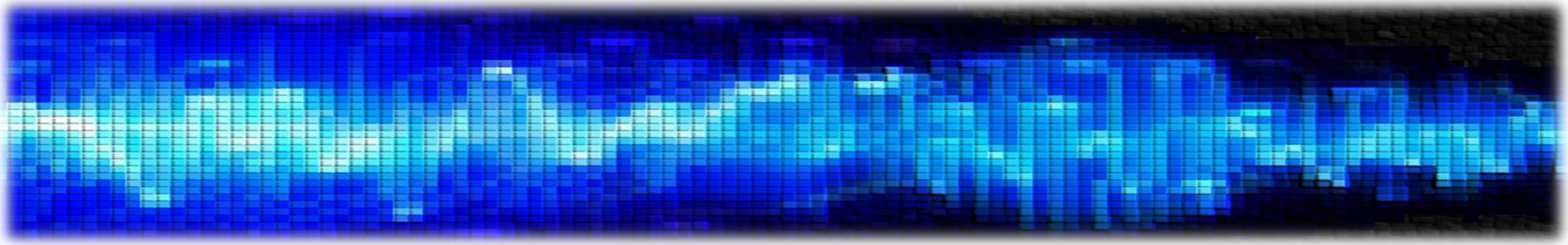
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η

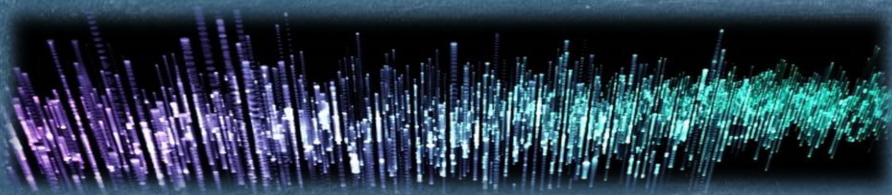


- Ο χώρος της συχνότητας

Τι περιέχει το ΗΥ215?

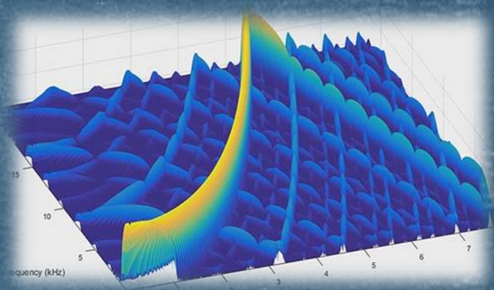
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία

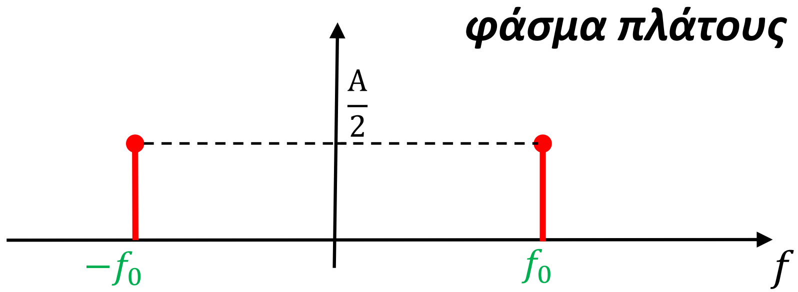


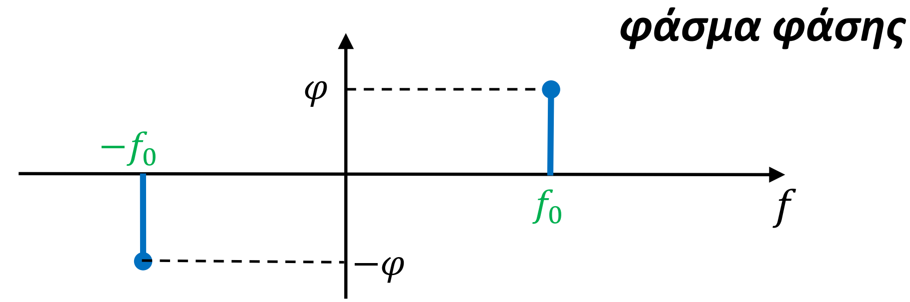
- **Ο χώρος της συχνότητας**

REMINDER

- Συνοπτικά

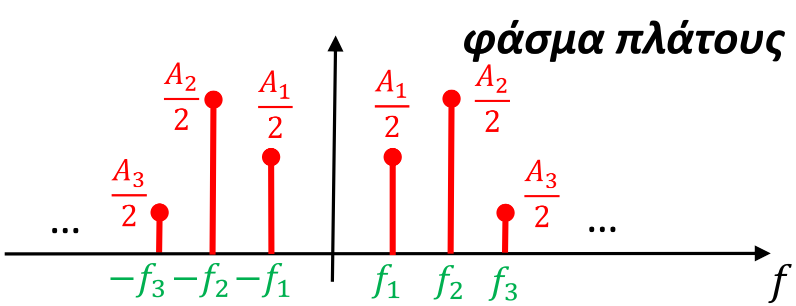
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}, \qquad A > 0$$

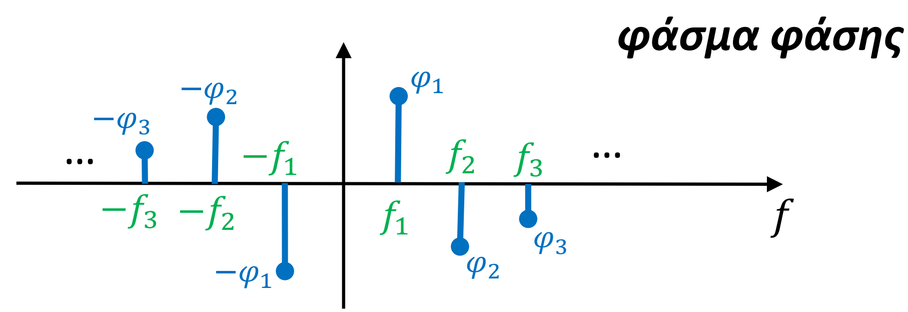




- Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$





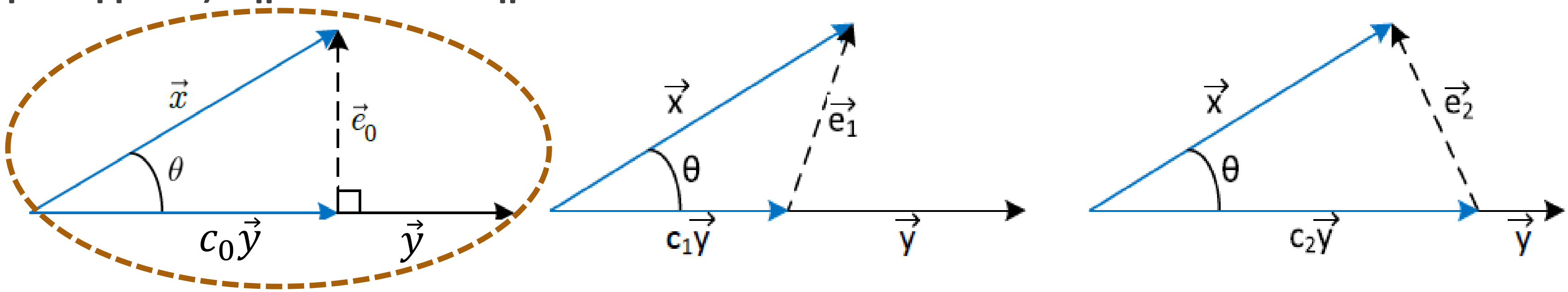
REMINDER

- **Ερώτημα: μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση: μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Καλύτερη προσέγγιση του $\vec{x}$ από $\vec{y}$: αυτή με το **μικρότερο – κατά μέτρο – διάνυσμα σφάλματος**
- Άρα το διάνυσμα $\vec{x}$ προσεγγίζεται **βέλτιστα** από το διάνυσμα $c_0\vec{y}$ με

$$c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που προσεγγίζουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Ποιο είναι το ***βέλτιστο c*** **–** με κάποια έννοια **–** για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- **Συνάρτηση σφάλματος** (όμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

REMINDER

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Ενέργεια σφάλματος**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dc} E_e = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \langle x, y \rangle$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

$$\frac{d}{dc}\int_{t_1}^{t_2}\big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\big(x(t) - cy(t)\big)\frac{d}{dc}(x(t) - cy(t))dt = 0$$

$$2\int_{t_1}^{t_2}\big(x(t) - cy(t)\big)(0 - y(t))dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\big(-x(t)y(t) + cy^2(t)\big)dt = 0$$

$$\mathrm{c} = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

$$c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y}\langle x, y\rangle$$

- **Παράδειγμα**

  - Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$

- Ζητούμε δηλαδή το βέλτιστο c έτσι ώστε $y(t) \approx cx(t)$
- Το γνωρίζουμε ήδη!

$$c = \frac{1}{E_x}\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_x}\int_0^{\pi} \sin(t)dt - \frac{1}{E_x}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt = \frac{4}{E_x}$$

- Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$E_x = \int_0^{2\pi} x^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \pi$$

- Άρα συνολικά

$$c = \frac{4}{\pi}$$

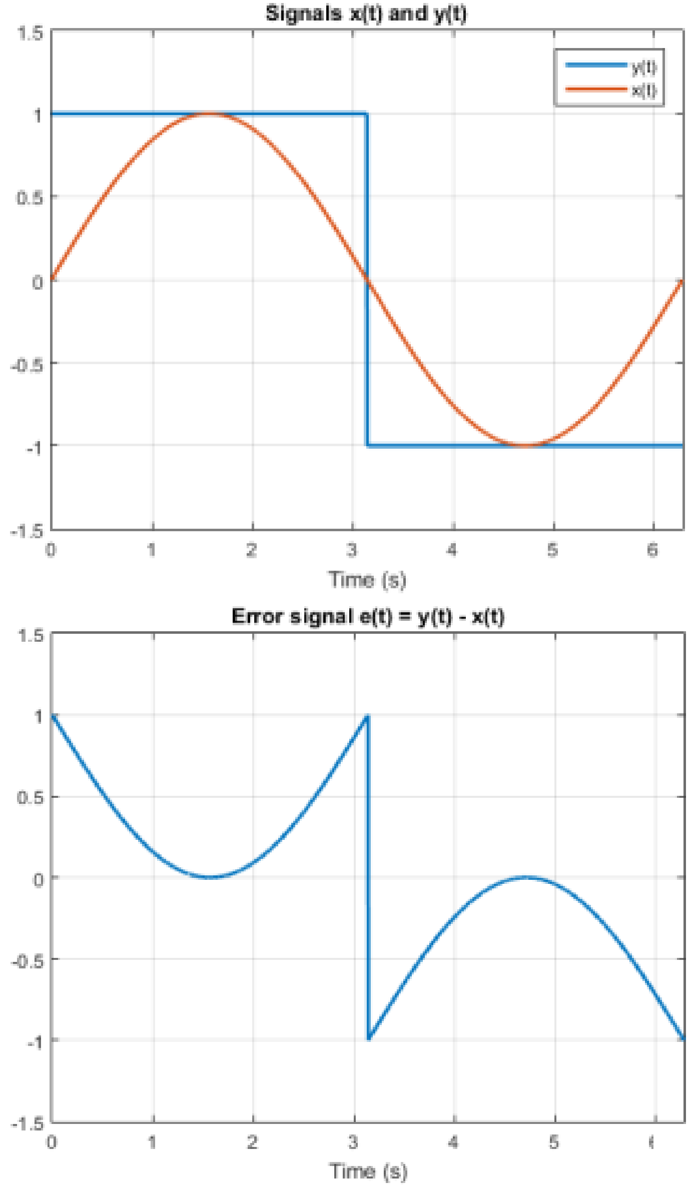
και άρα

$$y(t) \approx \frac{4}{\pi}x(t)$$

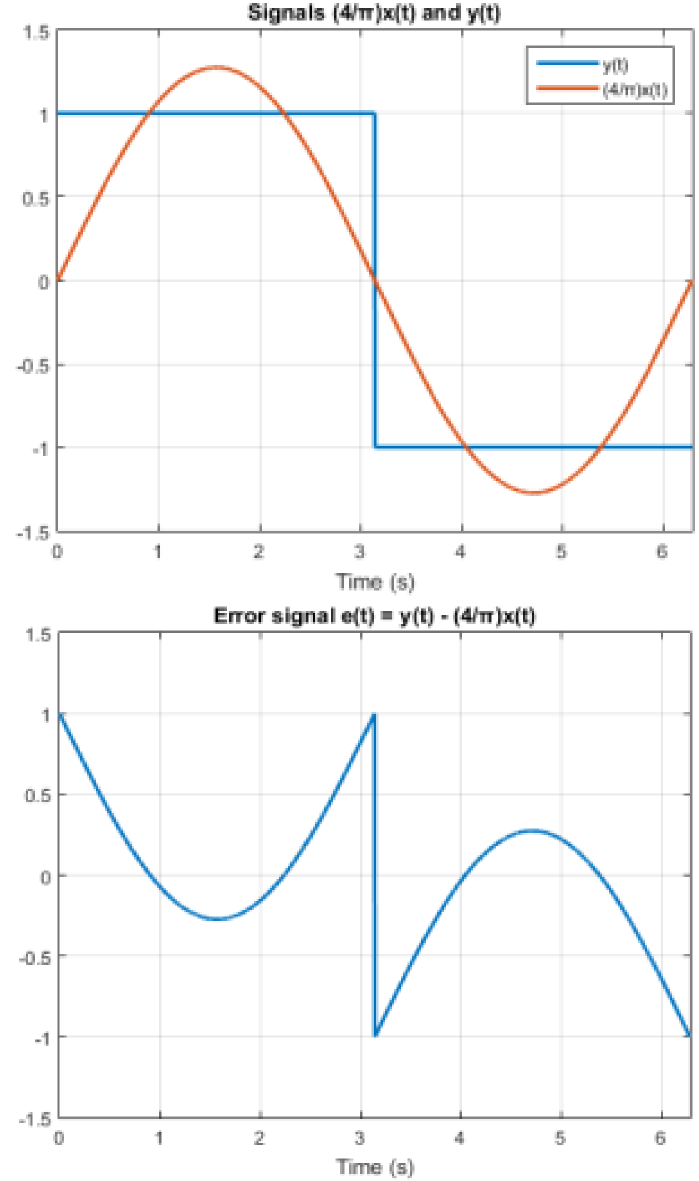
Δοκιμάστε να βρείτε το βέλτιστο c έτσι ώστε $x(t) \approx cy(t)$

- Παράδειγμα

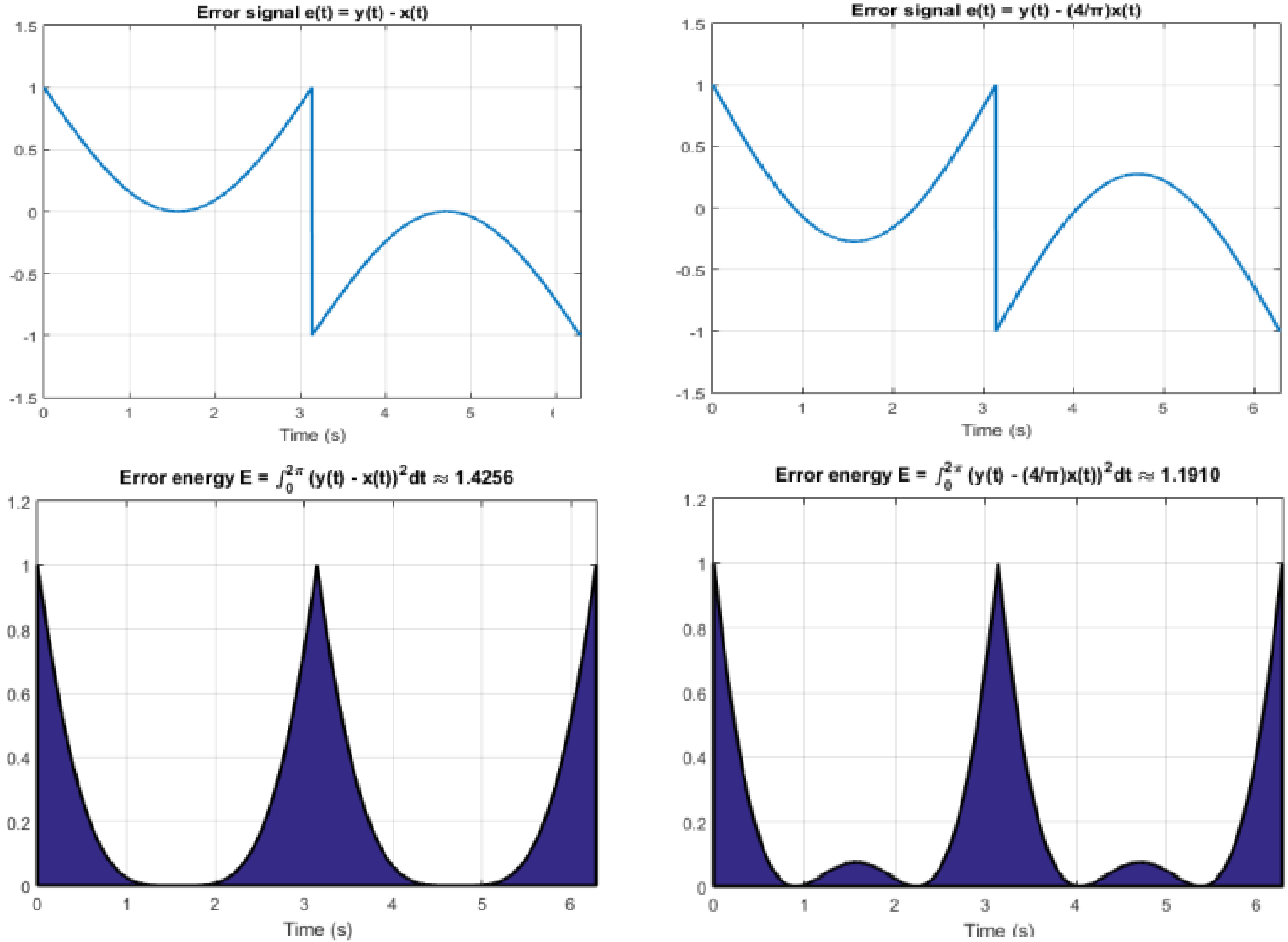
$c = 1$



$c = \frac{4}{\pi}$



- Παράδειγμα



Error signal e(t) = y(t) - x(t)
Error signal e(t) = y(t) - (4/π)x(t)
Error energy E = $\int_0^{2\pi} (y(t) - x(t))^2 dt \approx 1.4256$
Error energy E = $\int_0^{2\pi} (y(t) - (4/\pi)x(t))^2 dt \approx 1.1910$
Time (s)
Time (s)
Time (s)
Time (s)

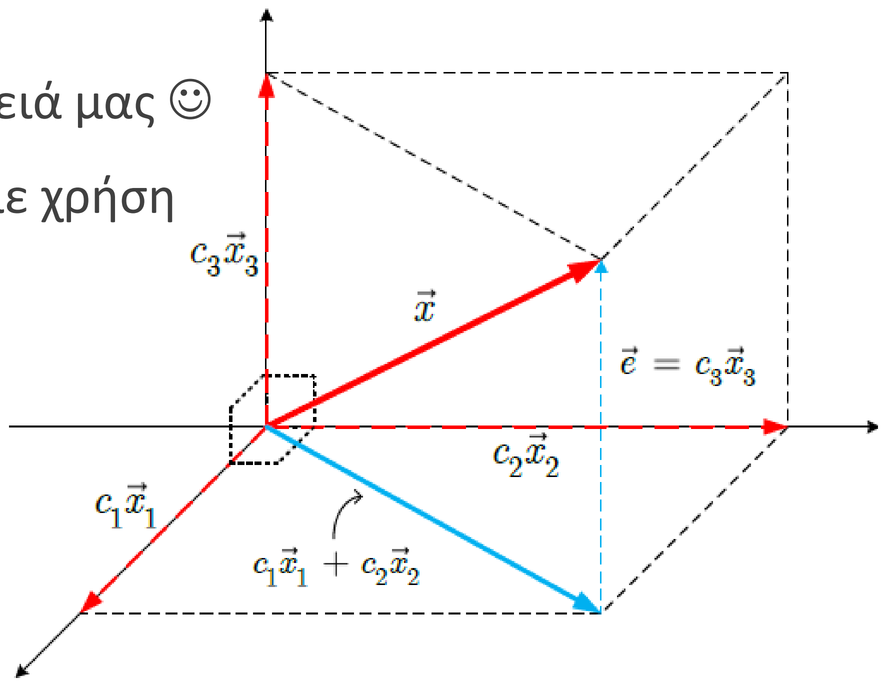
- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης $cy(t)$?
- Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k(t)$$

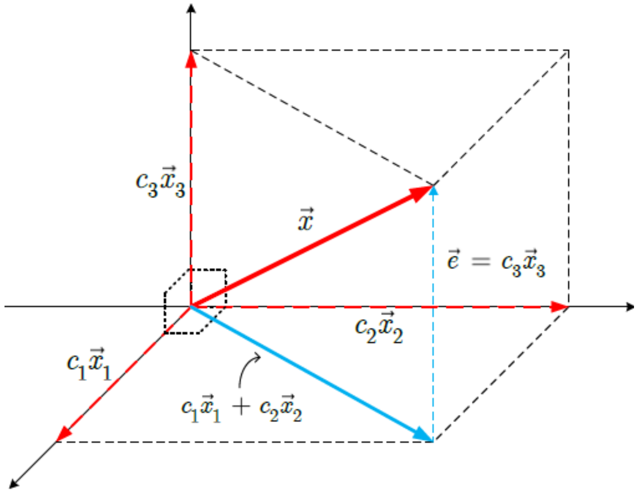
- Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερο όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$
  - Αρκεί οι όροι να είναι «κατάλληλοι»
- Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας ☺
- Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων
  - Ένα για το μήκος
  - Ένα για το πλάτος
  - Ένα για το ύψος

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

- Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Αν χρησιμοποιήσουμε δυο αντί για τρια διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος $\vec{x}$ τότε θα έχουμε σφάλμα
  - Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
  - Αυτό θα είναι το διάνυσμα σφάλματος
- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$

- **Ερώτηση: ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς?**
- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1, 0, 0], \qquad x_2 = [0, 1, 0], \qquad x_3 = [0, 0, 1]$$

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν <u>χωρίς σφάλμα</u>?

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- ❑ Είναι **ορθογώνια** → το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν
  - Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
  - Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο

- ❑ Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου
  - Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου
  - Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός *όλων* των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα... ☺

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $2N + 1$ μιγαδικά εκθετικά σήματα

$$\mathbb{E} = \left\{e^{j2\pi \boldsymbol{k f_0} t}\right\}_{k=-N}^{N} = \left\{e^{j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=1}^{N} \cup \left\{e^{-j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=1}^{N} \cup \{1\} \quad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα άθροισμα $2N + 1$ τέτοιων σημάτων:

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Συνάρτηση σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**
- **Βελτιστοποίηση (ξανά ☺)**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

1. Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει στοιχεία ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

2. Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι πλήρες όταν $N \to +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \left\{ e^{j2\pi k f_0 t} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί βάση του χώρου

- Οπότε

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- **Σειρές Fourier**
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\left\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\right\rangle$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει και μιγαδικά περιοδικά σήματα
- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Ας το δείξουμε

- **Σειρές Fourier**

$$X_{-k} = X_k^*$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \quad (1)$$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \quad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

- **Σειρές Fourier**

- Όταν το σήμα είναι πραγματικό, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

με $|X_k|$ το μέτρο και ϕ_k τη φάση του k −οστού συντελεστή

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

- **Σειρές Fourier**

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[e^{-j2\pi k f_0 t - j\phi_k} + e^{j2\pi k f_0 t + j\phi_k} \right]$$

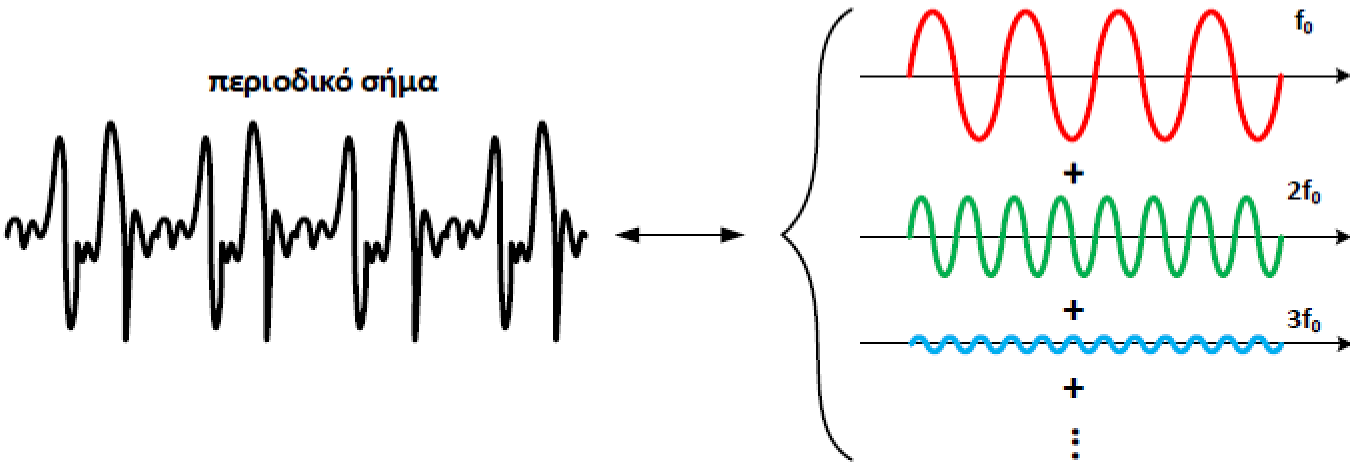
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- **Προσοχή:** η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα
  - … και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier

- **Σειρές Fourier**

- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες kf_0



- Εναλλακτικά, αναλύει ένα οποιοδήποτέ περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες kf_0

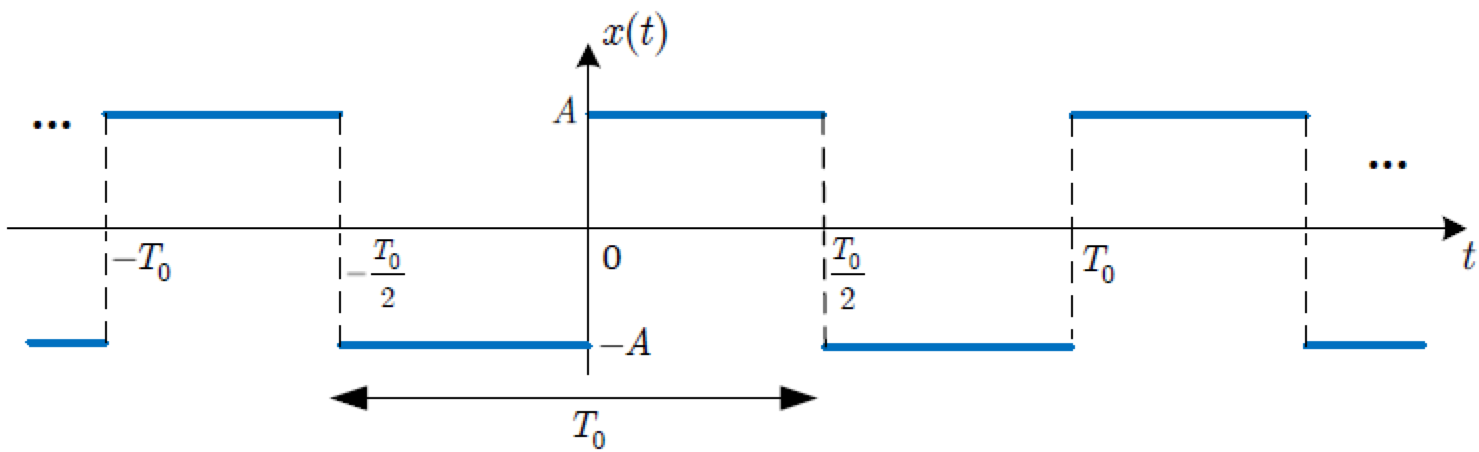
- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt$$

- **Παράδειγμα:**

  - Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$



Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} -A\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} A\,dt = \frac{1}{T_0}(-A)t\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{0} +$$

$$+ \frac{1}{T_0}At\Big|_{0}^{\frac{T_0}{2}} = -\frac{A}{T_0}\left(0 + \frac{T_0}{2}\right) + \frac{A}{T_0}\left(\frac{T_0}{2} - 0\right) = -\frac{A}{2} + \frac{A}{2} = 0$$

• Παράδειγμα:

(1) $e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$

(2) $f_0 T_0 = 1$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} -A\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \int_0^{\frac{T_0}{2}} A\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right) = \frac{1}{T_0}\left(-A\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt + A\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right)$$

$$= \frac{A}{T_0}\left(-\frac{1}{-j2\pi k f_0}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-T_0/2}^{0} + \frac{1}{-j2\pi k f_0}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}}\right)$$

$$= \frac{A}{T_0}\left(\frac{1}{j2\pi k f_0}\left(1 - e^{j\cancel{2}\pi k f_0 \frac{T_0}{\cancel{2}}}\right) - \frac{1}{j2\pi k f_0}\left(e^{-j\cancel{2}\pi k f_0 \frac{T_0}{\cancel{2}}} - 1\right)\right)$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{A}{j2\pi k \cancel{f_0 T_0}^{\,1}}\left(1 - e^{j\pi k \cancel{f_0 T_0}^{\,1}} - e^{-j\pi k \cancel{f_0 T_0}^{\,1}} + 1\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(2 - \underbrace{\left(e^{j\pi k} + e^{-j\pi k}\right)}_{2\cos(\pi k)\,:\ \text{Euler}}\right) = \frac{A}{j\cancel{2}\pi k}\left(\cancel{2} - \cancel{2}\cos(\pi k)\right)$$

- Παράδειγμα:

$$e^{\pm j\pi k} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = (-1)^k$$

$$= \frac{A}{j\pi k}\left(1-\cos(\pi k)\right) = \frac{A}{j\pi k}\left(1-(-1)^k\right) =$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{2A}{j\pi k}, & k \text{ περιττός} \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ odd} \end{cases}$$

Εκθετική Σειρά Fourier

Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0 \\ k \text{ περιττός}}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_c t} = 0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0 \\ k \text{ περιττός}}}^{+\infty} \frac{2A}{j\pi k} e^{j2\pi k f_c t}$$

Επίσης,

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_c t + \varphi_k), \quad X_k = |X_k| e^{j\varphi_k}$$

$$= 0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} 2\left|\frac{2A}{j\pi k}\right| \cos\left(2\pi k f_c t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{4A}{\pi k} \sin(2\pi k f_c t).$$

• Παράδειγμα:

Βρήκαμε λοιπόν ότι $X_k = \frac{2A}{j\pi k} = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, k περιττά (0, για k άρτια)

Πολική μορφή:

$$|X_k| = \frac{2A}{\pi|k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$-\infty < k < +\infty$, οπότε χρειάζεται $|\cdot|$.

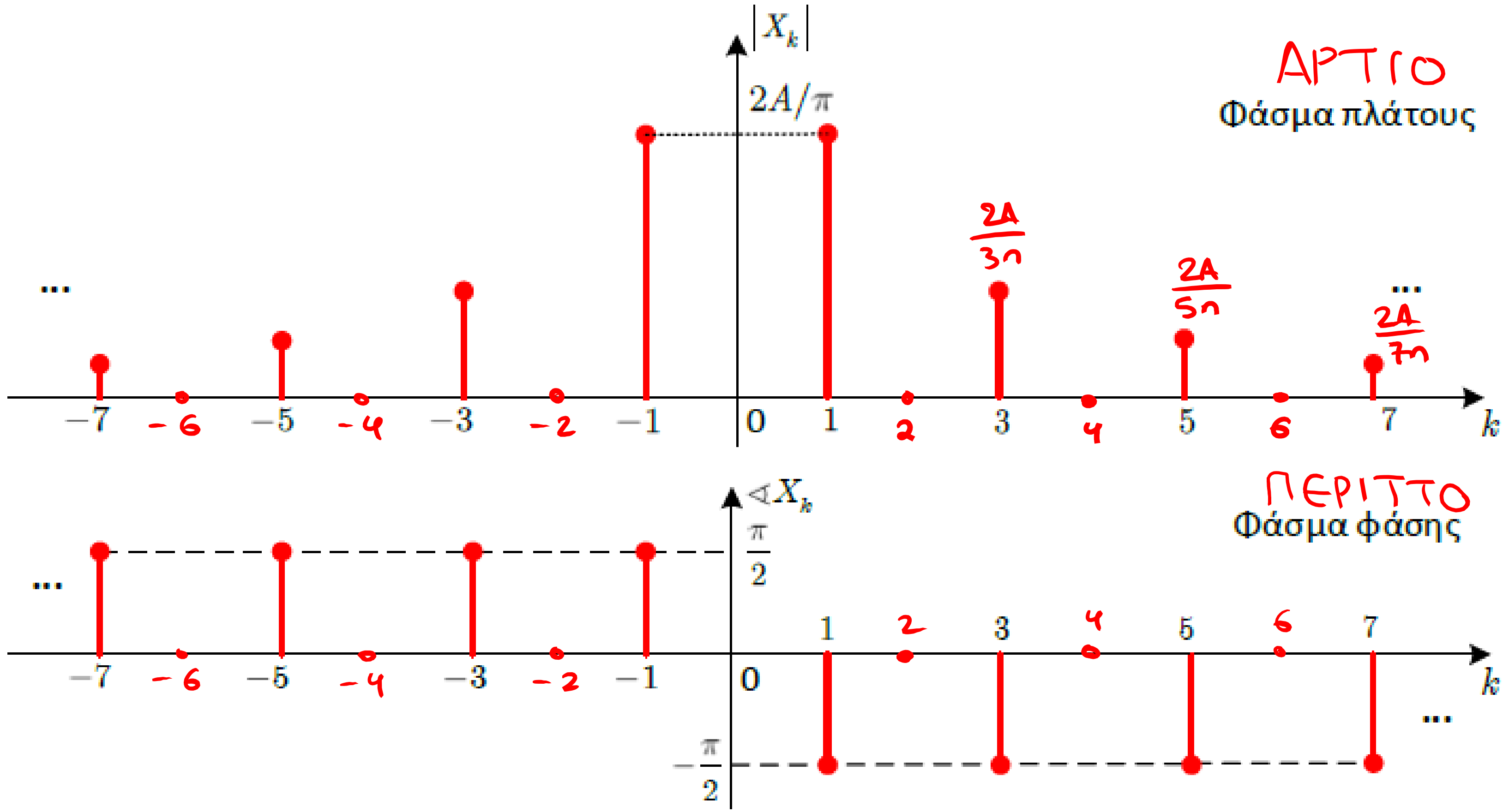
Για να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης, βάζουμε θετικές τιμές στο k (μερικές) και σχεδιάζουμε τις φασματικές γραμμές για $k > 0$.

Επειδή το σήμα x(t) είναι πραγματικό, τα φάσματα έχουν συμμετρία!

Φάσμα πλάτους $\downarrow$ άρτιο ως προς k

Φάσμα φάσης $\downarrow$ περιττό ως προς k

- Παράδειγμα:



- Προτιμούμε να αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες kf_0» αντί ως ένα συνεχή άξονα του f, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
  - Χρησιμοποιούμε το πολλαπλάσιο k της θεμελιώδους συχνότητας για βαθμονόμηση του άξονα

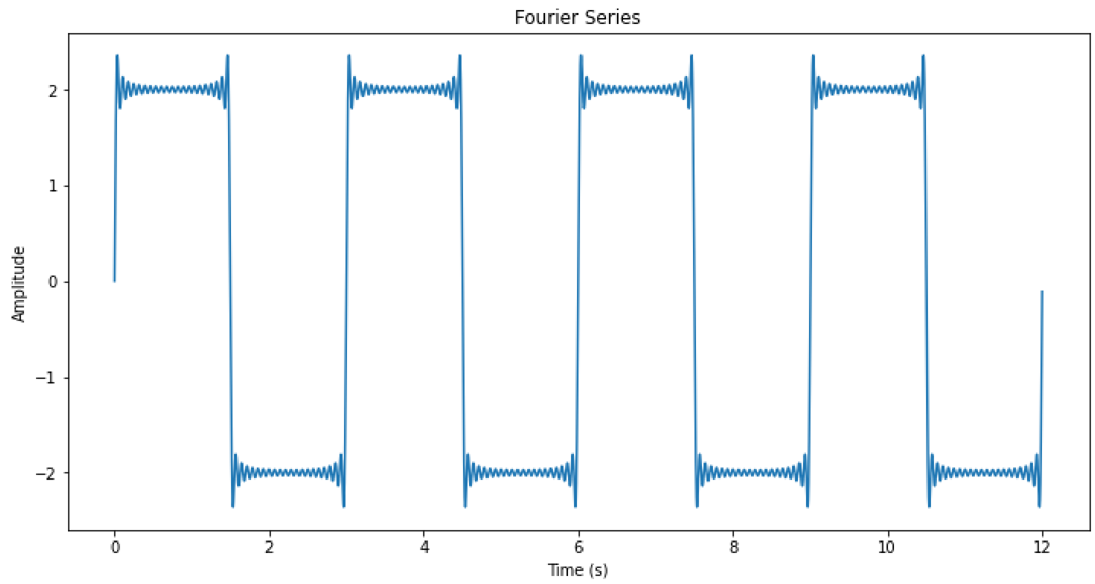
- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

- **Σειρές Fourier**

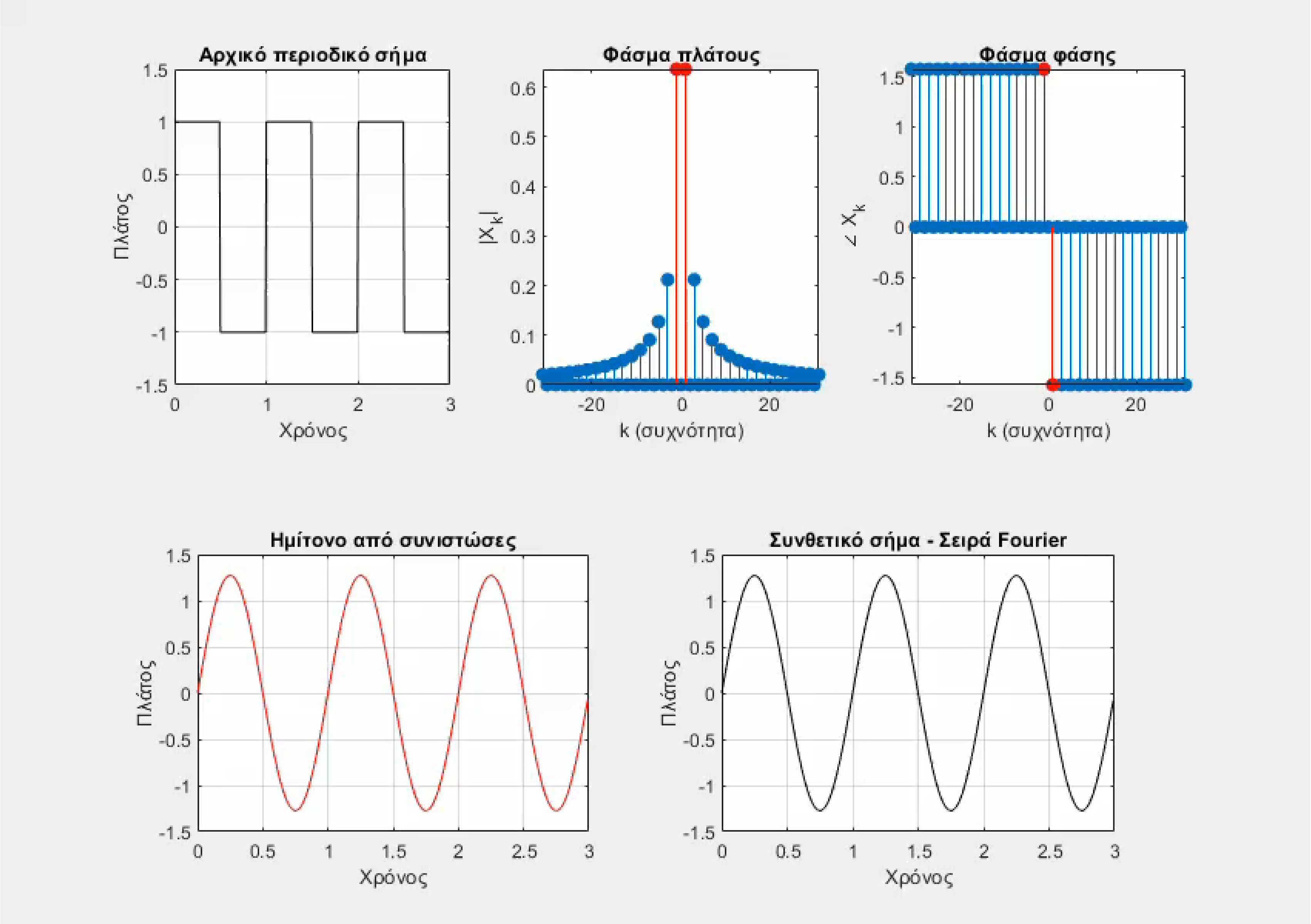
- **Python code**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 2
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 41
k = np.arange(-N,N+2,2)

# Time axis
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

# Fourier Coefficients
Xk = (2.0*A/(np.pi*k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
X0 = 0

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

for i in range(0,len(k)):
    x = x + Xk[i]*np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

x = x + X0
plt.plot(t,x)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

$$\sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$



- **Σειρές Fourier**



Συνεχίζεται... ☺