ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

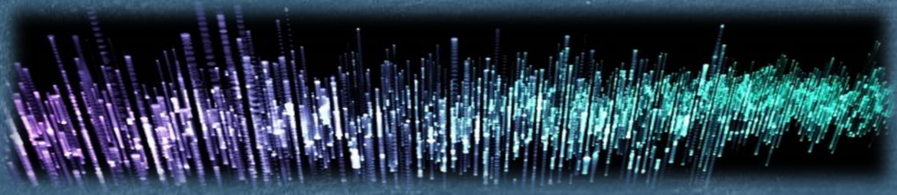
ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η

- Μετασχηματισμός Fourier

Τι περιέχει το ΗΥ215?

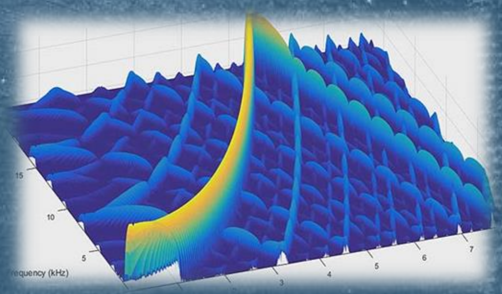
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



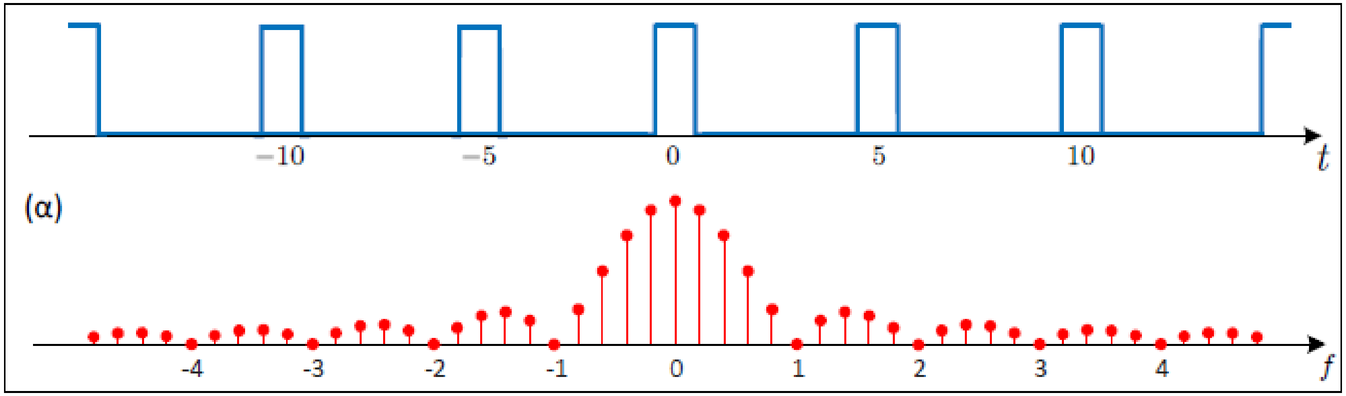
- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

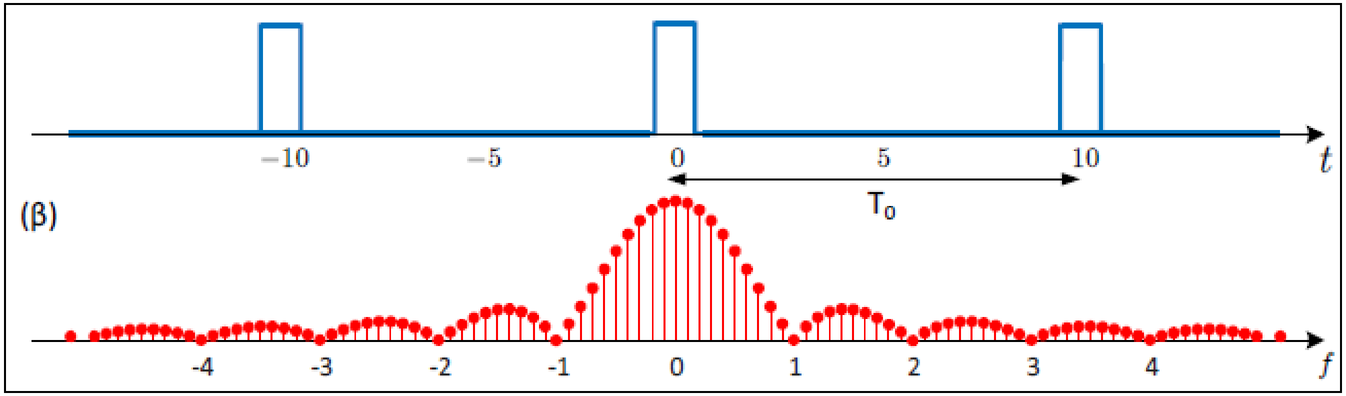
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

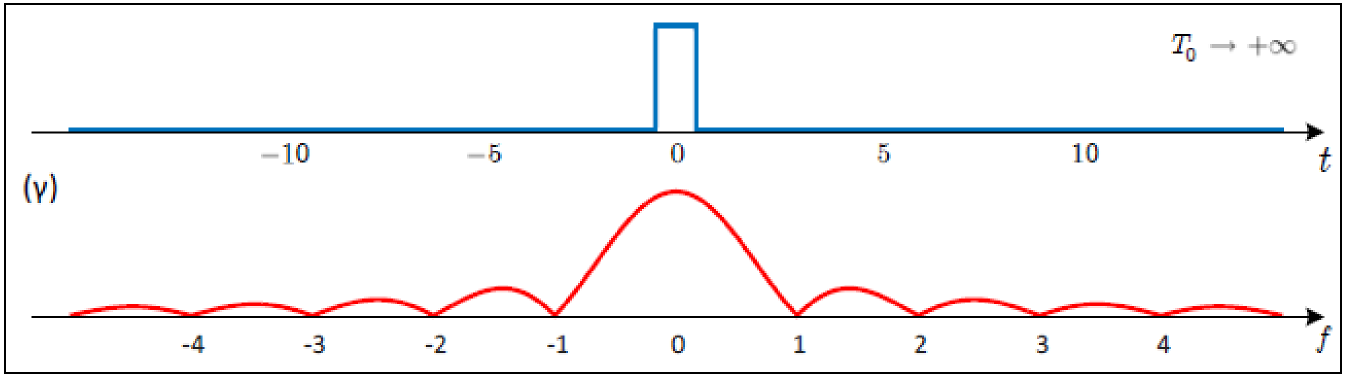
η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \to +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

- **Προς το μετασχ. Fourier…**







- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Bigg(\overbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}^{X_k} \Bigg) e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Όταν $T_0 \to +\infty$, τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \to df$ και $kf_0 \to kdf \to f$

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Ο όρος

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = F\{x(t)\}$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df = F^{-1}\{X(f)\}$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
  - Έχει μέτρο και φάση
  - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t)\, dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t) dt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t)\, dt$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Μέτρο:

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση:

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι για πραγματικά σήματα

$$X(f) = X(-f)^*$$

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι άρτια συνάρτηση του f, ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι περιττή συνάρτηση του f
- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**

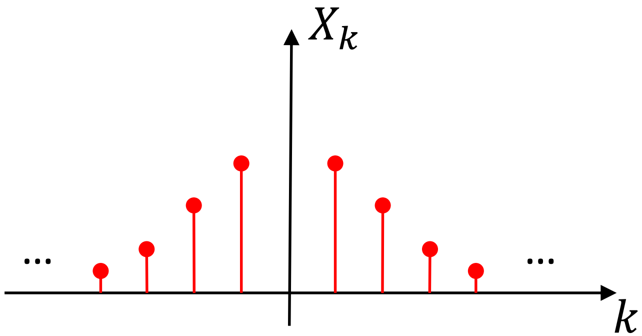
- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα

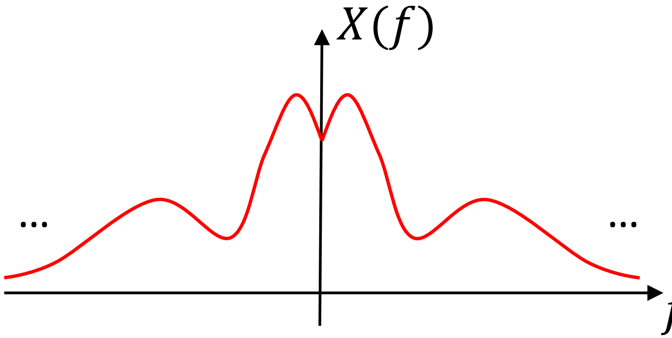
- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα *μετρήσιμων* διακριτών συχνοτήτων kf_0, με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις φ_k:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Ο μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* άθροισμα ***κάθε*** συχνότητας f, με πλάτη $2|X(f)|$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|X(f)| \cos\big(2\pi f t + \angle X(f)\big)\, df$$





- **Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη**

- Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

  - Το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
  - Δεν είναι αναγκαία συνθήκη

- Επίσης αν

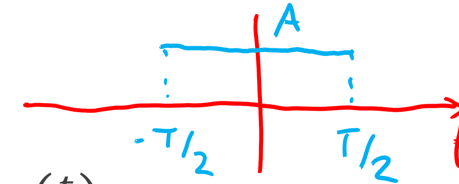
$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετασχ. Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

$$\frac{\sin(\pi a)}{\pi a} = \mathrm{sinc}(a)$$



○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

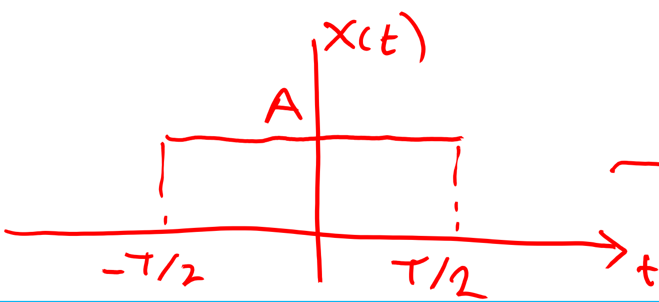
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= A\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}} - e^{j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}}\right) = \frac{A}{\pi f}\,\frac{\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)}{2j} =$$

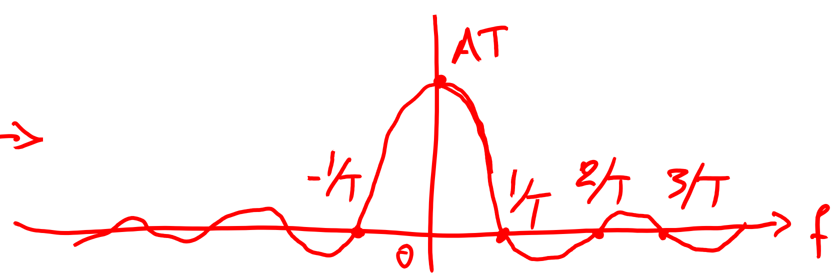
$$= \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T) = AT\cdot\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Άρα $\quad A\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} A\cdot T\cdot\mathrm{sinc}(fT)$

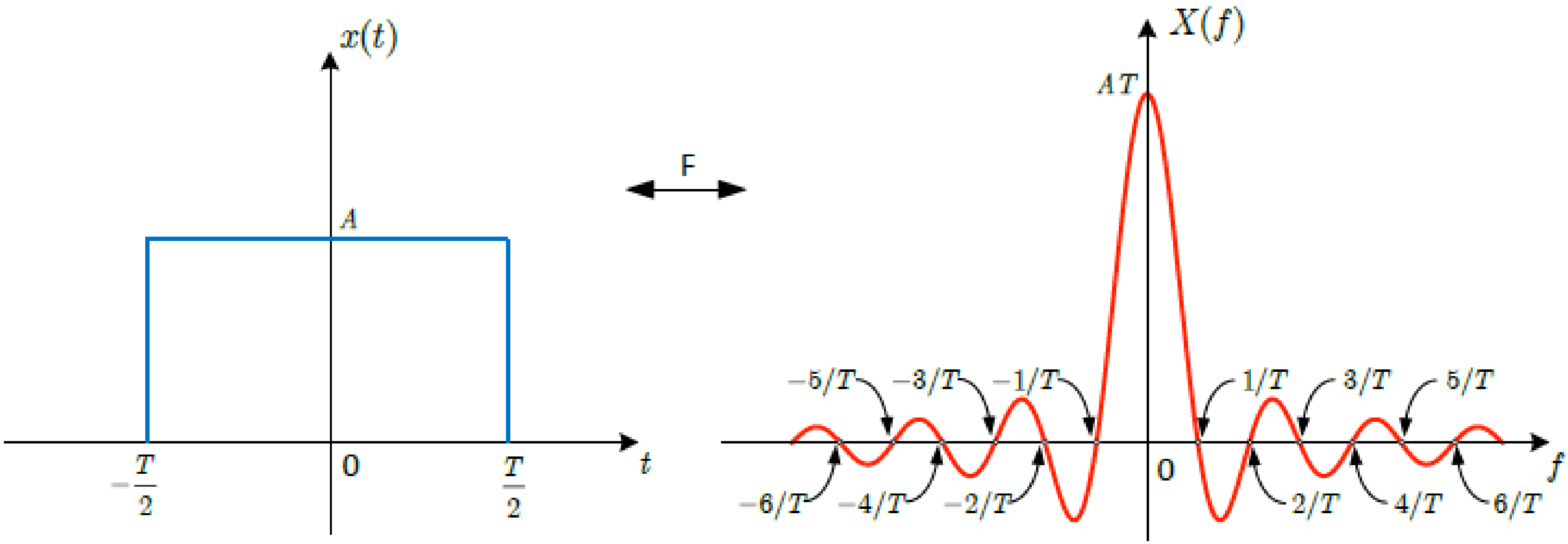
Μηδενισμοί $\quad \sin(\pi f T) = 0 \Rightarrow \cancel{\pi} f T = k\cancel{\pi} \Rightarrow f_k = \frac{k}{T}$



$\xrightarrow{F}$



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

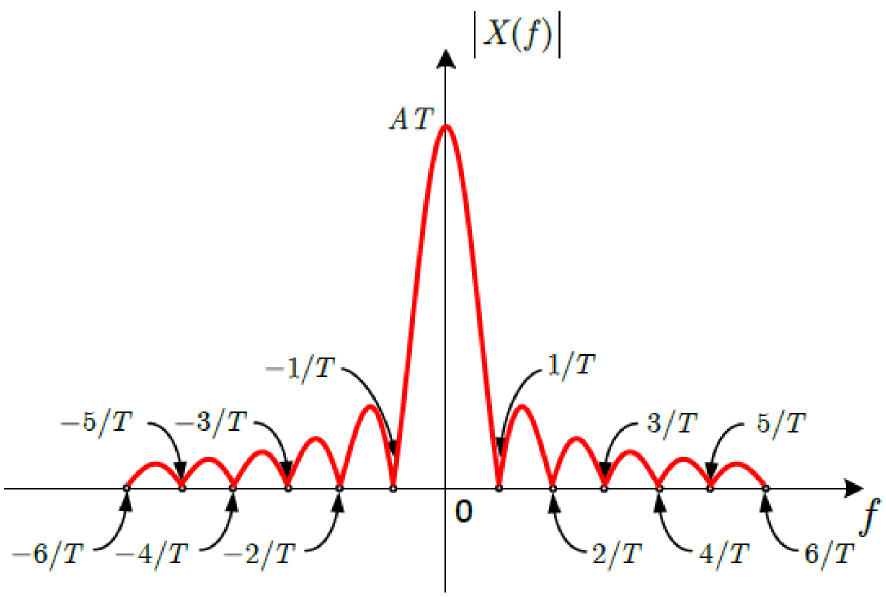


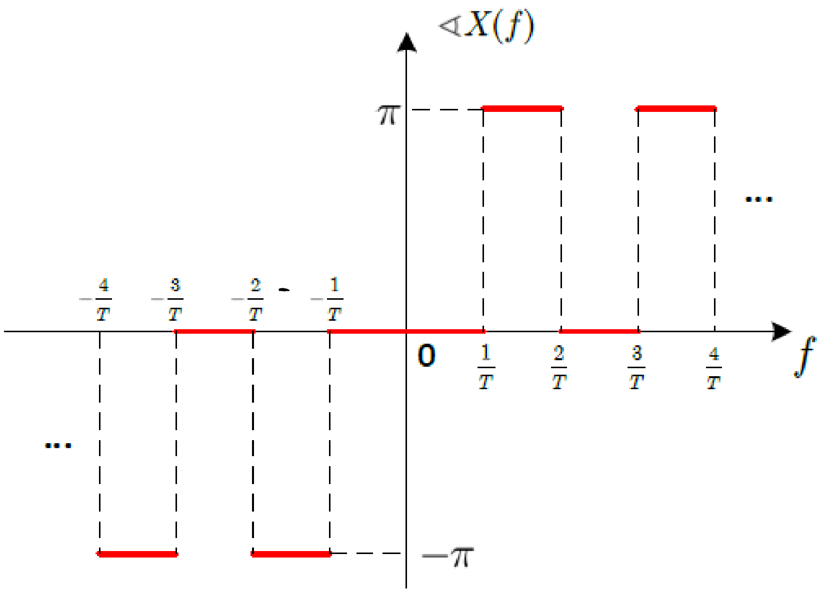
- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

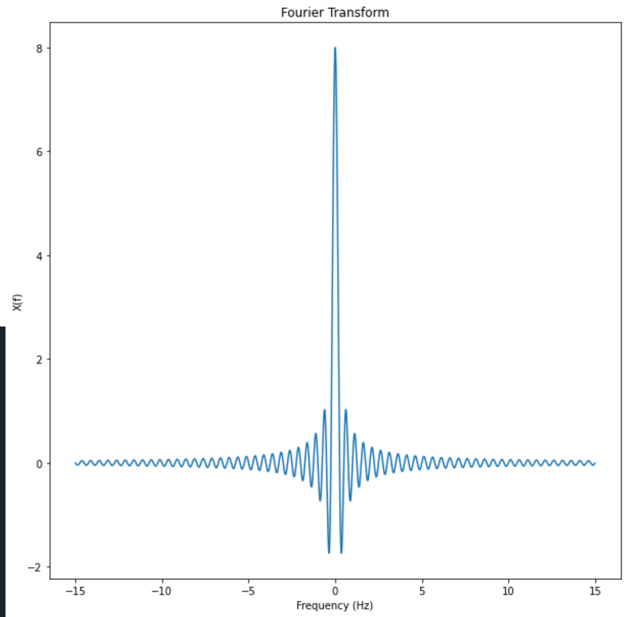
$$|X(f)| = AT\left|\mathrm{sinc}(fT)\right|$$

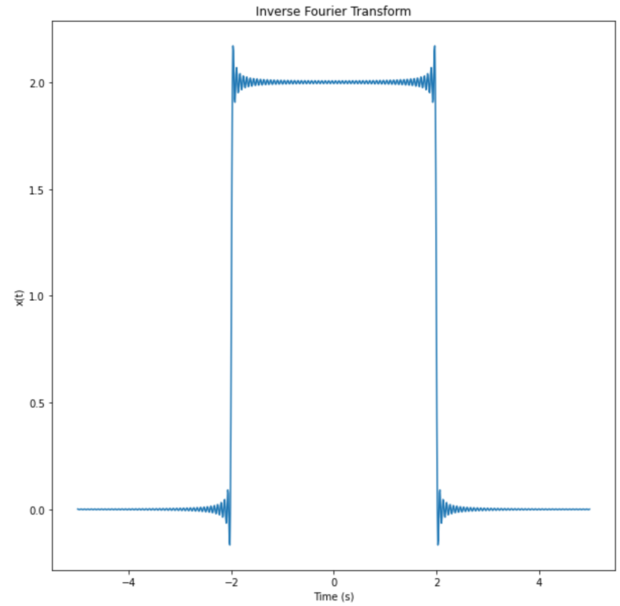
$$\sphericalangle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$





- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Κώδικας Python

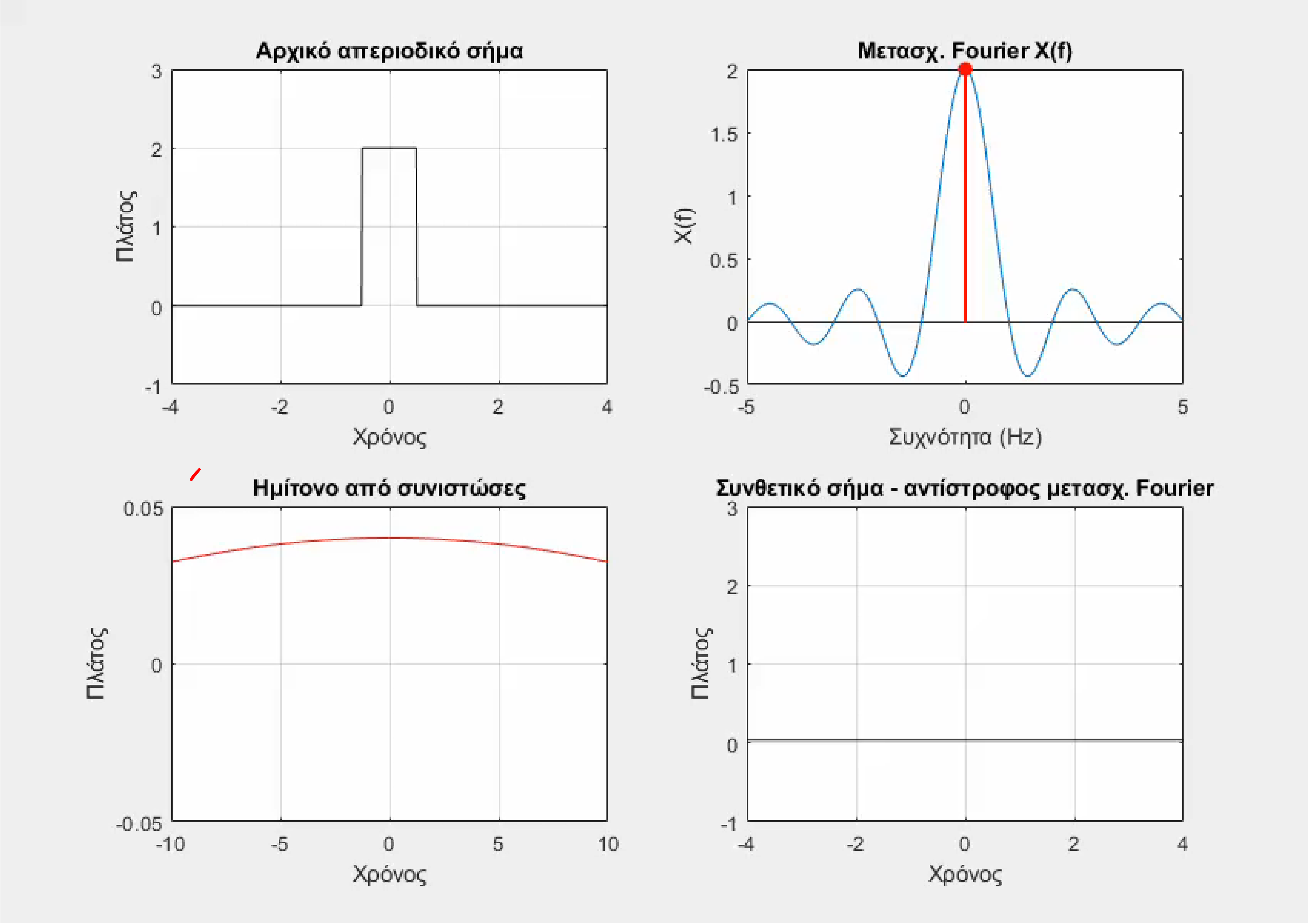




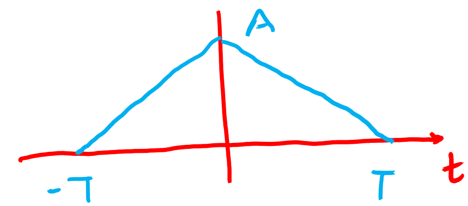

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-15, 15, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

```python
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

• Μετασχηματισμός Fourier



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**



- ○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right)$$

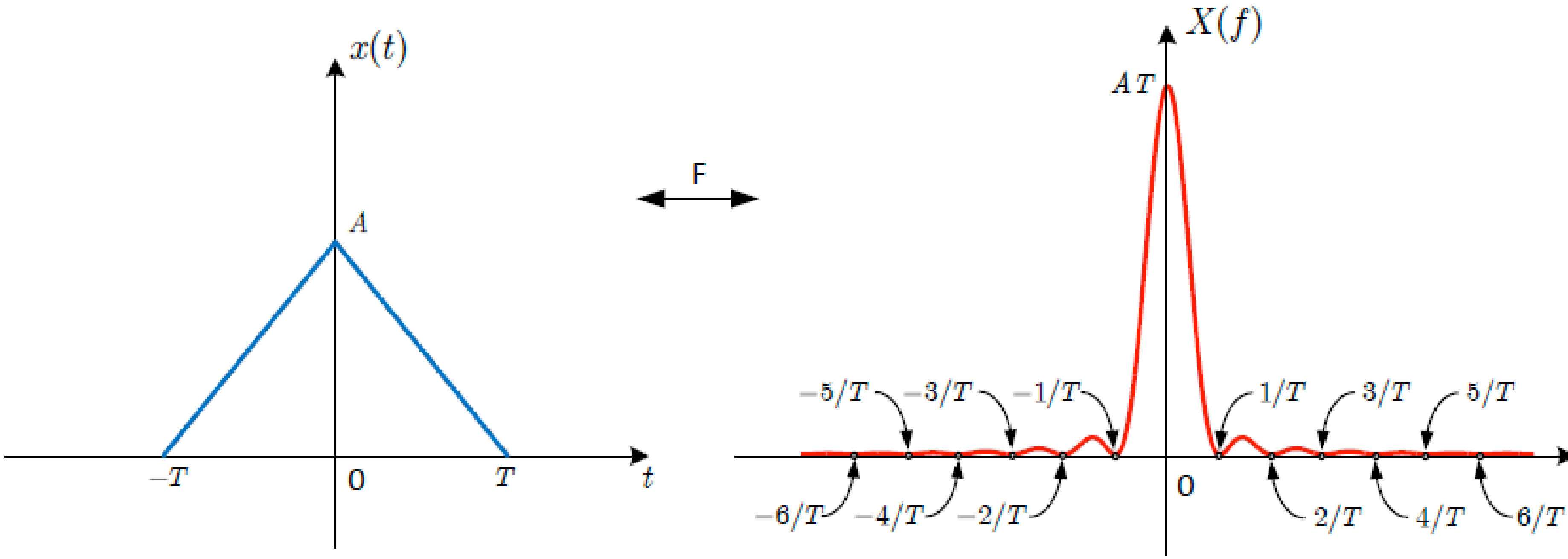
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-T}^{0} A\left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt + \int_{0}^{T} A\left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$= A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}^2(fT)$$

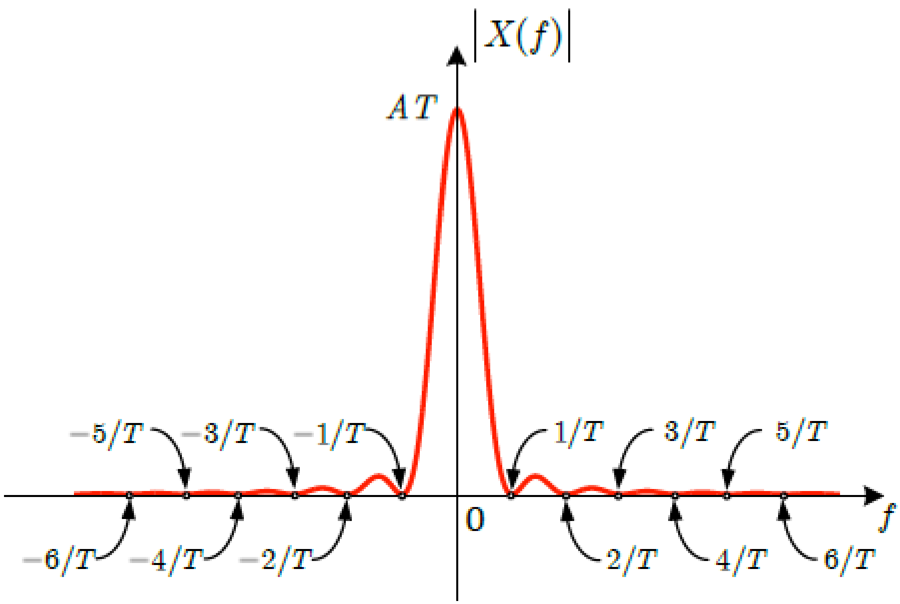
- **Μετασχηματισμός Fourier**

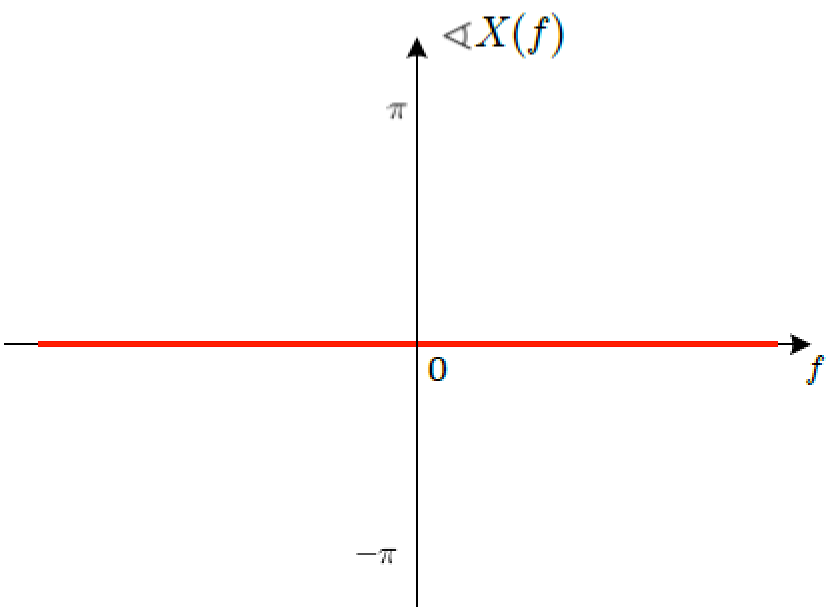
- Παράδειγμα:



- **Μετασχηματισμός Fourier**

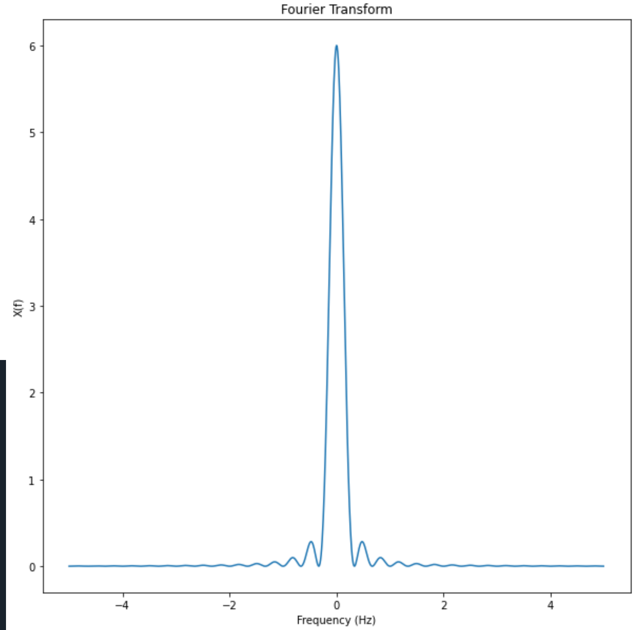
- Παράδειγμα:

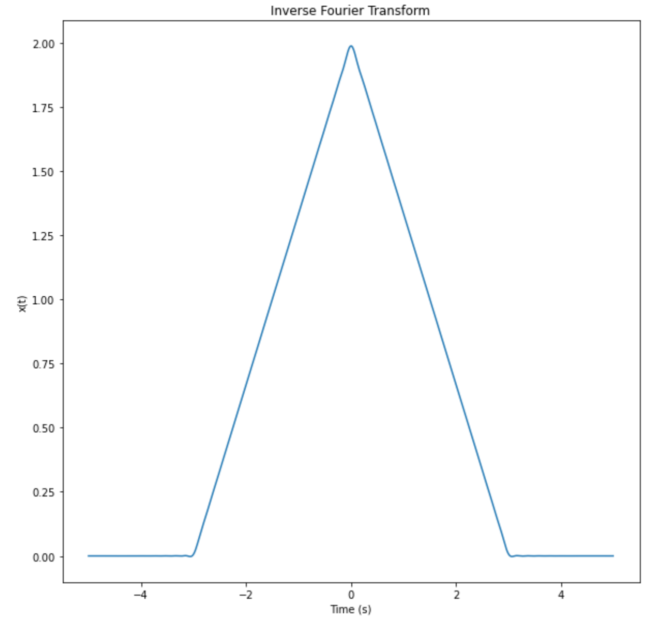




• Μετασχηματισμός Fourier

• Κώδικας Python

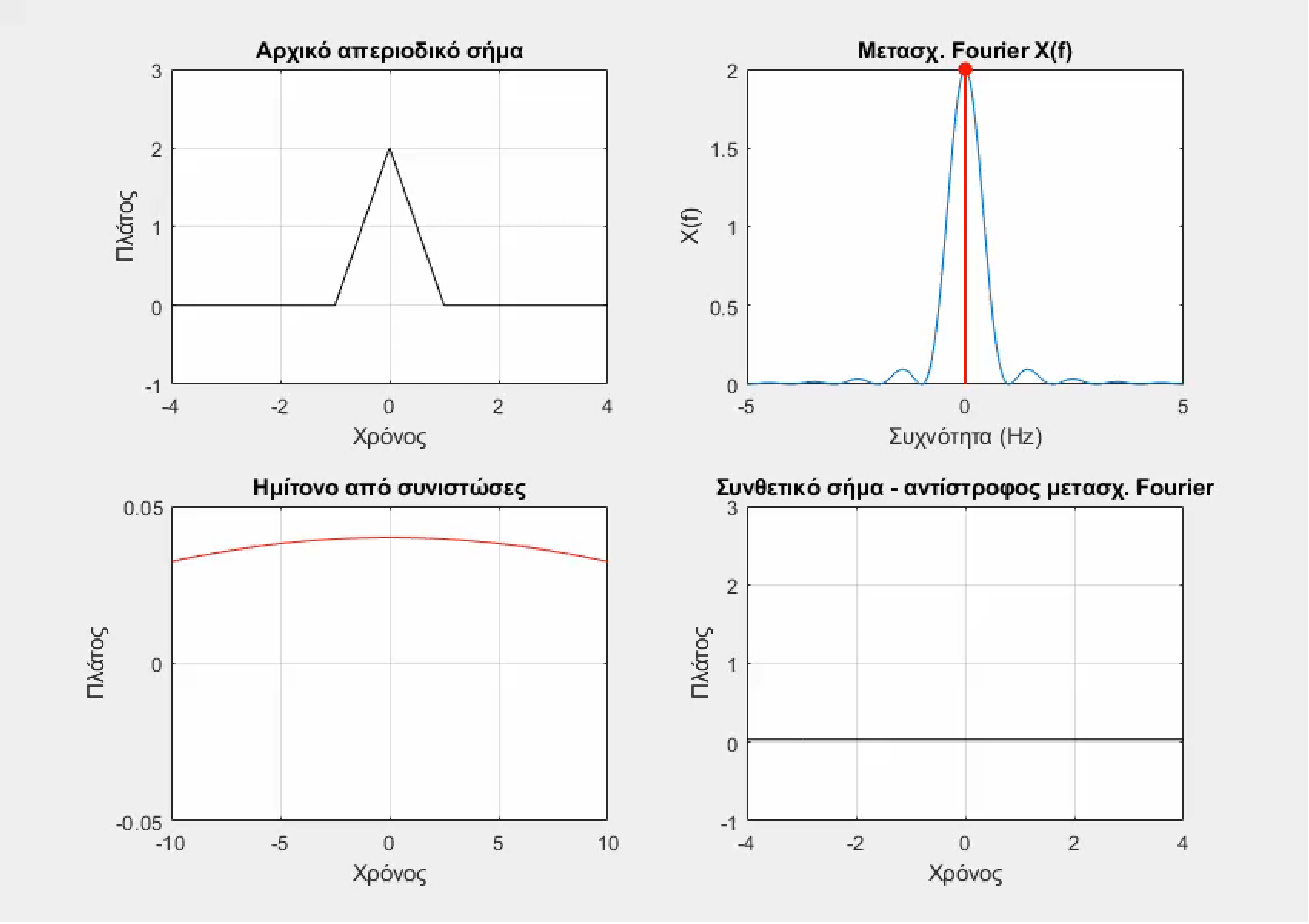





```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Μισή διάρκεια παλμού (-3 ως 3)
T = 3
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-5, 5, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)**2
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

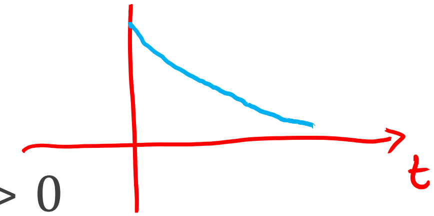
```
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

• Μετασχηματισμός Fourier



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**



○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t), \;\; a > 0$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt =$$

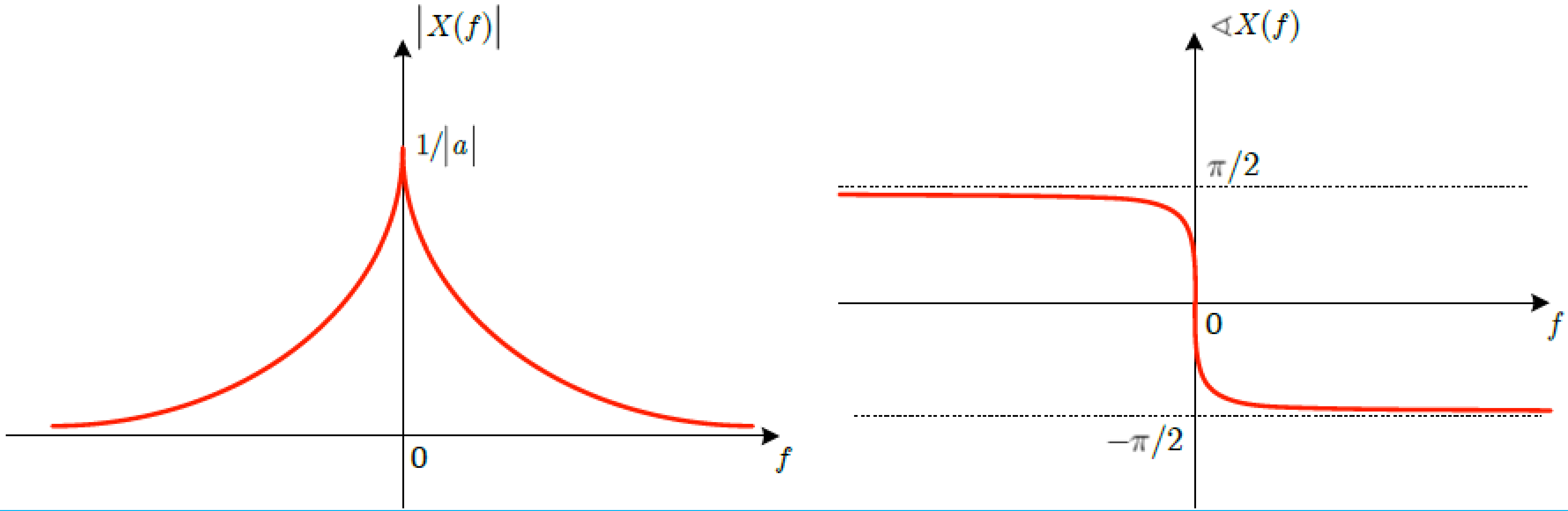
$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)}\, e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{a+j2\pi f}\left(\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} \qquad \begin{cases} |X(f)| = \dfrac{1}{|a+j2\pi f|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}} \\[2ex] \measuredangle X(f) = \tan^{-1} \dfrac{X_I(f)}{X_R(f)} \end{cases}$$

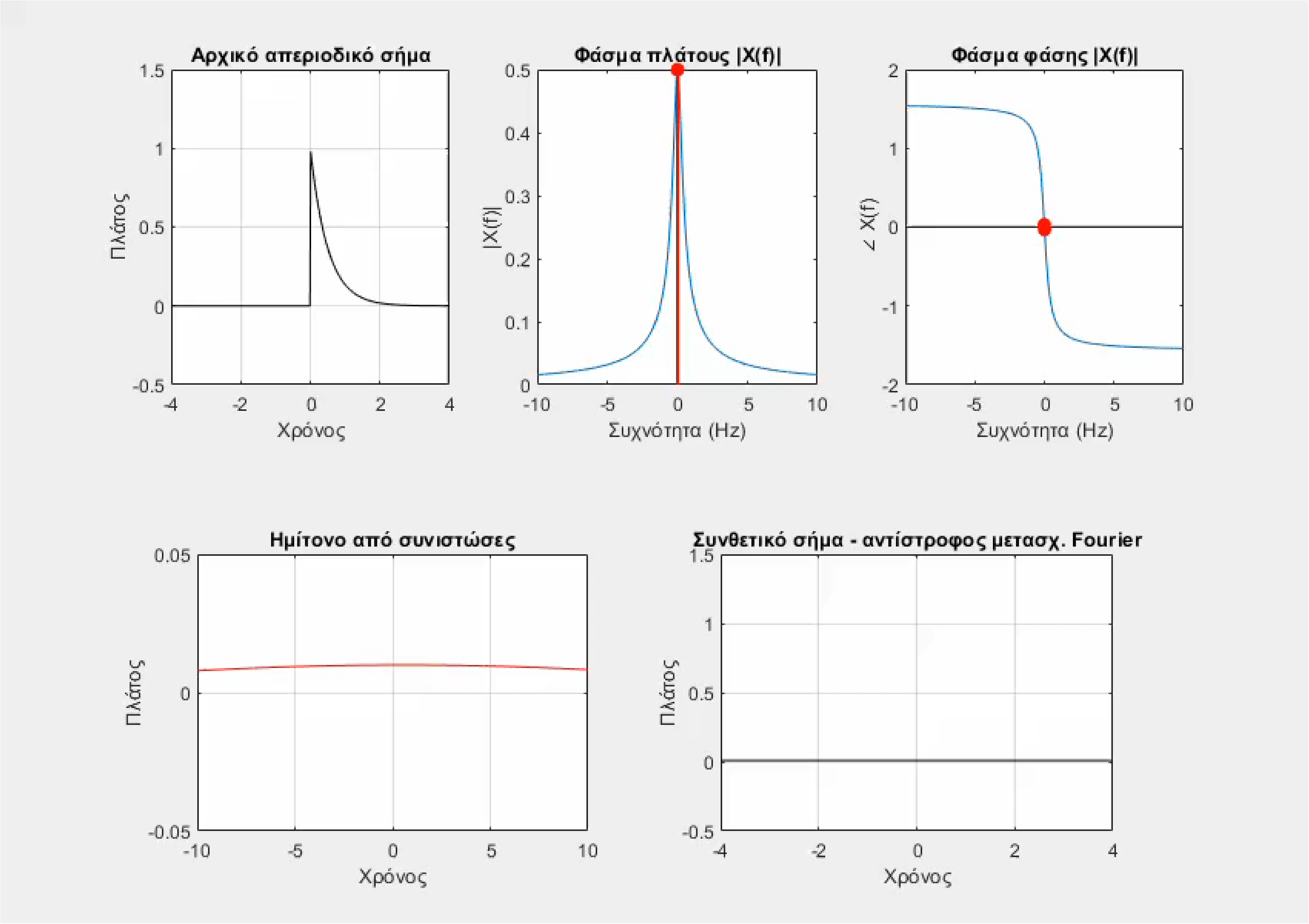
$$z \cdot z^* = |z|^2$$

$$X(f) = \frac{a - j2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2} = \frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2} - j\,\frac{2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2} \Rightarrow \measuredangle X(f) = \tan^{-1} \frac{-2\pi f}{a}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:



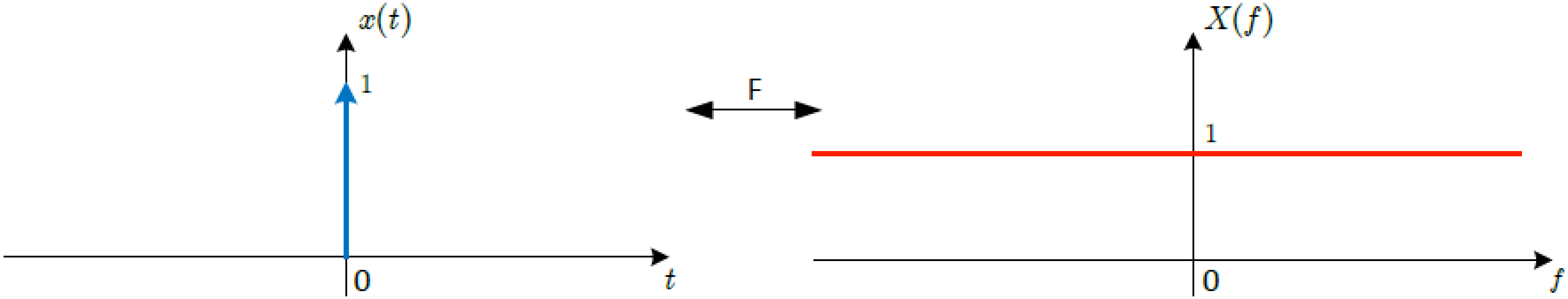
• Μετασχηματισμός Fourier



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = 1$$

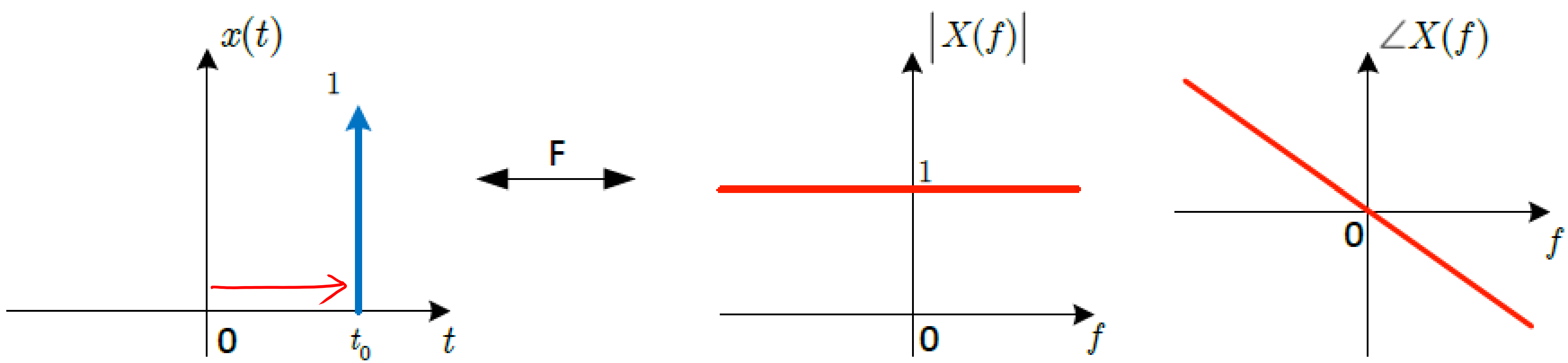


- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\boxed{\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, καθώς και του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

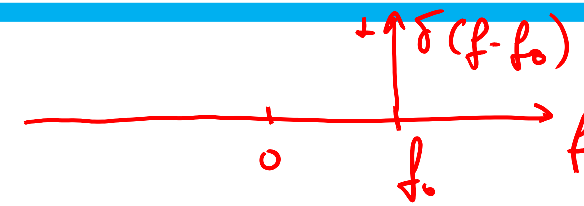
1) $X(f) = \delta(f) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = 1$

$$\boxed{1 \longleftrightarrow \delta(f)}$$

2) $X(f) = \delta(f - f_0) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0)\, e^{j2\pi f t}\, df = e^{j2\pi f_0 t}$

$$\boxed{e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} \delta(f-f_0)$$



$$A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

$$\xrightarrow{F} \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$