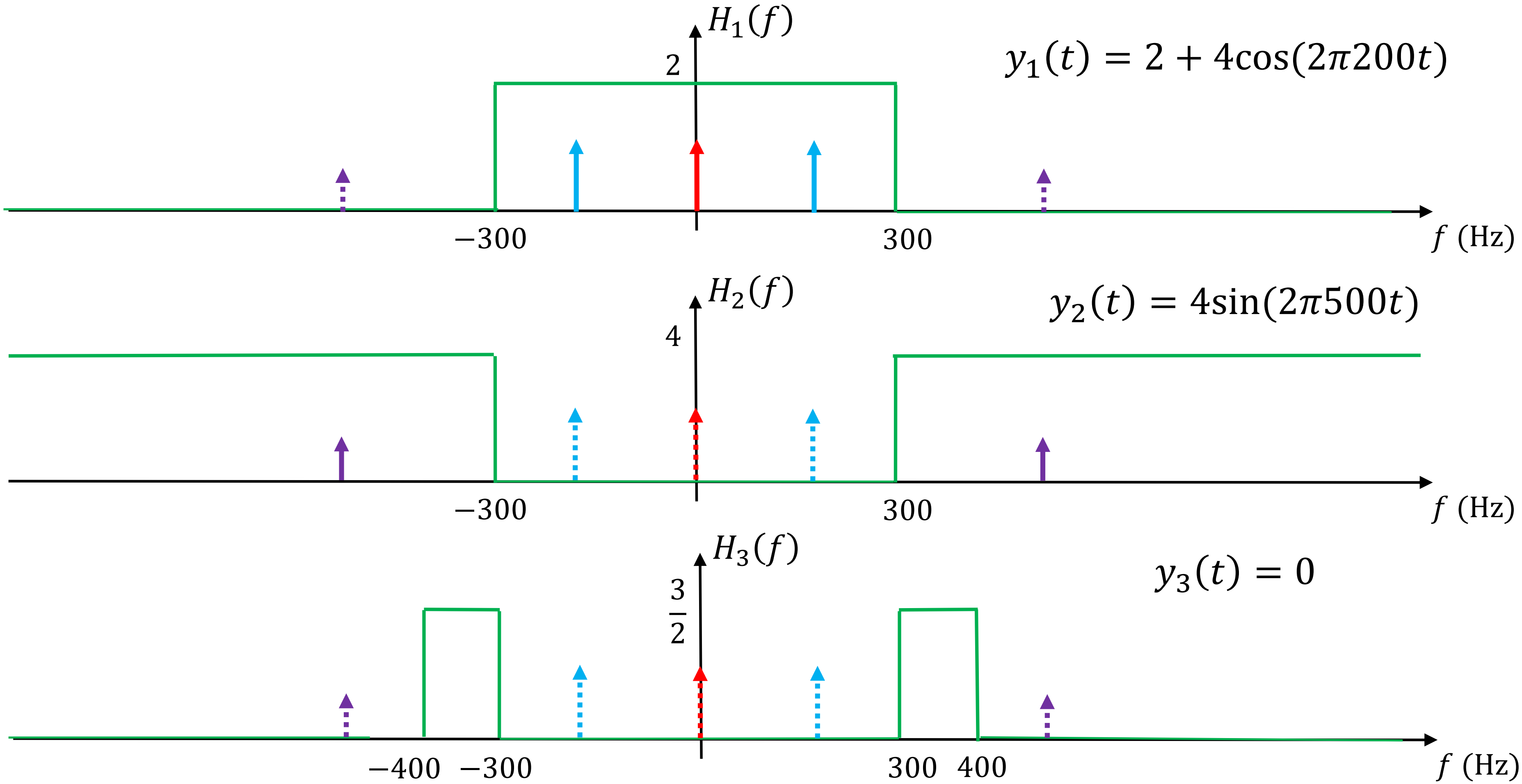
$$y_3(t) = 0$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**:

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$

$$x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ