ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

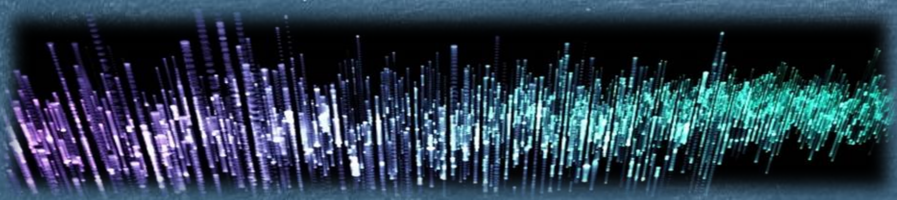
ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η

- Ο χώρος της συχνότητας

Τι περιέχει το ΗΥ215?

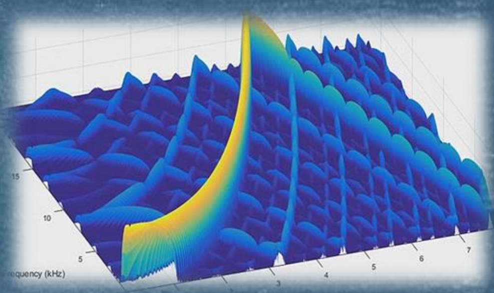
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



REMINDER

$$Ae^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{\mathbf{S}} \longrightarrow H(f_0)Ae^{j2\pi f_0 t}$$

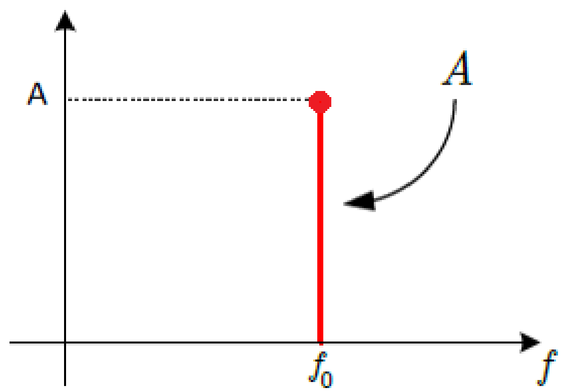
με

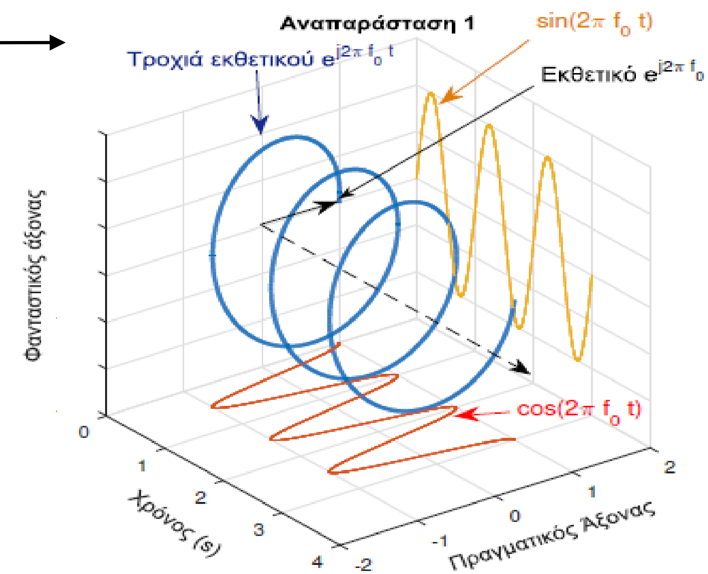
$$\boxed{H(\boldsymbol{f_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi \boldsymbol{f_0}\tau}\, d\tau}$$

ένα σταθερό μιγαδικό (εν γένει) αριθμό που εξαρτάται από το f_0, δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Μας λέει ότι ένα **μιγαδικό** σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος, και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!
  - Η οποία «απλά» αλλάζει το πλάτος ή/και τη φάση της εισόδου! ☺
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων?
  - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο <u>περιοδικά</u> σήματα και ας μελετήσουμε μερικές αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!

- Έστω το σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t},\ A \in \Re_+$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Θυμηθείτε:
- Οπότε:





- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\,, \qquad A > 0, \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$$

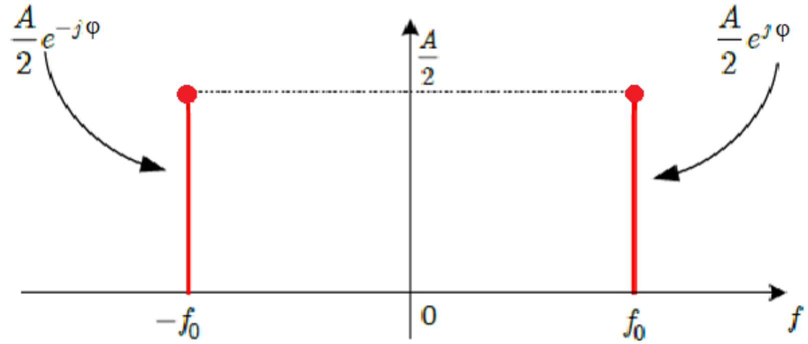
το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}} e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι



- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_{-1}e^{-j2\pi f_0 t} = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t}$$

με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2}e^{j\phi},\ \ X_1^* = \frac{A}{2}e^{-j\phi}, A > 0, \phi \in (-\pi, \pi]$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες)
  - … οι οποίοι είναι **συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί** για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)

- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**

- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
  - **Στο *φάσμα πλάτους* σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα**
  - **…και στο *φάσμα φάσης* τη φάση του φάσορα**

- **Παράδειγμα**

$$\pm\frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp\frac{j\pi}{2}}$$

○ Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 3 - 2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό → Οι συχνότητες 10 Hz, 15 Hz σχηματίζουν λόγο ακεραίων αριθμών $\left(\frac{10}{15}, \frac{15}{10}\right)$: ✓

$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{10, 15\} = 5\ \text{Hz}$

$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{5} = 0.2\ \text{sec}$

Είναι (λόγω Euler):

$$x(t) = 3 - 2\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t}\right) + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j2\pi 15t}$$

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j}e^{+j\frac{\pi}{6}} e^{-j2\pi 15t}$$

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 15t}$$

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

- **Παράδειγμα**

$$-1 = e^{\pm j\pi}$$
$$\phi \in (-\pi, \pi]$$

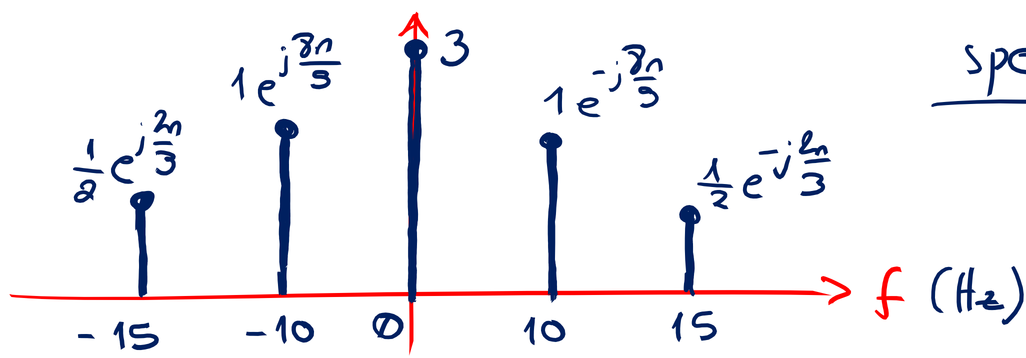
$$= 3 \underbrace{-}_{e^{-j\pi}} e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} \underbrace{-}_{e^{+j\pi}} e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \dots$$

$$= 3 + e^{-j\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + e^{j\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + \dots \qquad 3 = 3e^{j2\pi k}$$

$$= 3 + e^{-j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + e^{j\frac{8\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \dots$$

$$= 3 + e^{-j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + e^{j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 15t}$$

$$3 \cdot e^{j2\pi 0 t}$$



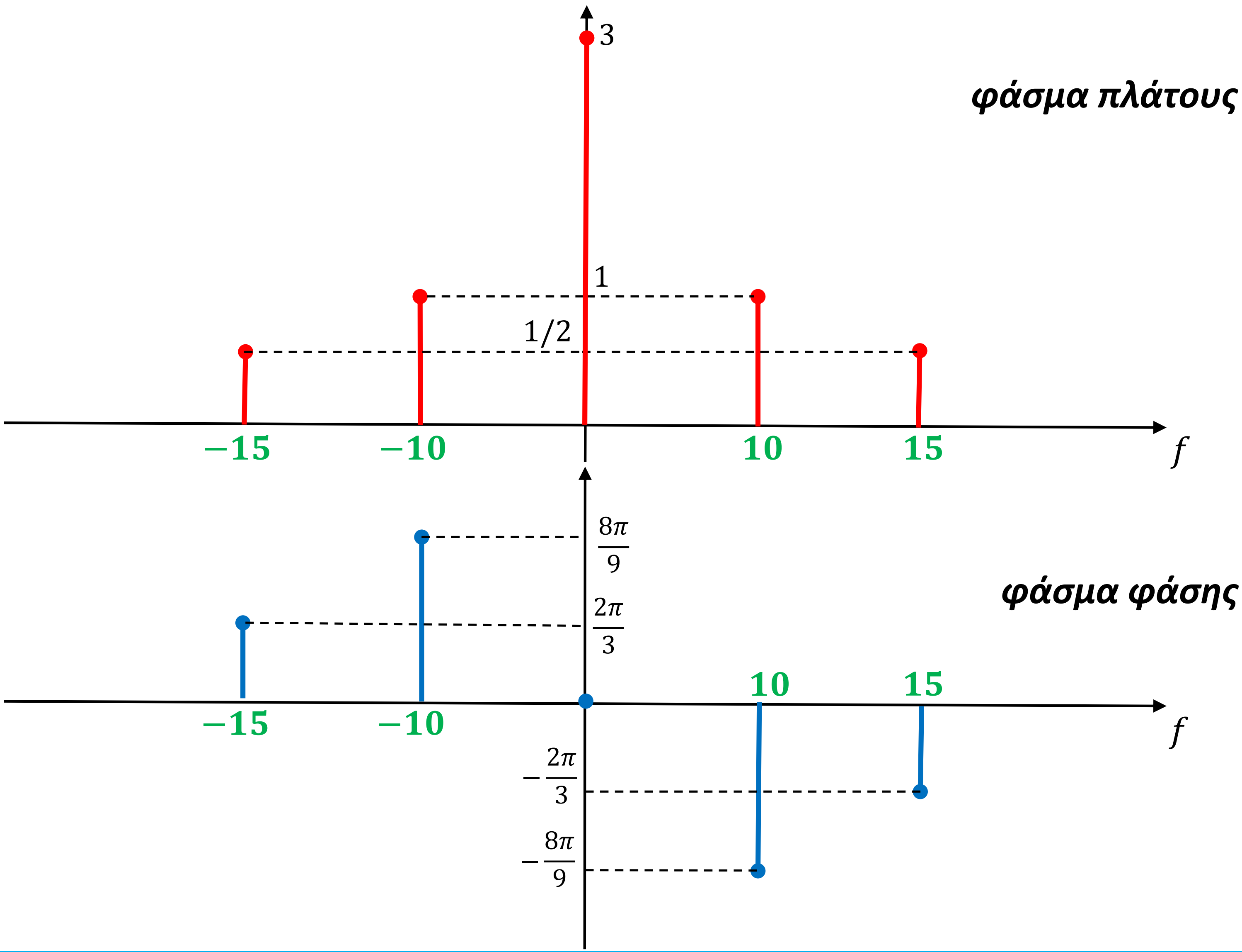
spectrum

- Οπότε τελικά

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

- Παράδειγμα

$$x(t) = 3e^{j0}e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$

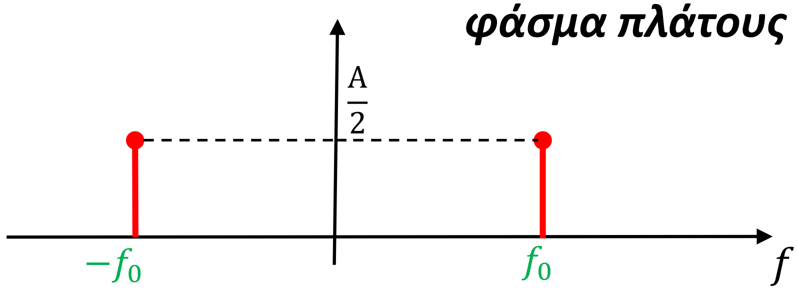


- **Ο χώρος της συχνότητας**

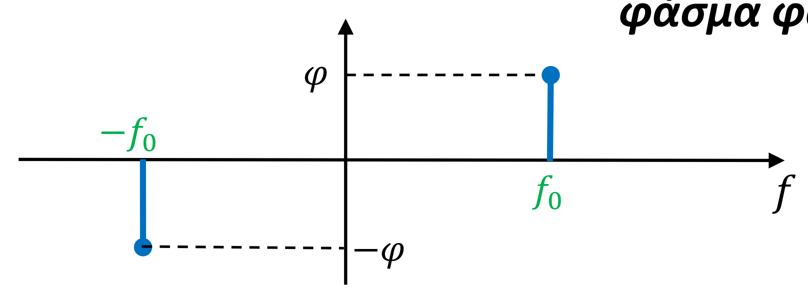
- Συνοπτικά

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}, \qquad A > 0$$

φάσμα πλάτους



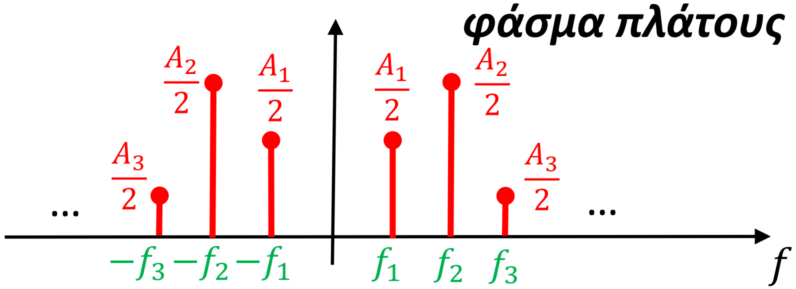
φάσμα φάσης



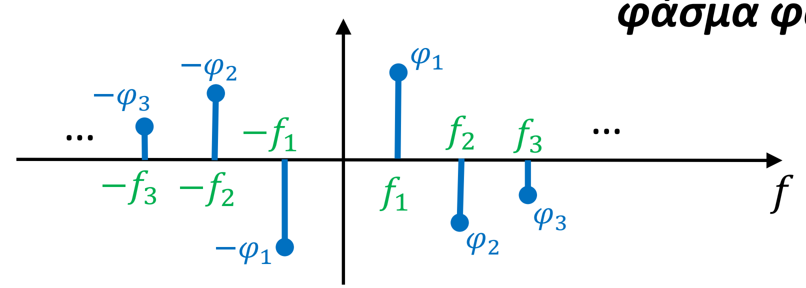
- Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$

φάσμα πλάτους



φάσμα φάσης



- Κάθε **<u>πραγματικό</u>** σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

a) Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του

b) Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του

- Η συμμετρία προκύπτει από τη ***συζυγία των φασόρων***

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0 t} + \boxed{1e^{-\frac{j8\pi}{9}}}e^{j2\pi 10 t} + \boxed{1e^{\frac{j8\pi}{9}}}e^{-j2\pi 10 t}$$

$$+ \boxed{\frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}}e^{j2\pi 15 t} + \boxed{\frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}}e^{-j2\pi 15 t}$$

- Επίσης παρατηρήστε ότι οι συχνότητες των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν *ακέραιες πολλαπλάσιες* της θεμελιώδους συχνότητας
  - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k, με k το αντίστοιχο ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας f_0
  - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως

$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$

$$x(t) = X_0 e^{j2\pi 0 t} + X_2 e^{j2\pi 2\cdot 5 t} + X_{-2} e^{-j2\pi 2\cdot 5 t} + X_3 e^{j2\pi 3\cdot 5 t} + X_{-3} e^{-j2\pi 3\cdot 5 t}$$

  - Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ είναι μηδενικοί
  - **Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 1 \cdot 5$ Hz, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!**

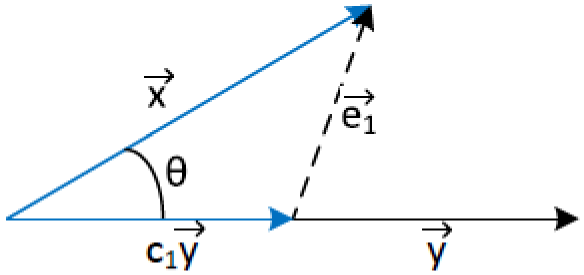
- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται ως άθροισμα ημιτόνων είναι απλή
- Ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία

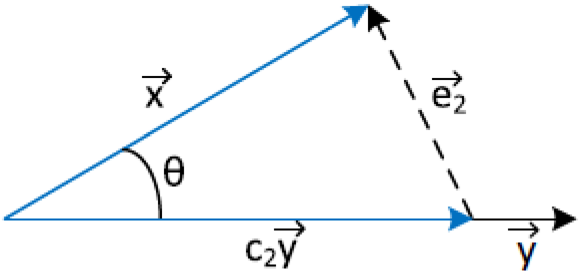
- **Ερώτημα: μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση: μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν πιο βολικό να θυμηθούμε μερικές ιδιότητες των διανυσμάτων
- Έστω διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ όπως στο σχήμα

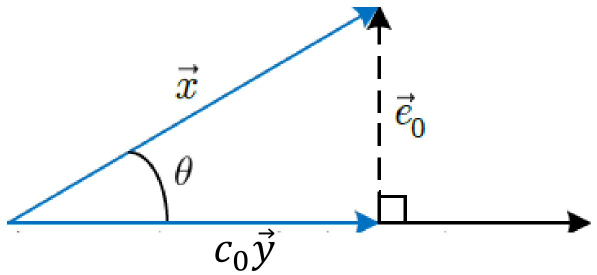




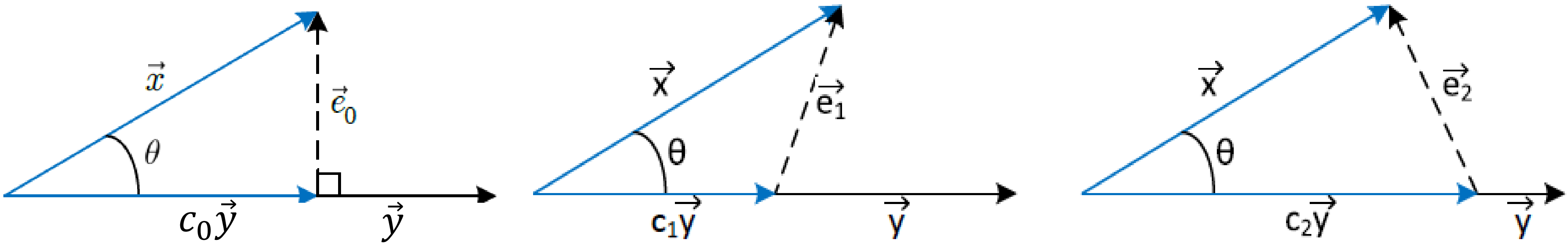
και $\vec{e}_i$ διανύσματα σφάλματος, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i\vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{x}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i$$

- Γνωρίζετε ότι το μικρότερο διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Τα διανύσματα $c_i\vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$

- Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i\vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?
  - Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά ☺ – λέει τη σταθερά c_0, αφού το διάνυσμα σφάλματος της, $\vec{e}_0$, είναι αυτό με το μικρότερο μήκος

- Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\cos\theta = \frac{c_0|\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? ☺
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το ***βέλτιστο c* –** με κάποια έννοια **–** για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας ορίσουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (όμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»…
  - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization**!

Συνεχίζεται... ☺