ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

- Μετασχηματισμός Fourier – Ιδιότητες
- Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\|=\|X(-f)\|, \\ \phi_x(f)=-\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t)=x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Re$
Περιττό σήμα	$x(t)=-x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t)=\mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t)=\mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}\|X(f)\|^2df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = ax(t) + by(t)$

Είναι $$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

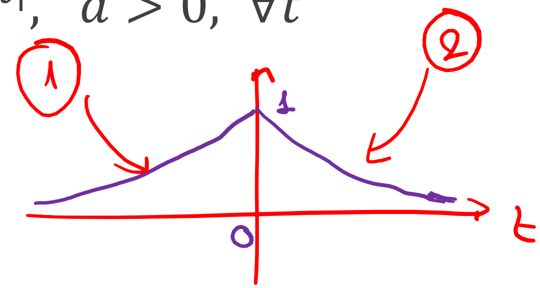
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(ax(t) + by(t) \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt + b\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= aX(f) + bY(f).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|},\ \ a > 0,\ \ \forall t$



Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f}\Big(1 - \lim_{t\to-\infty} \cancel{e^{(a-j2\pi f)t}}^{\,0}\Big) + \frac{1}{-(a+j2\pi f)}\Big(\lim_{t\to+\infty} \cancel{e^{-(a+j2\pi f)t}}^{\,0} - 1\Big)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}, \;\; a > 0, \;\; \forall t$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f}(1-0) + \frac{1}{-(a+j2\pi f)}(0-1)$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a+j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2} + \frac{a-j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2}$$

$$= \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}, \quad a>0.$$

Άρα

$$e^{-a|t|}, \; a>0 \;\; \overset{F}{\longleftrightarrow} \;\; \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(t-t_0)$

Είναι

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{u}) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+t_0)} du$$

$$u = t - t_0 \Rightarrow du = dt$$

$$u_1 = -\infty \ , \ u_2 = +\infty$$

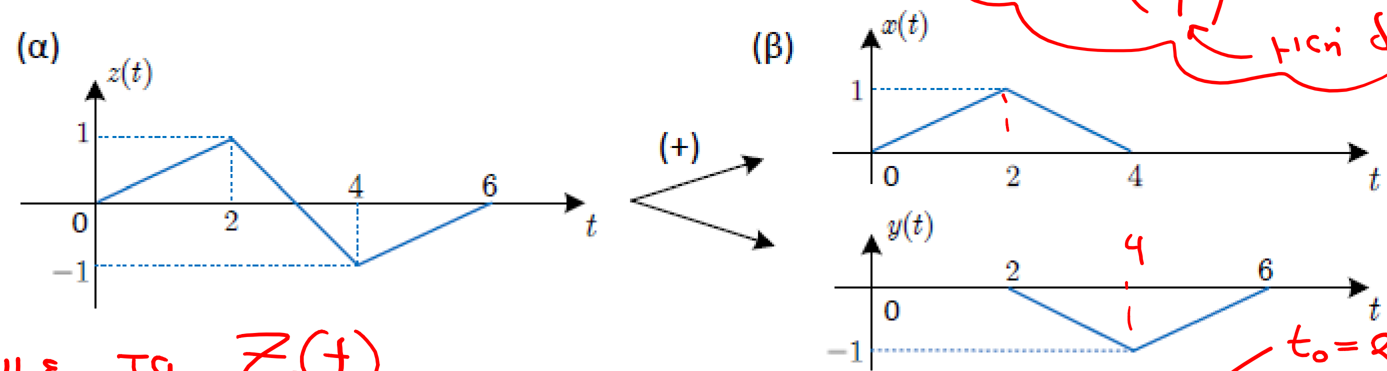
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f t_0} e^{-j2\pi f u} du = e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du}_{X(f)}$$

$$= X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

T: μισή διάρκεια του τριγ. παλμού



Θέλουμε το $Z(f)$.

Είναι $X(f) = F\{x(t)\} = 1\cdot 2\cdot \mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{-j2\pi 2f}$ ($t_0=2$)

$Y(f) = F\{y(t)\} = -1\cdot 2\cdot \mathrm{sinc}^2(2f)\cdot e^{-j2\pi 4f}$ ($t_0=4$)

Άρα

$$Z(f) = X(f) + Y(f)$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\left(e^{-j2\pi 2f} - e^{-j2\pi 4f}\right)$$

(κοινός παράγοντας το $e^{-j2\pi 3f}$, και πράξεις (Euler κλπ)) ...

$$= j4\,\mathrm{sinc}^2(2f)\cdot \sin(2\pi f)\cdot e^{-j6\pi f}$$ ← ΔΕΙΞΤΕ ΤΟ !!

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

Είναι $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt$

$= X(f-f_0)$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

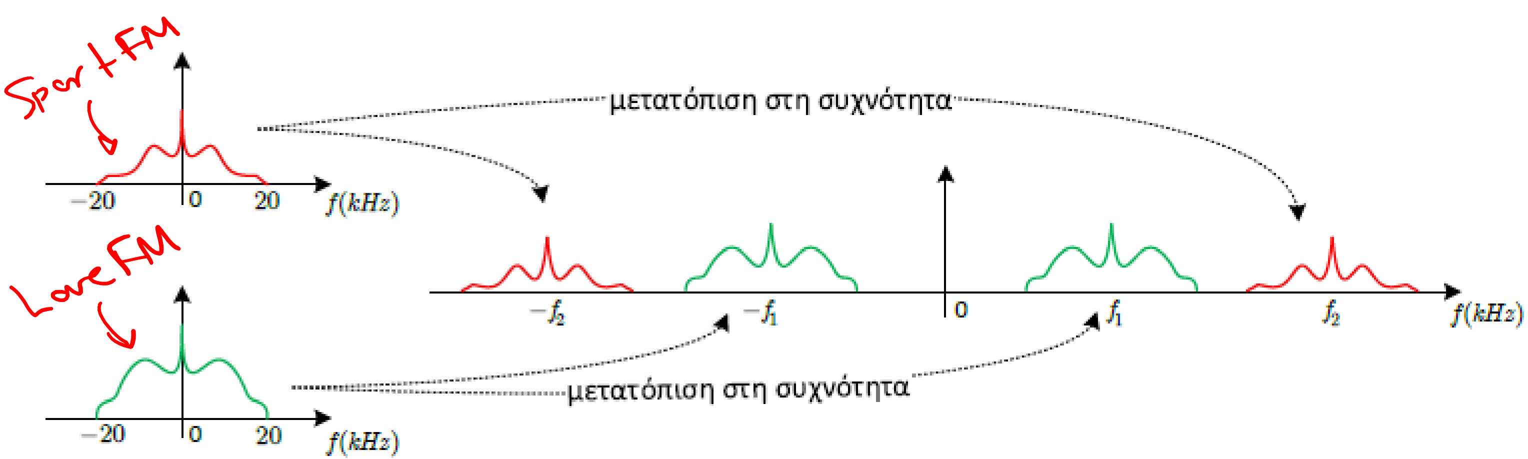
Είναι

$$y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$= x(t)\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

$$= \underbrace{x(t)e^{j2\pi f_0 t}}_{X(f-f_0)} + \underbrace{x(t)e^{-j2\pi f_0 t}}_{X(f+f_0)} \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f) =$$

$$= X(f-f_0) + X(f+f_0)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Ε.ΒΑ.

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(at)$, $a>0$.

Είναι $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{at}_{u=at}) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f\frac{u}{a}} \frac{du}{a}$

$u = at \Rightarrow du = a\,dt \rightarrow dt = \frac{du}{a}$

$u_1 = -\infty$, $u_2 = +\infty$

$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi\left(\frac{f}{a}\right)u} du = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$

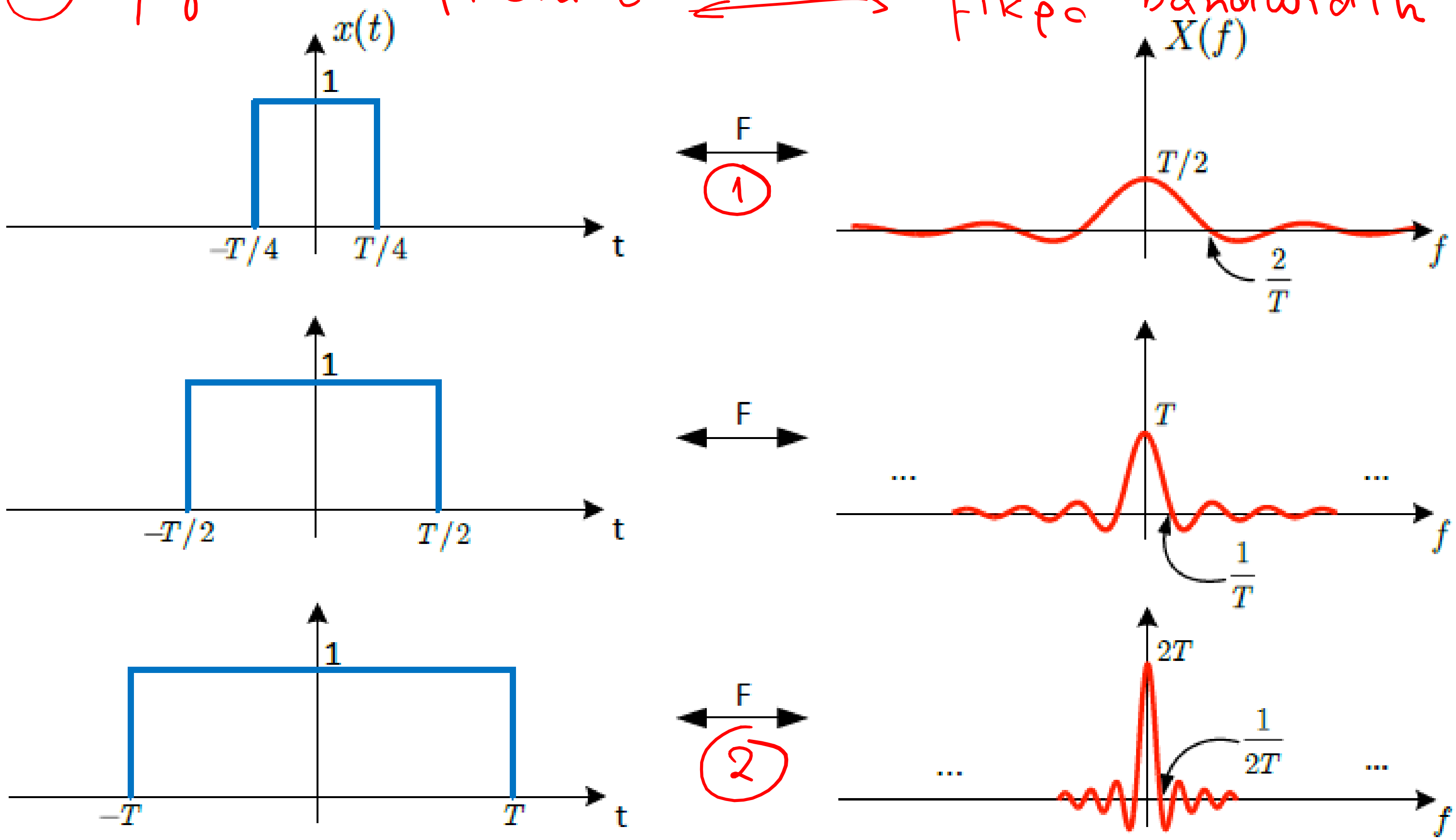
Όμοια δείχνουμε για $a<0$.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

① μικρή διάρκεια t ⟷ μεγάλο bandwidth στο f

② μεγάλη διάρκεια t ⟷ μικρό bandwidth στο f



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(t) * y(t)$.

Είναι

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) * y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right)}_{Y(f)e^{-j2\pi f\tau}} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{X(f)} =$$

Άρα

$$Z(f) = Y(f)X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Είναι

$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$H(f) = F\{h(t)\} = \frac{1}{2+j2\pi f}$$

Άρα

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)} =$$

Θέτω $u := j2\pi f$

$$= \frac{1}{(1+u)(2+u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{2+u} = Y(u)$$

$$A = Y(u)\cdot(1+u)\Big|_{u=-1} = \frac{\cancel{(1+u)}}{\cancel{(1+u)}(2+u)}\Bigg|_{u:=-1} = \frac{1}{2+u}\Big|_{u=-1} = 1$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$B = Y(u)\cdot(2+u)\Big|_{u=-2} = \frac{(\cancel{2+u})}{(1+u)(\cancel{2+u})}\Bigg|_{u=-2} = \frac{1}{1+u}\Bigg|_{u=-2} = -1$$

Άρα

$$Y(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u} = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$u := j2\pi f$$

$$F^{-1}$$

$$y(t) = e^{-1\cdot t}u(t) - e^{-2\cdot t}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Σημ.: το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα γίνεται μόνο όταν $\frac{P(f)}{Q(f)}$ πολυώνυμα και βαθμός (P) < βαθμός (Q).

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \quad \Rightarrow$$

Θέτω $u = -t$

$$\Rightarrow x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{-j2\pi fu}\, df .$$

Αν $u \longleftrightarrow f$ (αλλάζω μεταβλ.)

τότε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\, e^{-j2\pi fu}\, du = \mathcal{F}\{X(t)\}$$

Άρα

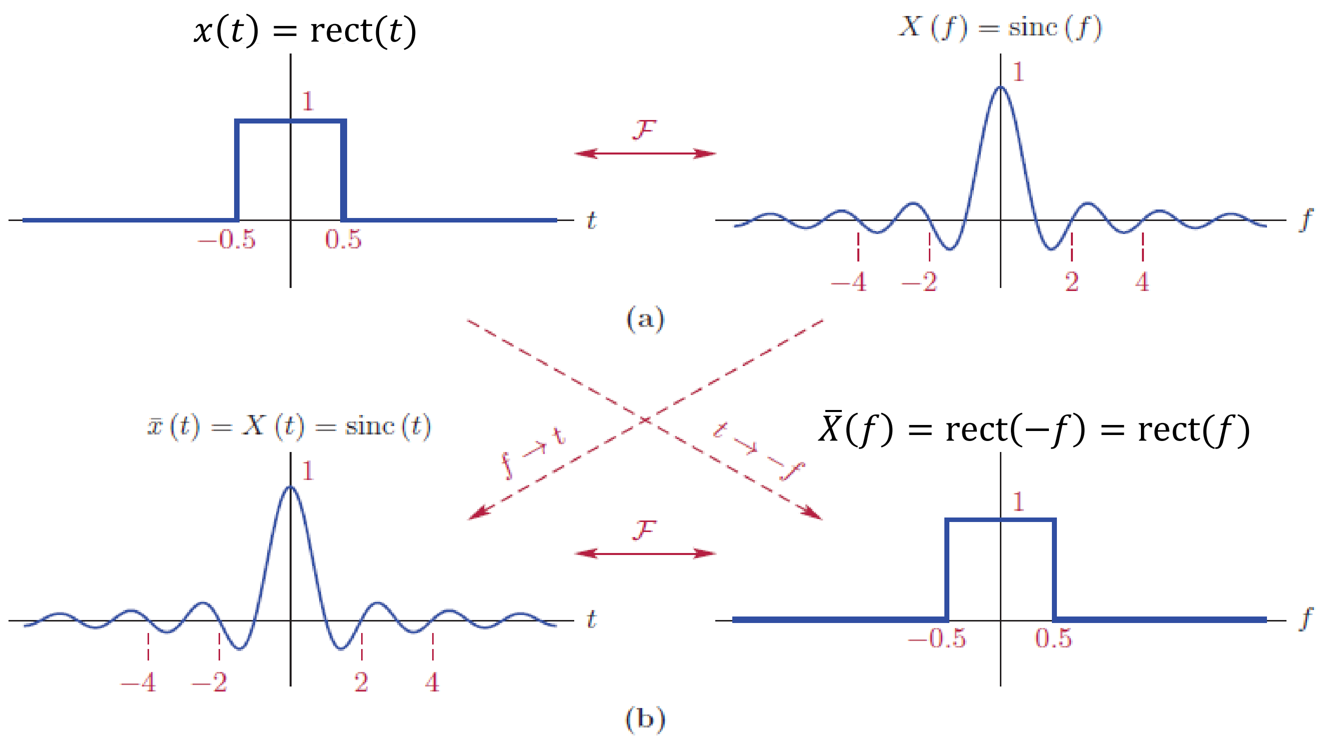
$$X(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x(-f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Άλλο παράδειγμα:

$$x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$X(t) = \frac{1}{a+j2\pi t} \xleftrightarrow{F} x(-f) = e^{af}u(-f)$$



γιατί το rect είναι άρτια συνάρτηση.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(t)y(t)$

Είναι
$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du\right)y(t)e^{-j2\pi ft}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t}dt}_{Y(f-u)}\cdot du$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du = X(f) * Y(f)$$

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$

Είναι

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

$$= \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)e^{j2\pi f_0 t} + \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επειδή $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\text{sinc}(fT)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα.

Άρα

$$X(f) = T\text{sinc}((f-f_0)T) + T\text{sinc}((f+f_0)T)$$

$$= T\left(\text{sinc}((f-f_0)T) + \text{sinc}((f+f_0)T)\right).$$

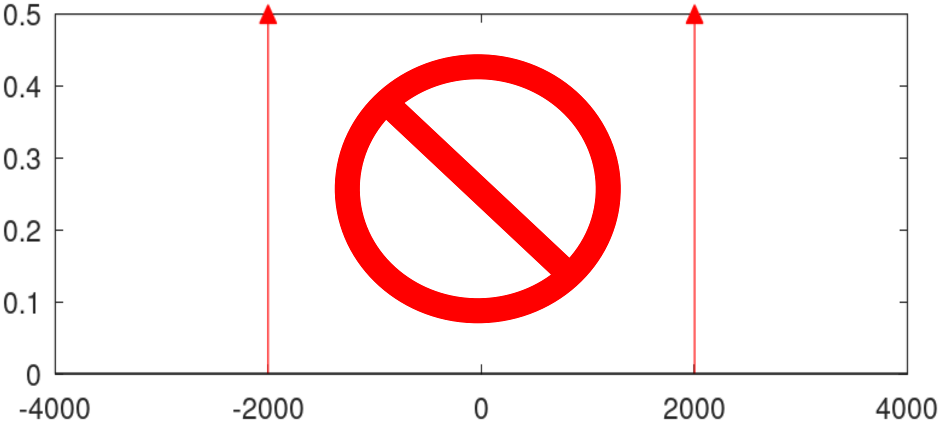
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Θα δούμε σε λίγο ότι

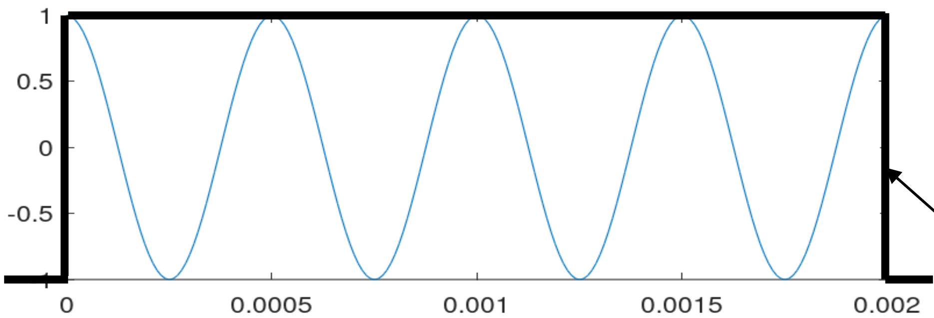
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,, \qquad \boxed{-\infty < t < +\infty}$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

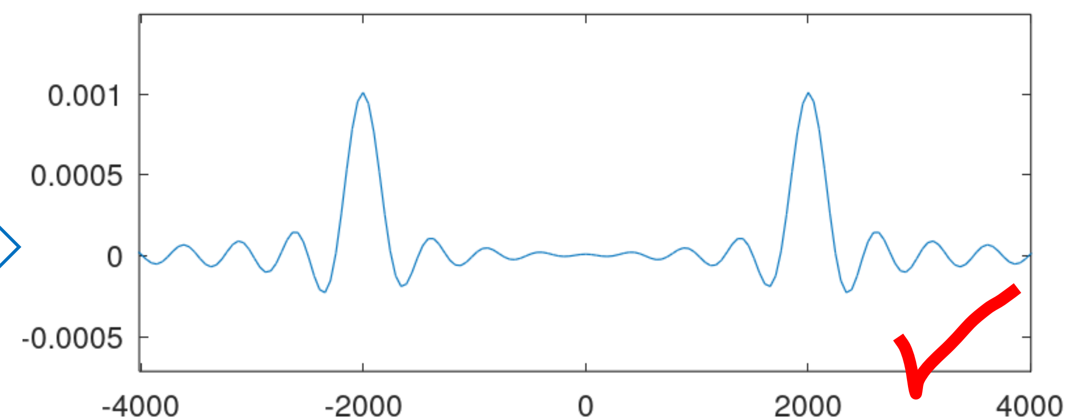


Φάσμα ημιτόνου ***άπειρης*** διάρκειας



$$\mathrm{rect}\left(\frac{t - 0.001}{0.002}\right)$$

Φάσμα ***παραθυροποιημένου*** ημίτονου



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

$$\frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n X(f)$$

Είναι $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$$= x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(e^{-j2\pi f t}\right)' dt$$

$$= \underbrace{x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{?} - (-j2\pi f)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t} dt}_{X(f)}$$

$$= 0 - 0 + j2\pi f X(f)$$

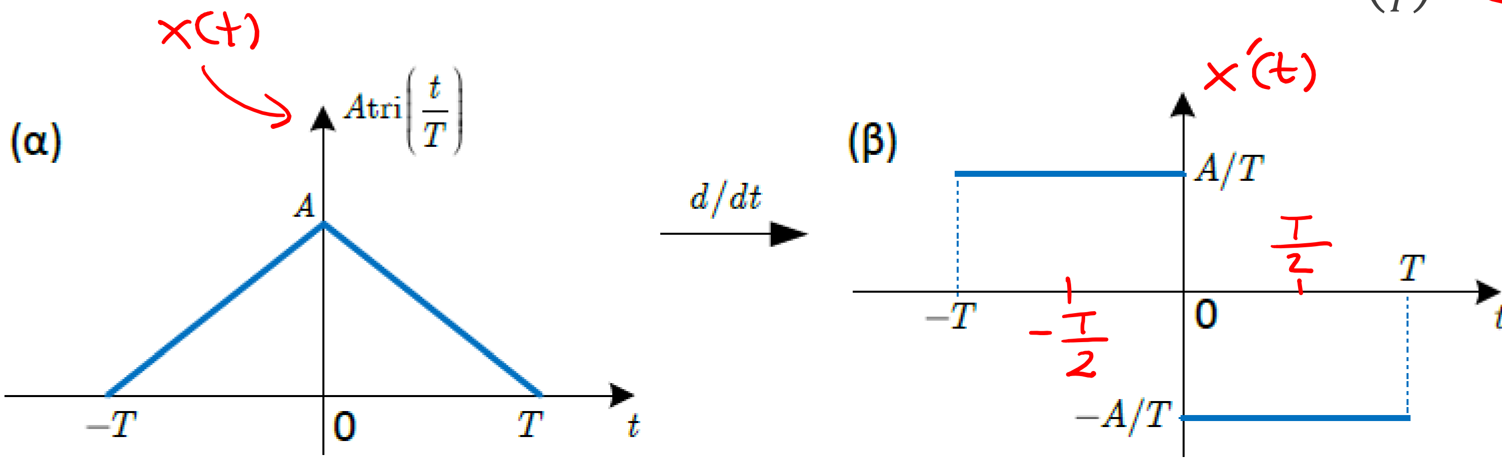
- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

E.B.A

×2

  - Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



Είναι $\frac{d}{dt}x(t) = x'(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$

Άρα $F\{x'(t)\} = A\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{+j2\pi f\frac{T}{2}} - A\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}$

$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} - e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}\right)$

$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot 2j\sin(\pi fT)$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Οπότε δείξαμε ότι

$$F\{x'(t)\} = j2A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT)$$

Από ιδιότητες ολοκλήρωσης

$$X(f) = \frac{F\{x'(t)\}}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

$$= \frac{\cancel{j2}A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT)}{\cancel{j2}\pi f} + \dots$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\frac{T\sin(\pi fT)}{\pi fT} + \dots$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\mathrm{sinc}(fT) + \dots \quad *_1$$

$$*_1 = AT\,\mathrm{sinc}^2(fT) + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

$$X(0) = F\{x'(t)\}\Big|_{f=0}$$

Όμως $X(0)=0$ άρα απαλείφεται.

Οπότε:

$$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Απόδειξη:

Είναι $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) e^{-j2\pi u t} du \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt}_{\delta(f-u)} \right) du\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u)\, \delta(f-u)\, du\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\, \delta(f-u)\, du \cdot df$$

$$\delta(t-t_0) = \int e^{-j2\pi f(t-t_0)} df$$

Δυικότητα:

$$\delta(f-f_0) = \int e^{j2\pi(f-f_0)t} dt$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Απόδειξη:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(u)\Big|_{u=f}\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(f)\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df .$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

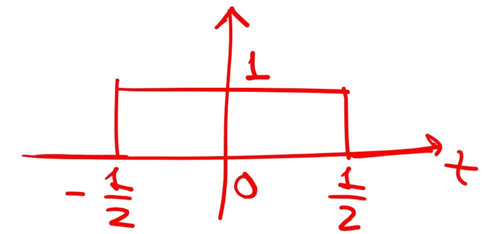
  - Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)df$

Από Θεωρ. Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{sinc}(f))^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{rect}(t)]^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\, dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dt$$



$$= t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)df = 1$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**
- Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Μ.F. ενός απλού ημιτόνου $\cos(2\pi f_0 t)$
- Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

- Τα παραπάνω ολοκληρώματα δε συγκλίνουν

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{F}\{\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}\,\mathrm{F}\{\mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}\}$$

- Όμως από δυικότητα $e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \mp f_0)$

Έχουμε αποδείξει ότι
$\delta(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j2\pi f t_0}$

- Οπότε

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, και αφού μπορούμε να περιγράψουμε κάθε περιοδικό σήμα ως μια Σειρά Fourier, θα έχουμε

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

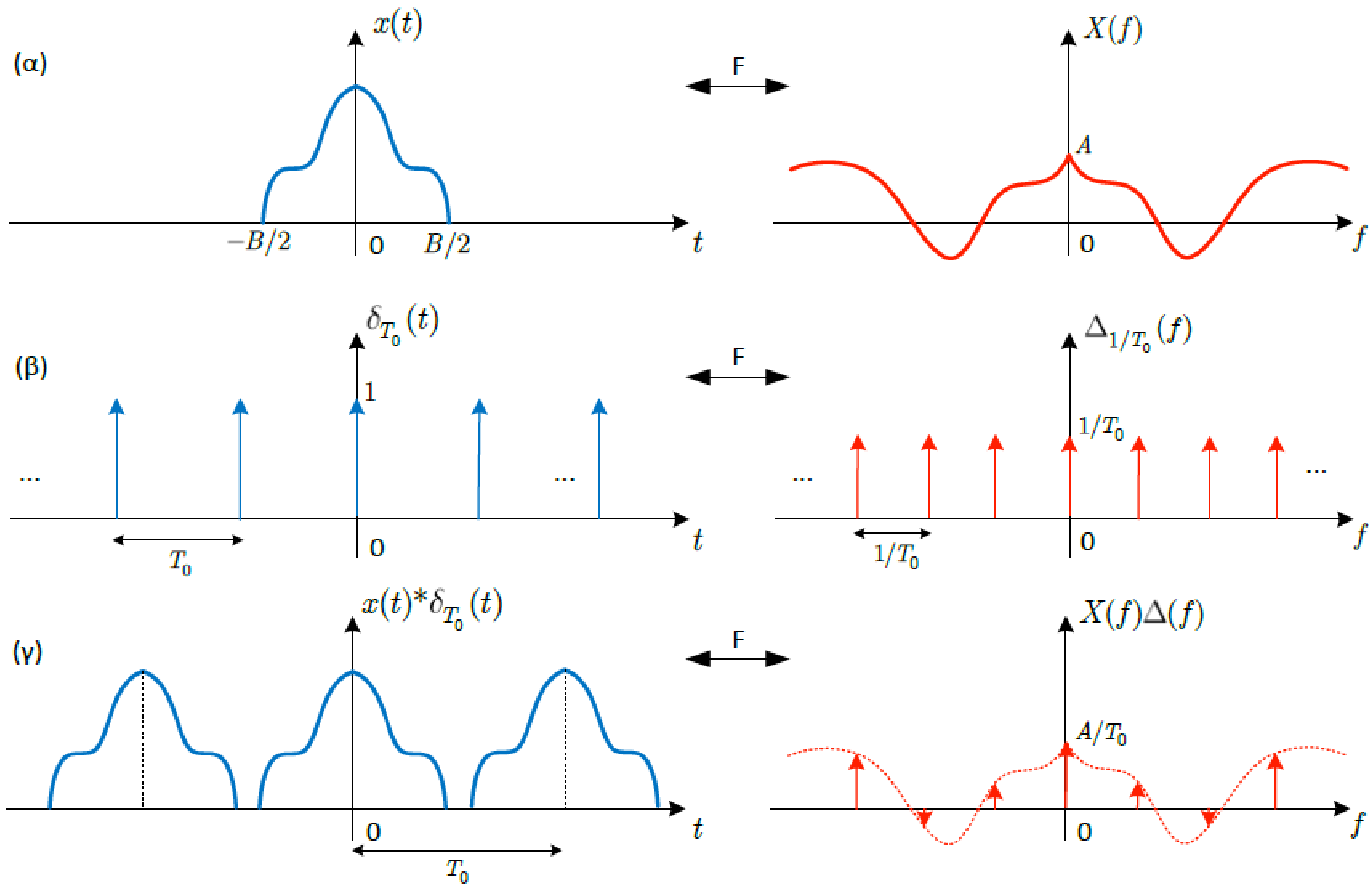
- Όμως πάλι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το X_k για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω
  - Κάτι που είναι «επίπονο»… ☺

- Μπορούμε άραγε να βρούμε τους συντελεστές Fourier πιο εύκολα?
  - Μέσω του Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος ίσως?

- Στο παραπάνω θα μας βοηθήσει η γνωστή μας σχέση

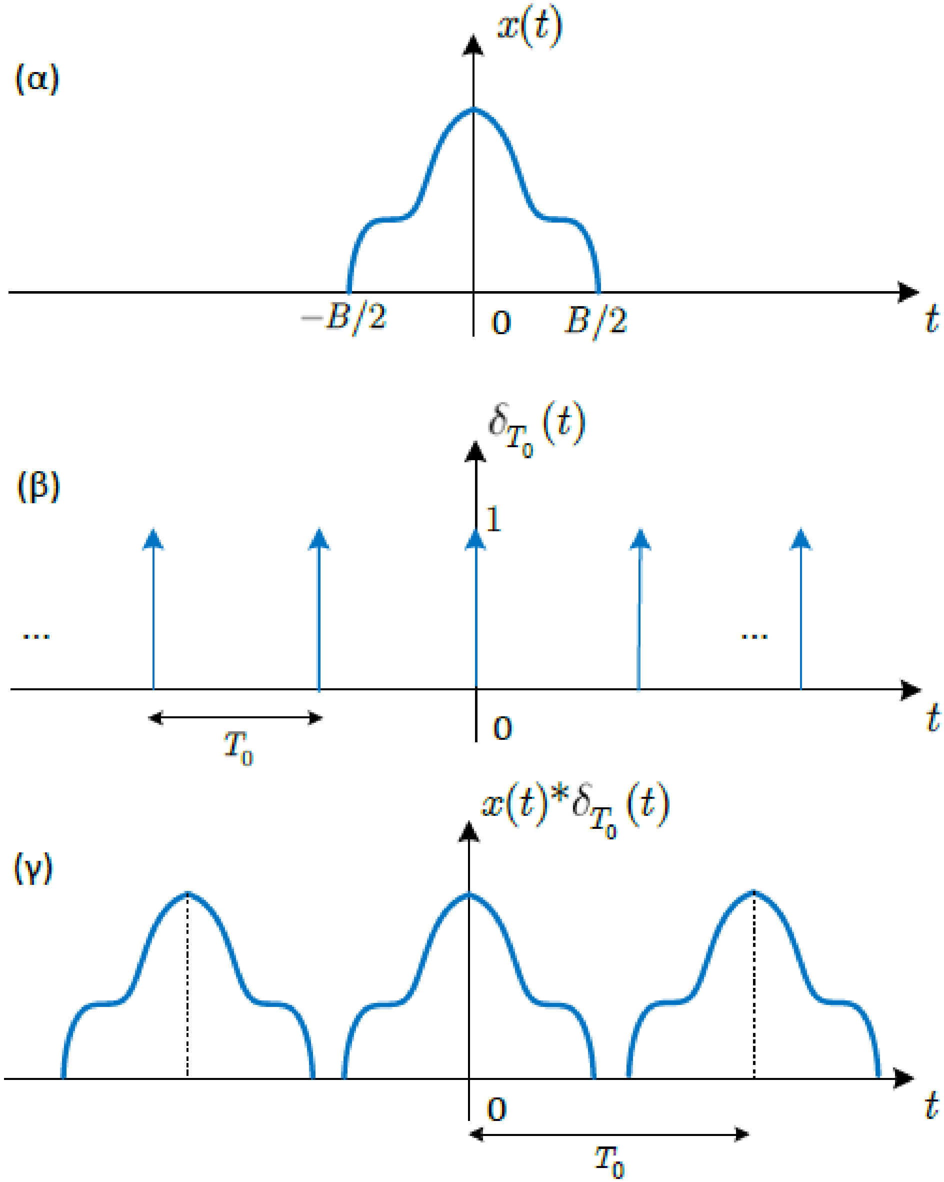
$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα



- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$



$$x(t)$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$x(t) * \delta_{T_0}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

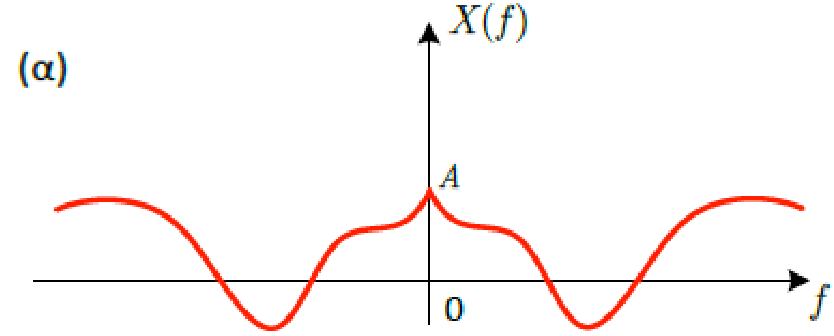
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0)$$

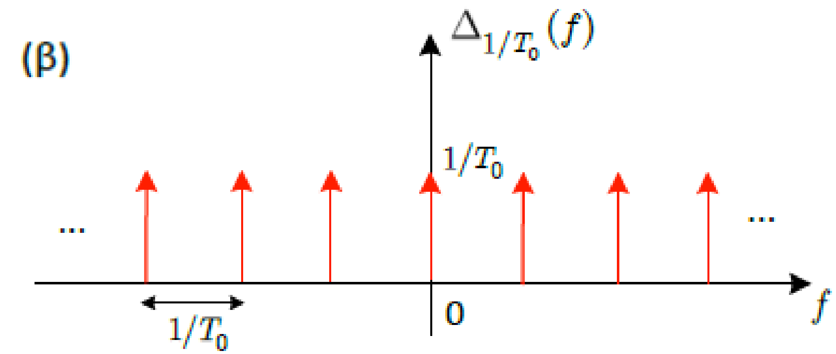
• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$\boxed{X(f)\delta(f-f_0) = X(f_0)\delta(f-f_0)}$$

$$X(f)$$



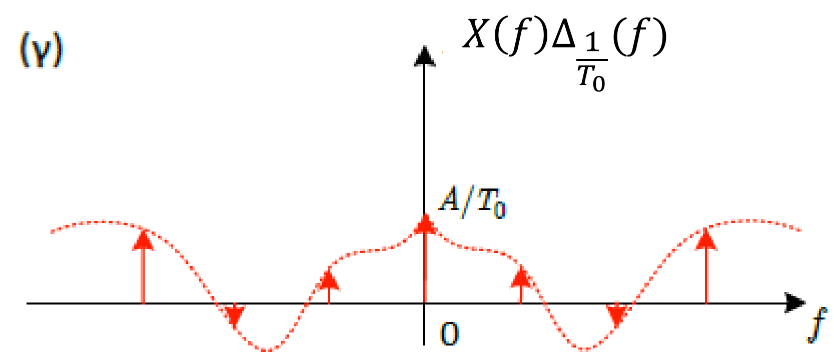
$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$



$$X(f)\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(f)\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(k\frac{1}{T_0}\right)\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$



- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

$f_0 = 1/T_0$

- Άρα αφού

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k}\, \delta\left(f - kf_0\right)$$

και

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{\frac{1}{T_0} X\left(k\frac{1}{T_0}\right)} \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

οι συντελεστές Fourier μπορούν να προκύψουν από το Μετασχ. Fourier **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

δηλ. αρκεί να **δειγματοληπτήσουμε** το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ανά $\frac{k}{T_0}$ και ό,τι προκύψει να το πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{T_0}$!!!!

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Συνοψίζοντας:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε *μια* περίοδο του σήματος $x_{T_0}(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = kf_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$

Μετασχ. Fourier περιοδικού σήματος!

Μην ξεχάσουμε να πολλαπλασιάσουμε το δειγματοληπτημένο αποτέλεσμα με $1/T_0$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

Πρόοδος 21-22

- **Παράδειγμα:**

○ Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος που σε μια περίοδό του γράφεται ως $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, 0 < t < 1 \\ 0, \ \ 1 < t < 2 = T_0 \end{cases}$

- $1^{ος}$ τρόπος: $X_k = \frac{1}{T_0}\int \dots = \frac{1-e^{-1}(-1)^k}{2+j2\pi k}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$

- $2^{ος}$ τρόπος: μία περίοδος του περιοδικού σήματος είναι η

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-t}, \dots \\ 0, \dots \end{cases}$$

Άρα $X_{T_0}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{T_0}(t)\, e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_0^1 e^{-t} e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi f)t}\,dt$

$$= \frac{1}{-(1+j2\pi f)} e^{-(1+j2\pi f)t}\Big|_{t=0}^{1} = -\frac{1}{(1+j2\pi f)}\left(e^{-(1+j2\pi f)} - 1\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**
- **Παράδειγμα:**

$$= \frac{1}{1+j2\pi f}\left(1 - e^{-(1+j2\pi f)}\right).$$ Θέτω $f = \frac{k}{T_0} = \frac{k}{2}$.

$$\left\{ e^{-j\pi k} = (-1)^k \quad \forall k \right.$$

Άρα

$$X_{T_0}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1 - e^{-1} \cdot e^{-j\cancel{2}\pi \frac{k}{\cancel{2}}}}{1 + j\cancel{2}\pi \frac{k}{\cancel{2}}} = \frac{1 - e^{-1} e^{-j\pi k}}{1 + j\pi k} =$$

$$= \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1 + j\pi k}.$$

Τέλος,

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1 + j\pi k} = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Γνωρίζουμε ότι τα απεριοδικά σήματα ισχύος δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα, οπότε δεν έχουν Μετασχ. Fourier

- Μπορούμε άραγε να εκμεταλλευτούμε κι εδώ τη χρήση «ιδιαίτερων» συναρτήσεων όπως η συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε μια τέτοια έκφραση?

- Μπορούμε να γράψουμε ένα απεριοδικό σήμα ισχύος ως

$$x(t) = x_0 + x_z(t)$$

με

- x_0 τη μέση τιμή του σήματος (αριθμός)

$$x_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

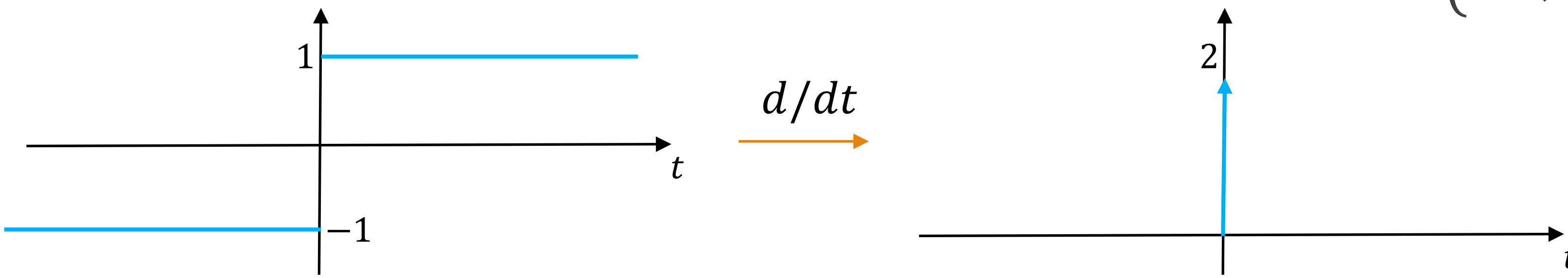
- $x_z(t)$ το υπόλοιπο σήμα μηδενικής μέσης τιμής

- Τότε

$$X(f) = x_0\delta(f) + X_z(f)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Ως παράδειγμα, για το μετασχ. Fourier του σήματος $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $x_0 = 0$
- Άρα

$$\operatorname{sgn}(t) = \hat{x}(t) = 0 + x_z(t) \leftrightarrow \hat{X}(f) = 0 \cdot \delta(f) + X_z(f) = X_z(f)$$

- Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_z(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Leftrightarrow X_z(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

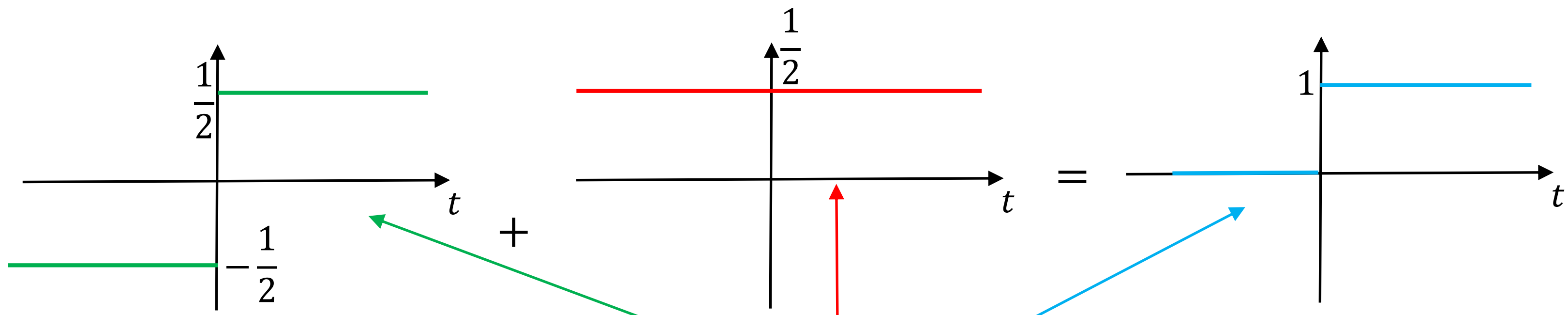
σύμφωνα με την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier

- Οπότε

$$\hat{X}(f) = X_z(f) = F\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Ως παράδειγμα, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- Το σήμα $u(t)$ γράφεται ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

- Άρα

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Οπότε

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- **Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier**

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f-kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f+f_0)$
1	$\delta(f)$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}(fT)$
$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t),\ a>0$	$\frac{2\pi f_0}{(a+j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t),\ a>0$	$\frac{a+j2\pi f}{(a+j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a\|t\|},\ \Re\{a\}>0$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a-j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Για την αντίστροφη διαδικασία εύρεσης του σήματος στο χρόνο από το μετασχ. Fourier του, συνήθως ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:

○ Χρήση του ορισμού

○ Χρήση ιδιοτήτων (π.χ. δυϊκότητα)

○ Χρήση πινάκων γνωστών μετασχηματισμών

ενώ χρησιμοποιείται συχνά η τεχνική του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα**:
  - Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$, και του σήματος $X(f) = A\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$

Όλα λύνονται με τον ορισμό ή με ιδιότητα δυϊκότητας.

- $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f t}\Big|_{f=0} = 1$
- $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f t}\Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t}$
- Ξέρουμε ότι $A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{B}\right) \xleftrightarrow{F} AB\,\mathrm{sinc}(fB)$

$$\underset{x(t)}{\overset{\shortparallel}{AB\,\mathrm{sinc}(Bt)}} \xleftrightarrow{F} A\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{B}\right) = A\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω ότι γνωρίζετε τα παρακάτω:

- Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές
- Ισχύει

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t), \qquad A \in \Re$$

- Ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15}$$

Βρείτε το $x(t)$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

$f^{-1}(f(x)) = x$

- Παράδειγμα:

Είναι

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\}\} = \mathcal{F}\{Ae^{-3t}u(t)\}$$

$$= \frac{A}{3+j2\pi f}$$

Είναι

$$(2+j2\pi f)X(f) = \frac{A}{3+j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{A}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \xrightarrow{u=j2\pi f} X(u) = \frac{A}{(3+u)(2+u)}$$

Είναι

$$X(u) = A\left(\frac{B_1}{3+u} + \frac{B_2}{2+u}\right)$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

$$B_1 = \frac{1}{\cancel{(3+u)}(2+u)}\cancel{(3+u)}\Big|_{u=-3} = \frac{1}{2+u}\Big|_{u=-3} = -1$$

$$B_2 = \frac{1}{(3+u)\cancel{(2+u)}}\cancel{(2+u)}\Big|_{u=-2} = \frac{1}{3+u}\Big|_{u=-2} = 1$$

Άρα

$$X(u) = A\left(\frac{-1}{3+u} + \frac{1}{2+u}\right)$$

$$X(f) = A\left(-\frac{1}{3+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}\right)$$

Από πίνακες

$$x(t) = A\left(-e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t)\right)$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15}$$

$$\Big\| \text{Parseval}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 df$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A e^{-2t} u(t) - A e^{-3t} u(t)\right)^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A^2 e^{-4t} u^2(t) - 2A^2 e^{-5t} u(t) + A^2 e^{-6t} u^2(t)\right) dt$$

$$= A^2 \left[\int_0^{+\infty} e^{-4t} dt - \int_0^{+\infty} 2e^{-5t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-6t} dt \right] = \frac{4}{15}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

Καταλήξαμε στο $A^2 = 16$ $\rightarrow$ $A = 4$, $A = -4$

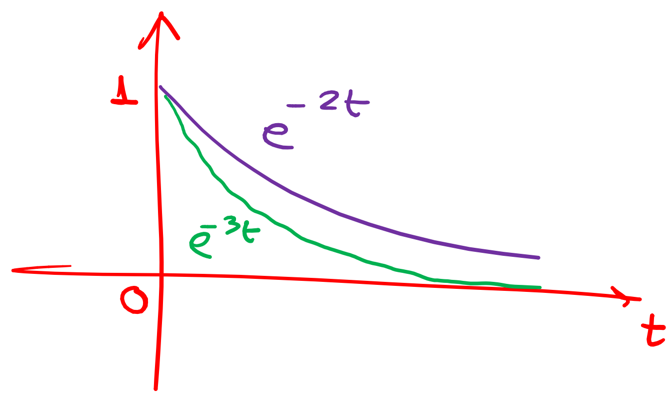
Άρα πιθανές λύσεις:

$$x_1(t) = 4\left(e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)\right)$$

$$x_2(t) = -4\left(e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)\right)$$

Σωστή απάντηση το $x_1(t)$

γιατί είναι θετικό για κάθε t.



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ