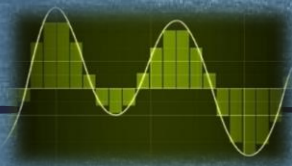
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

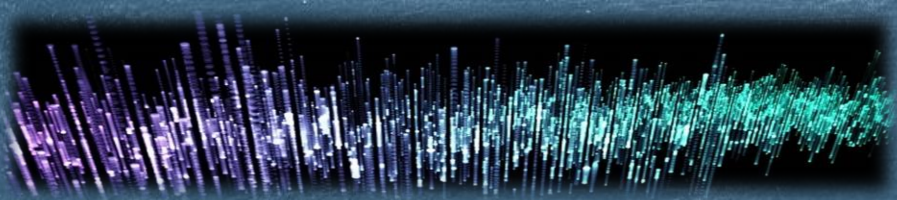
- Σειρές Fourier

Τι περιέχει το HY215?



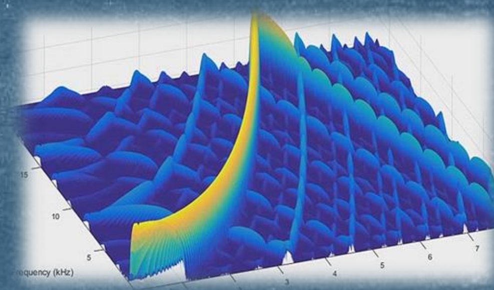
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Σειρές Fourier**

- Ένα **περιοδικό** σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

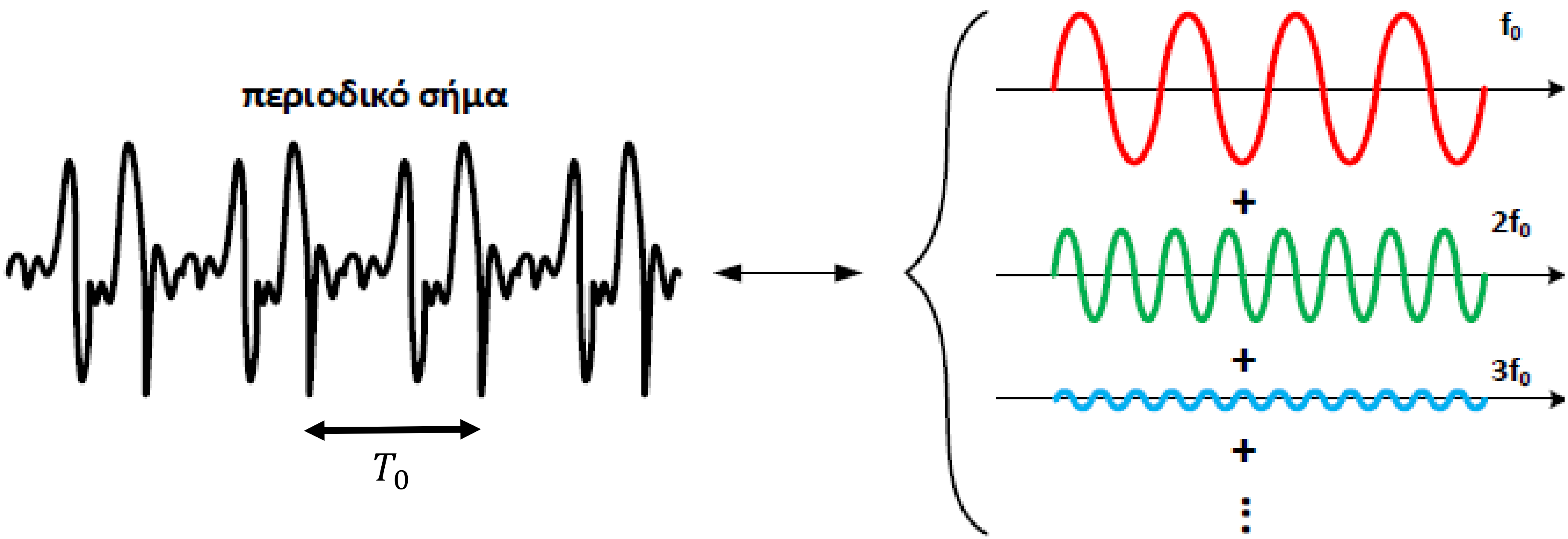
$$X_{-k} = X_k^*$$

- **Τριγωνομετρική σειρά Fourier** (ξανά, μόνο για **πραγματικά** σήματα):

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

REMINDER

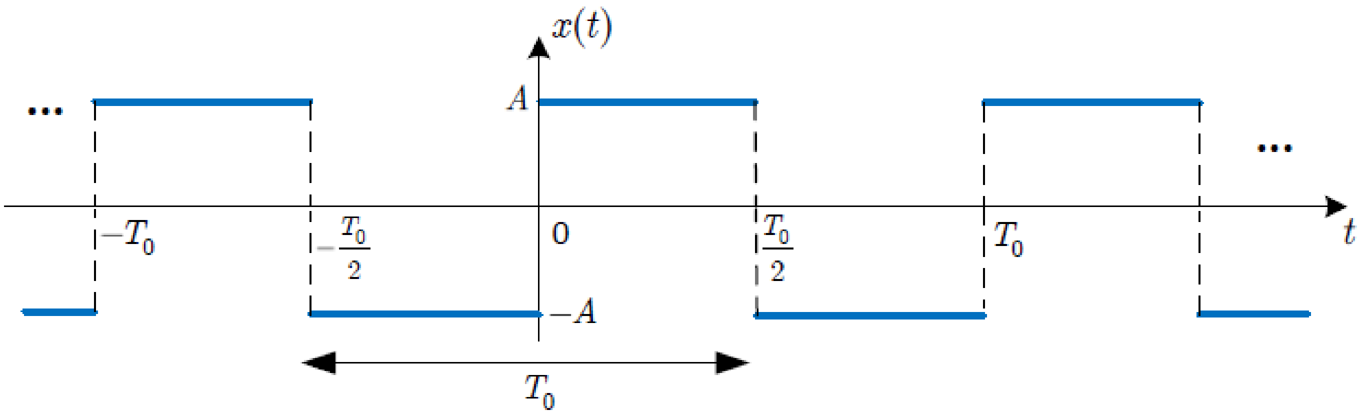
- **Σειρές Fourier**



REMINDER

- **Παράδειγμα:**

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

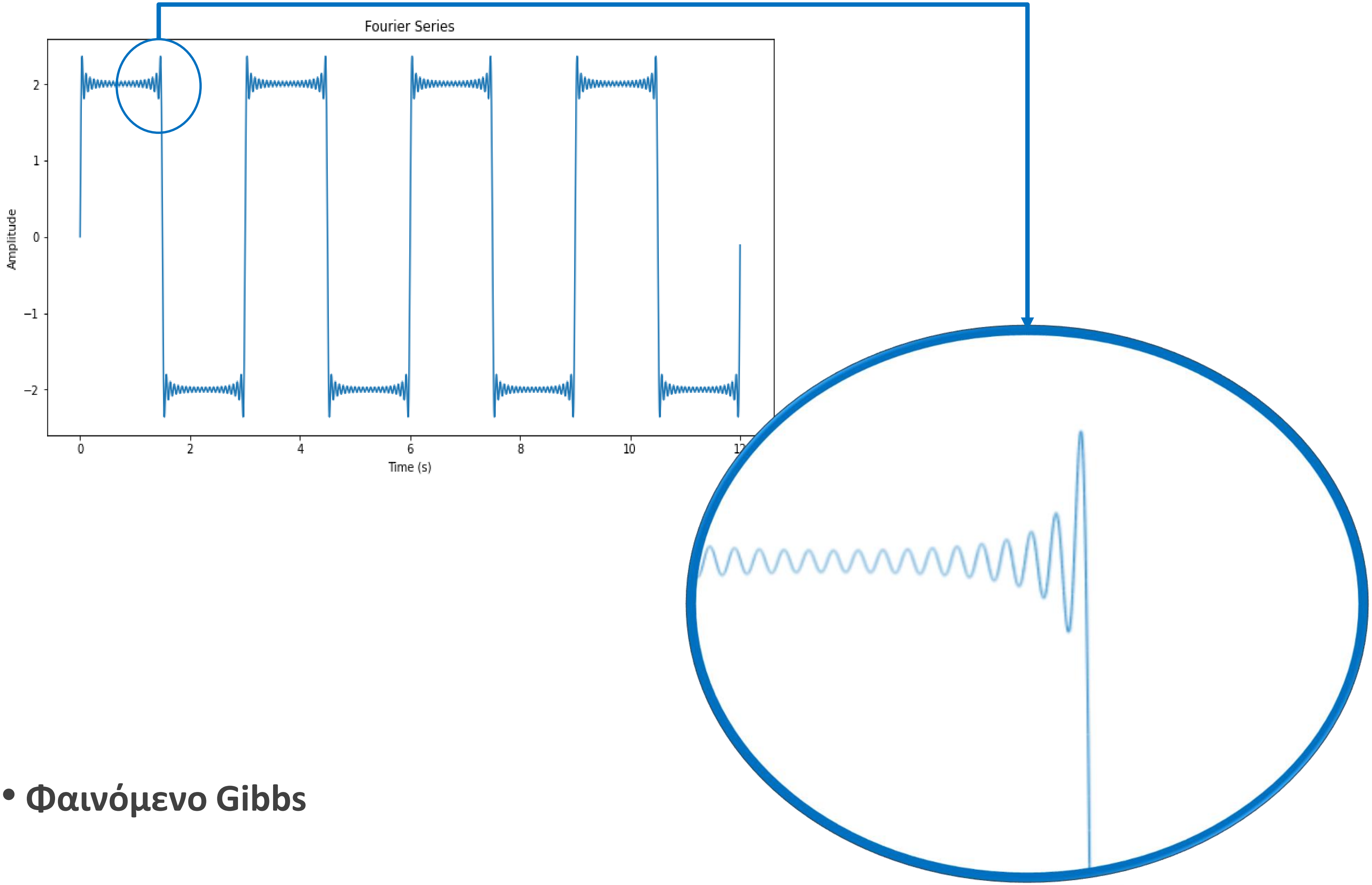


$$X_0 = 0, \qquad X_k = \frac{2A}{j\pi k} = \frac{2A}{\pi k} e^{-\frac{j\pi}{2}}, \qquad k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o$$

$$x(t) = \sum_{\substack{k=1,\\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o}}^{+\infty} \frac{4A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t)$$

REMINDER

- **Σειρές Fourier**



- **Φαινόμενο Gibbs**

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**
- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο…
  - …εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας t_0:

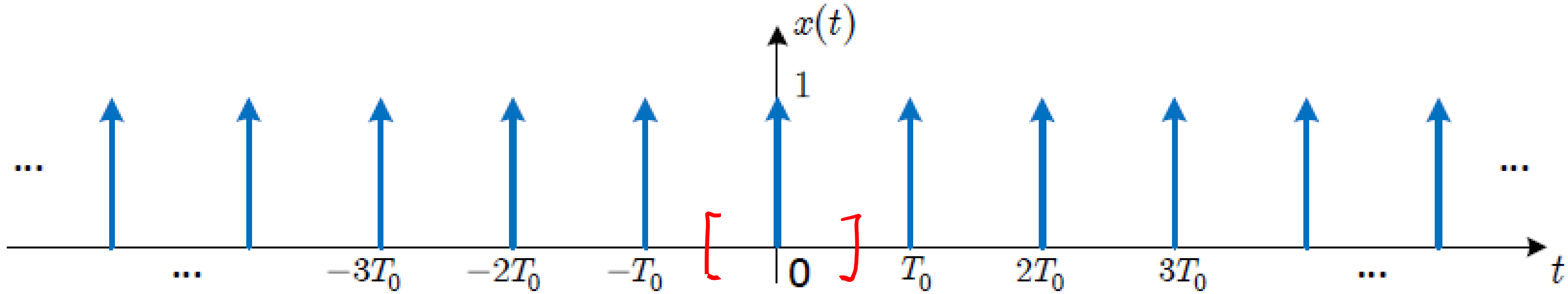
$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

- **Παράδειγμα:**
  - Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) \overbrace{e^{-j2\pi k f_0 t}}^{f(t)} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}\cdot 1 = \frac{1}{T_0}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$= f_0$$

- Παράδειγμα:

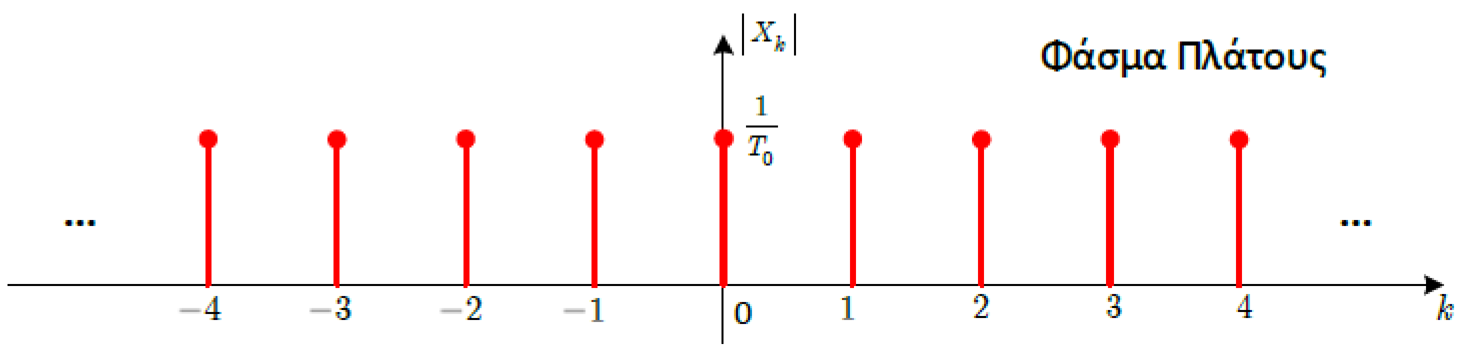
Δείξαμε ότι $X_k = \frac{1}{T_0}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Επειδή $X_k = \frac{1}{T_0} e^{j0}$, το φάσμα φάσης είναι 0 για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, ενώ το φάσμα πλάτους είναι

$$|X_k| = \frac{1}{T_0}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Τέλος,

$$x(t) = \frac{1}{T_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{T_0} \cos(2\pi k f_0 t).$$

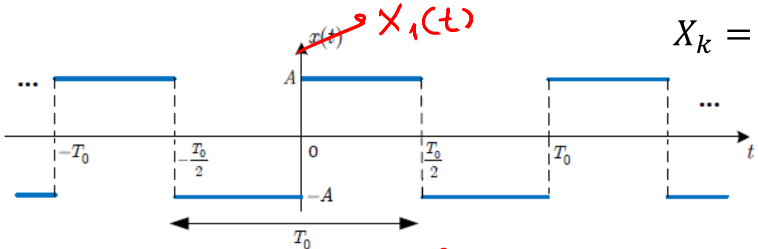


• «Γνωστές» Σειρές Fourier

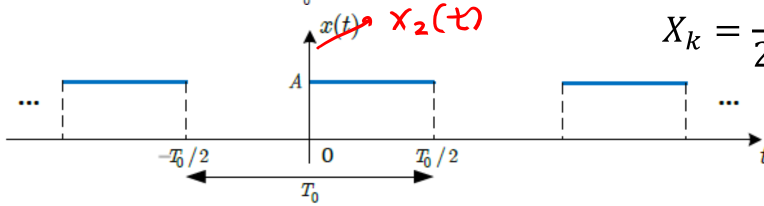
• Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

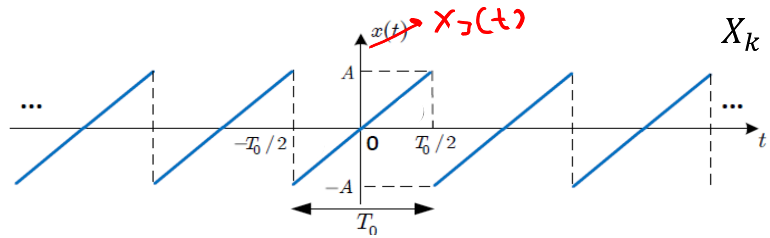
Περιοδικό σήμα
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \ -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$



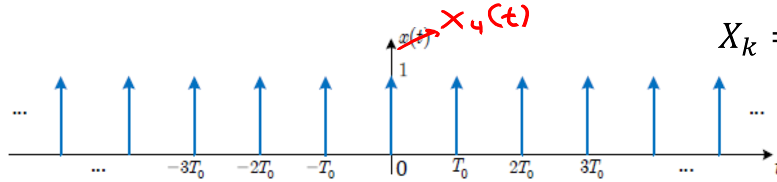
$$X_k = \frac{A}{k\pi}(1 - (-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{A}{2k\pi}(1 - (-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}, \forall\, k$$

- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \|X_k\| = \|X_{-k}\|, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$ $\varphi_k = -\varphi_{-k}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t),\ x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t),\ x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\},\ x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\},\ x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \|x(t)\|^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|X_k\|^2$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z_k = ?$$

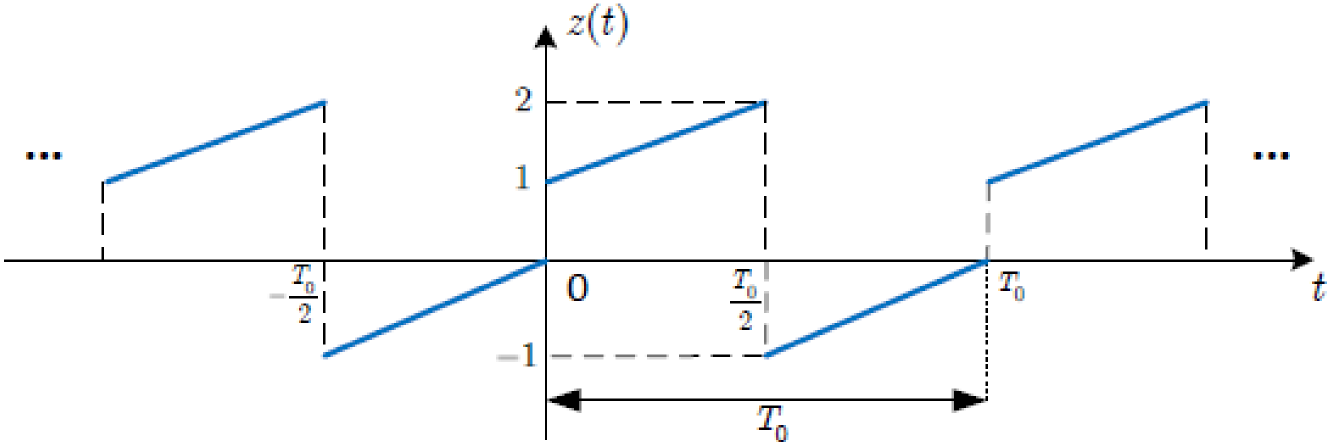
$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int z(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int \big(Ax(t) + By(t)\big)\, e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int Ax(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int By(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}A\int x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}B\int y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= AX_k + BY_k$$

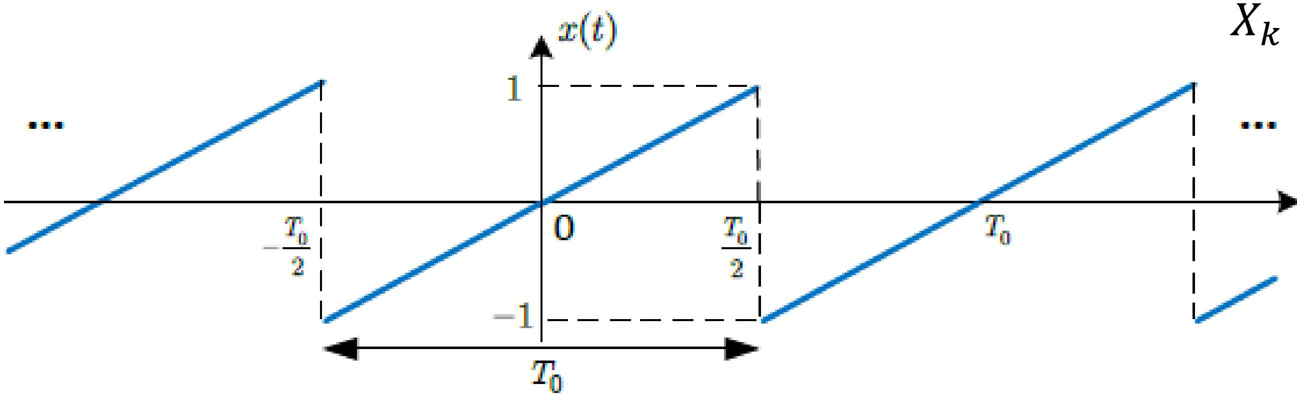
- **Ιδιότητες**



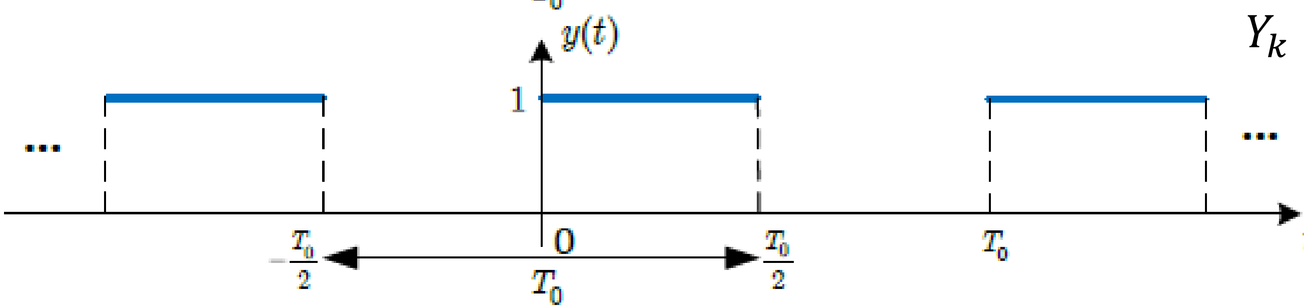
$$Z_k = ?$$

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



$$Y_k = \frac{1}{2\pi k}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

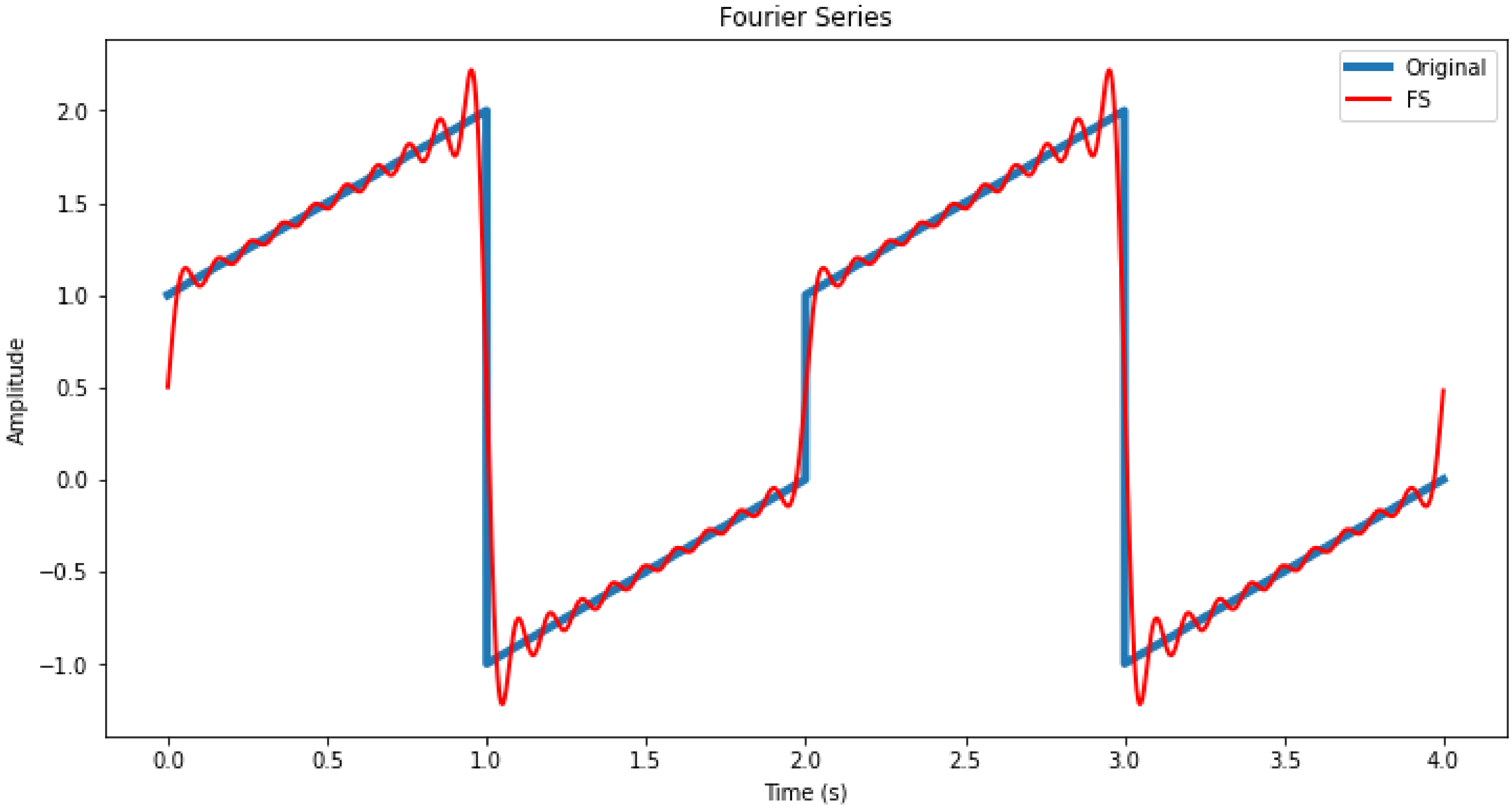


- **Python κώδικας**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 2
T0 = 2
f0 = 1/T0
N = 20
k = np.arange(-N,0,1, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+1,1, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t1 = np.arange(0,T0/2, dt)
t2 = np.arange(T0/2, T0, dt)
z1 = 1 + t1
z2 = -2 + t2
z = np.concatenate((z1,z2))
z = np.concatenate((z,z))
t = np.arange(0, 2*T0, dt)

t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)
```

```
# Fourier Coefficients
Xk = 1/(np.pi*k) * np.power(-1,k) * np.exp(1j*np.pi/2.0)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

Yk = 1/(2*np.pi*k) * (1 - np.power(-1,k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
y = Yk.T @ E.T

# x(t) + y(t)
z_FS = x + y
Z0 = 1/2
z_FS = Z0 + z_FS

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,z, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.plot(t, z_FS.T, 'r', linewidth=2)
plt.legend(['Original', 'FS'])
```

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$
	$\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{Y_k}$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow Z_k = ?$$

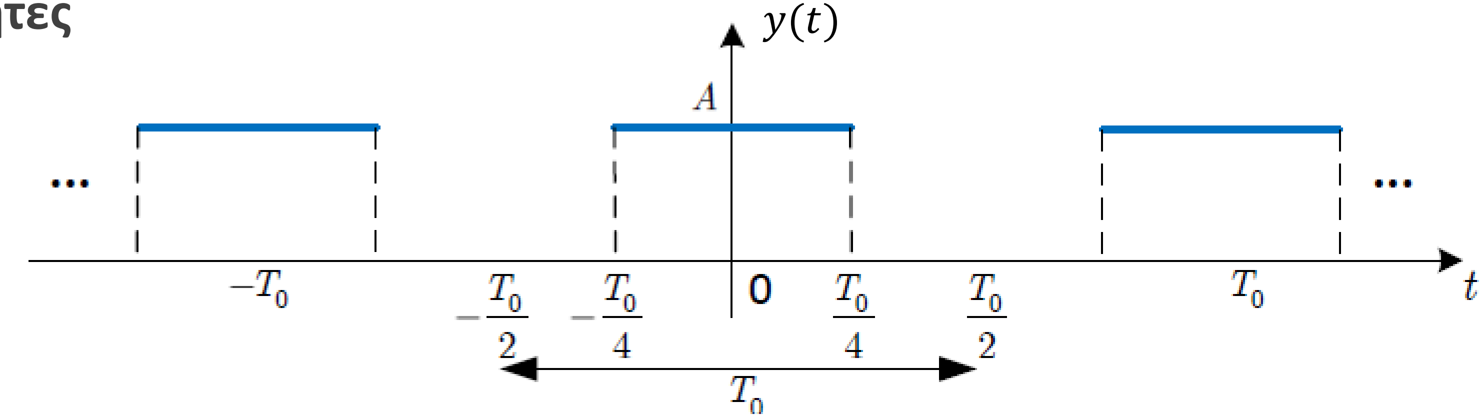
$$\left.\begin{array}{c} Z_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int x(t-t_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ u = t - t_0 \Rightarrow du = dt \end{array}\right\} = \frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}e^{-j2\pi k f_0 t_0}du$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0}\left[\frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du\right]$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0}X_k$$

- **Ιδιότητες**



Αναγνωρίζουμε ότι το παραπάνω σήμα είναι το "δεύτερο" (slide #10) στην αρχική μας λίστα από γνωστά σήματα, με γνωστούς συντελεστές

$$X_{2k} = \frac{1}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

μετατοπισμένο αριστερά κατά $t_0 = \frac{T_0}{4}$, δηλ. $y(t) = x_2\left(t + \frac{T_0}{4}\right)$

Οπότε

$$Y_k = X_{2k} \cdot e^{j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} = X_{2k}\, e^{j\frac{\pi k}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right) e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi k}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = x(-t) \rightarrow Z_k = ?$$

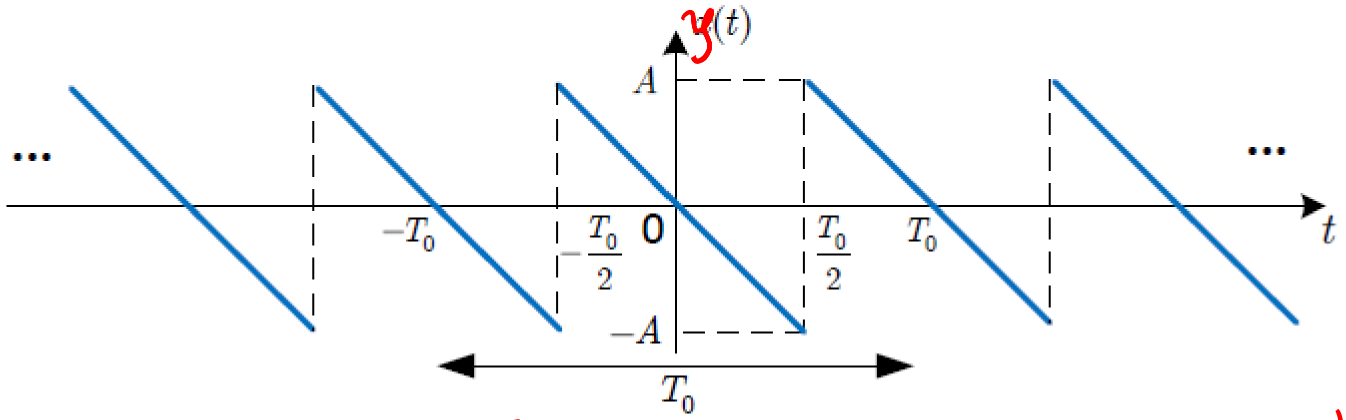
$$\left.\begin{array}{l} Z_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ u = -t \Rightarrow du = -dt \end{array}\right\} = -\frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{-j2\pi (-k) f_0 u}du$$

$$= X_{-k}$$

- **Ιδιότητες**



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_3(t)$, χρονικά ανεστραμμένο, δηλ.

$$y(t) = x_3(-t)$$

με

$$X_{3k} = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$Y_k = X_{3k}\Big|_{k=-k} = \frac{A}{-k\pi}(-1)^{-k} e^{j\frac{\pi}{2}} = -\frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a>0$	X_k, με περίοδο T_0/a

<u>Απόδειξη:</u>

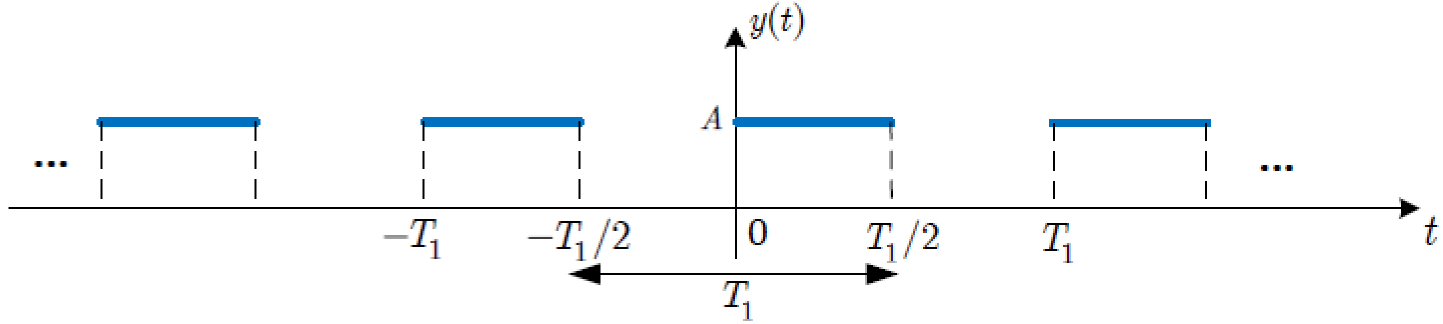
$$z(t) = x(at)\,, a > 0 \rightarrow Z_k = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_k = \dfrac{1}{T_0/a}\displaystyle\int_0^{T_0/a} x(at)e^{-j2\pi k a f_0 t}dt \\ u = at \Rightarrow du = adt \end{array}\right\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du = X_k$$

Π.χ.

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \dfrac{T_0}{2} \\ 0, & \dfrac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases} \Rightarrow x_{T_0}(at) = \begin{cases} at, & 0 < at < \dfrac{T_0}{2} \\ 0, & \dfrac{T_0}{2} < at < T_0 \end{cases} = \begin{cases} at, & 0 < t < \dfrac{T_0}{2a} \\ 0, & \dfrac{T_0}{2a} < t < \dfrac{T_0}{a} \end{cases}$$

- **Ιδιότητες**



Το $y(t)$ είναι μια χρονική κλιμάκωση του $x_2(t)$.

Άρα

$$Y_k = X_{2k}$$, αλλά η περίοδος είναι T_1 $(\neq T_0)$

- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow Z_k = ?$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{dx(t)}{dt}\, e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\frac{d}{dt}e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

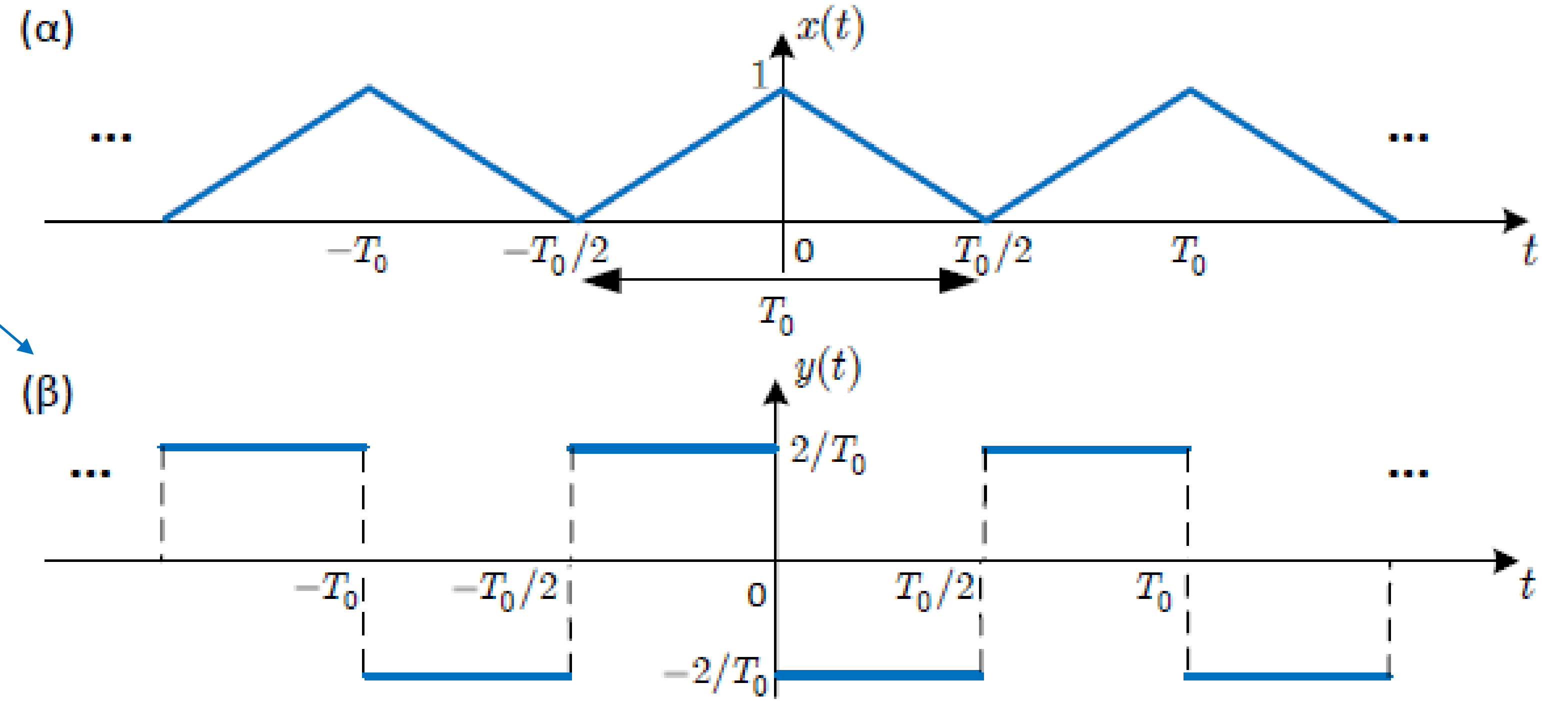
$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)(-j2\pi k f_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0 X_k = \frac{1}{T_0}\overbrace{\big(x(0) - x(T_0)\big)}^{0} + j2\pi k f_0 X_k = j2\pi k f_0 X_k$$

- **Ιδιότητες**

$$\frac{d}{dt}x(t)$$



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ είναι ίσο με το $-x_1(t)$ με πλάτος $A = \frac{2}{T_0}$, άρα

$$Y_k = -\frac{\frac{2}{T_0}}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}, \ \forall k.$$

$$= \frac{1}{\pi k T_0}\left((-1)^k-1\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}, \ \forall k.$$

• Ιδιότητες

Από την ιδιότητα της παραγώγισης, έχουμε ότι

$$Y_k = j2\pi k f_0 X_k \Rightarrow X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} Y_k$$

και άρα

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{\pi k T_0} \left((-1)^k - 1 \right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{j\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1 \right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

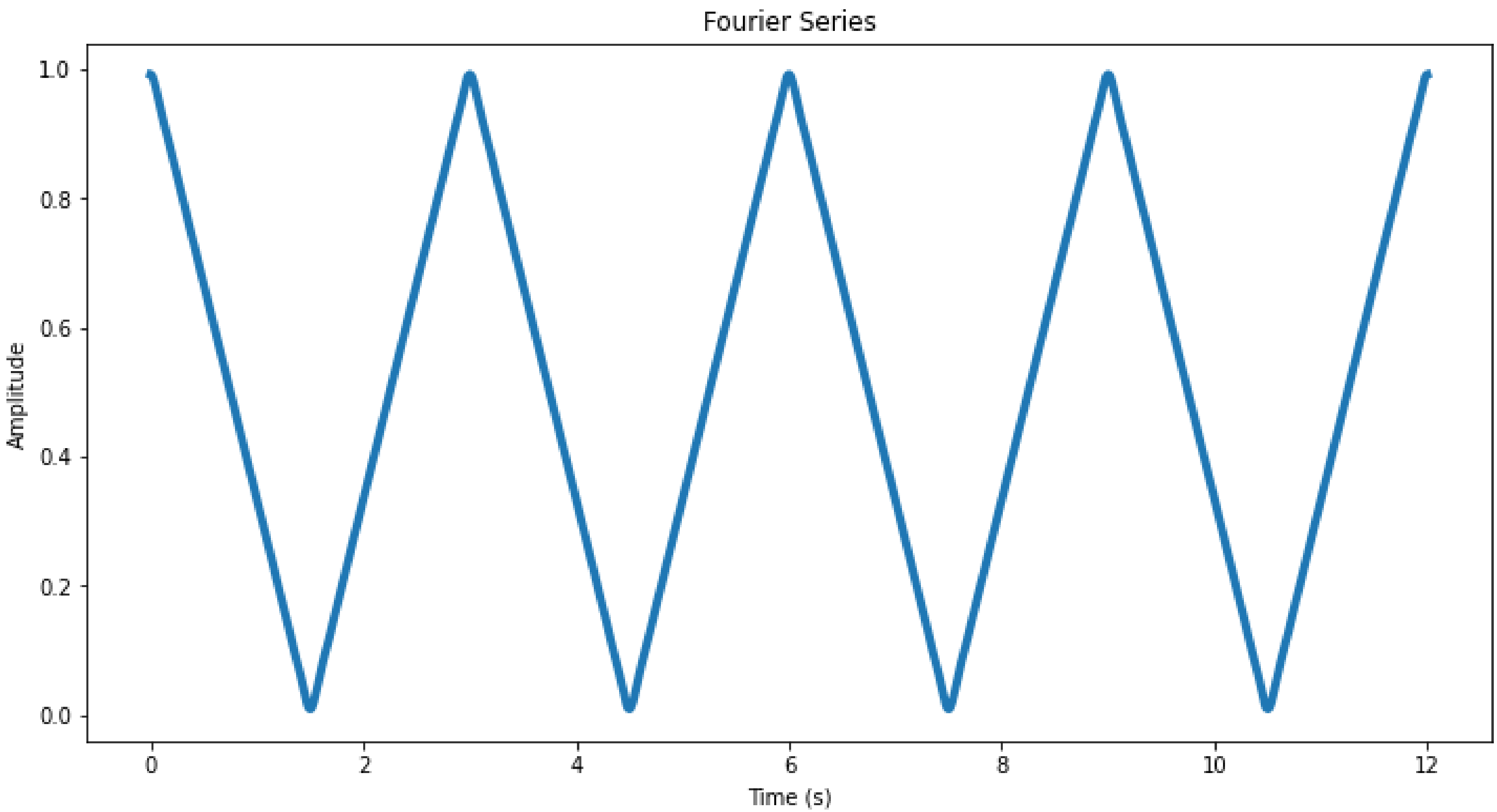
$$= \frac{1}{\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1 \right) e^{-j\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi^2 k^2} \left(1 - (-1)^k \right), \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 1
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 21
k = np.arange(-N,0,2, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+2,2, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)

# Fourier Coefficients
Xk = 2/(np.pi**2 * k**2)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

X0 = 1/2
x_FS = X0 + x

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,x_FS.T, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**



- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

<u>**Απόδειξη:**</u>

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l^* e^{-j2\pi l f_0 t}\right)} dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* e^{j2\pi(k-l)f_0 t}\right] dt$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \sum rest$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

0 [ορθογωνιότητα]

- **Ιδιότητες**

$$X_{-k} = X_k^* \Rightarrow |X_k| = |X_{-k}^*|$$

- Έστω το αναπτυγμένο σε σειρά Fourier πραγματικό σήμα

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{X_0} + \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{j\pi k}}_{X_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$\frac{2}{j\pi k} = \left(\frac{2}{j\pi(-k)}\right)^*$$

$$X_k = X_{-k}^*$$

α) Πόση είναι η μέση ισχύς του?

β) Δείξτε ότι το ποσοστό της συνολικής μέσης ισχύος που είναι κατανεμημένο στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (μαζί με το σταθερό όρο) είναι ~85%.

α) $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2$

$= X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |X_k|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_{-k}|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2$

$= X_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k^*|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 \underset{|X_k^*| = |X_k|}{=} X_0^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2$

- **Ιδιότητες**

$$1\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{2}{j\pi k}\right|^2 = \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2 k^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \overset{1}{=} \frac{1}{4} + \frac{8}{\cancel{\pi^2}}\cdot\frac{\cancel{\pi^2}}{6} = \frac{1}{4} + \frac{8}{6} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{19}{12} \simeq 1.5833$$

β) $x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$

1 όρος $\longrightarrow X_0$

$2|X_1|,\ 2|X_2|,\ 2|X_3| \longleftarrow 3$ όροι $\Big\}$ 4 όροι

$$P_{4\text{ πρώτων όρων}} = X_0^2 + \sum_{\substack{k=-3\\k\neq 0}}^{3}|X_k|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{3}2|X_k|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{3}2\frac{4}{\pi^2 k^2} = 1.3533$$

$\simeq 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ