ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

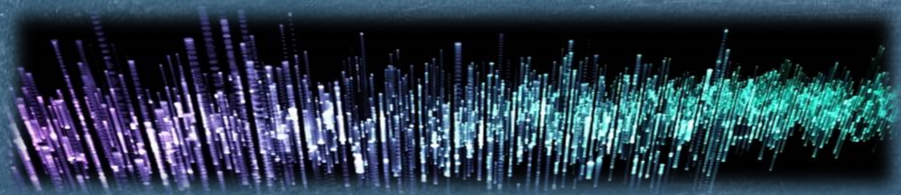
Τι περιέχει το ΗΥ215?

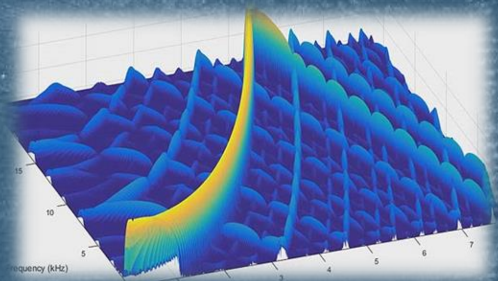
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες





- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$

- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού

- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση** (frequency response)
- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

○ **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$

○ **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου*

- Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου*

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

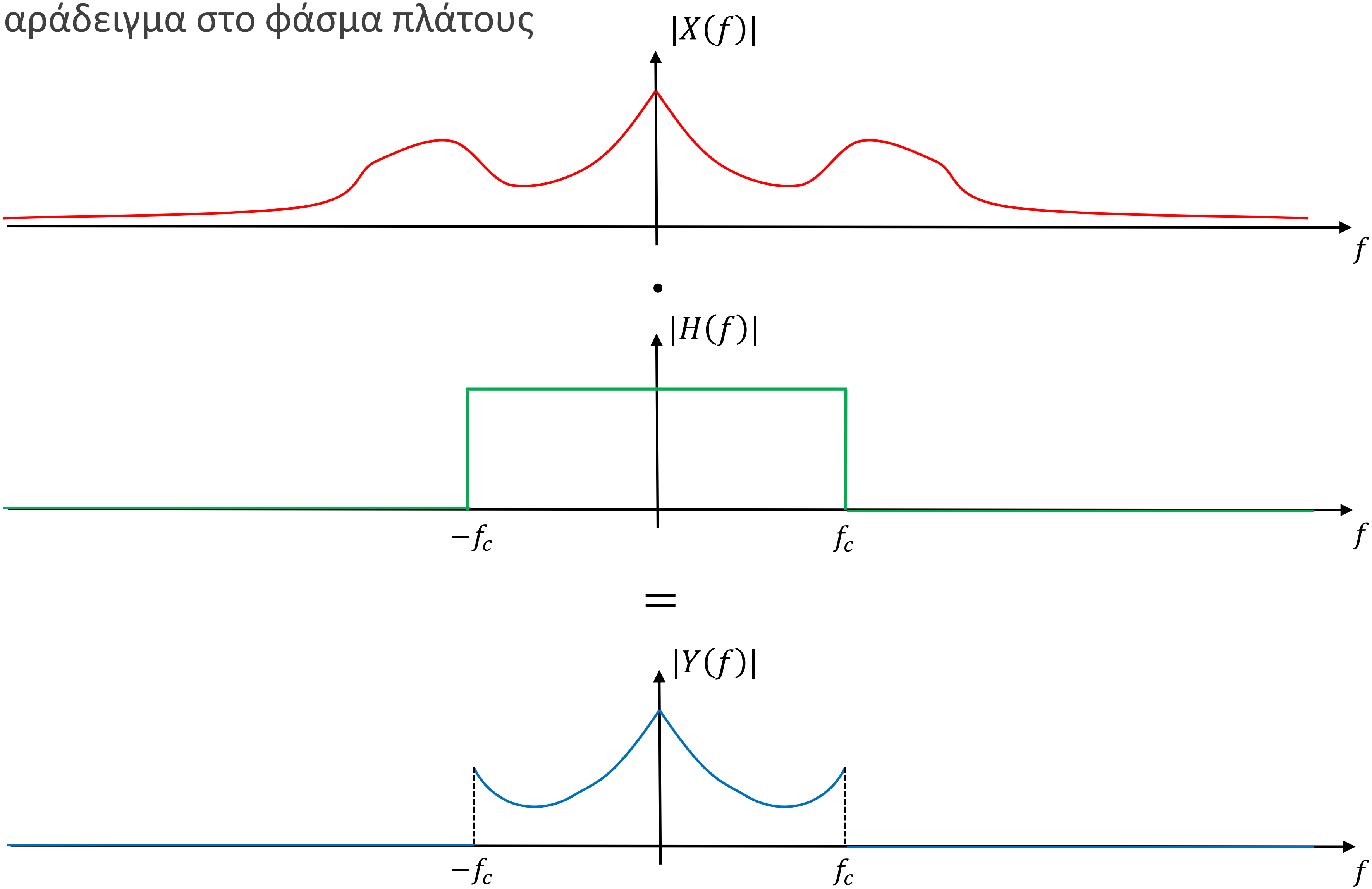
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

$$\boxed{\begin{aligned} |Y(f)| &= |X(f)||H(f)| \\ \phi_y(f) &= \phi_x(f) + \phi_h(f) \end{aligned}}$$

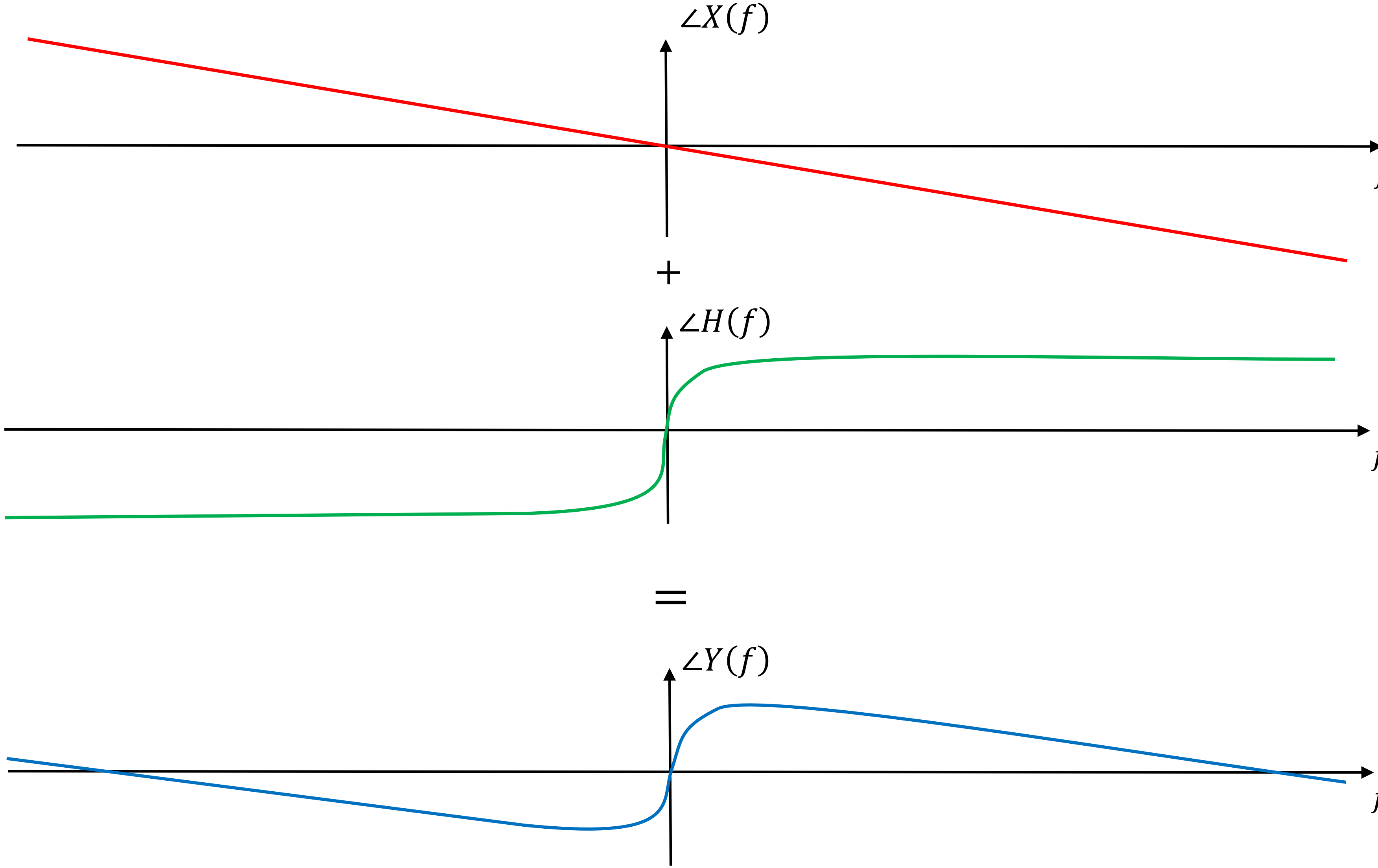
- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n X(f)$$

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$F\left\{\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t)\right\} = F\left\{3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)\right\}$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

$$j2\pi f Y(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6j2\pi f X(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f} = -6 + \frac{15}{2 + j2\pi f} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} 3 - 6j2\pi f & 2 + j2\pi f \\ \hline +12 + 6j2\pi f & -6 \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$\Rightarrow h(t) = 15 \cdot e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Συνεχίζεται... ☺