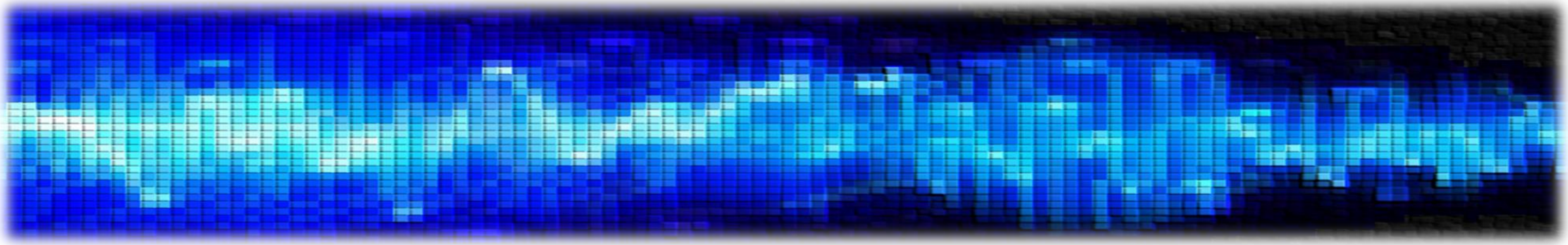
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η

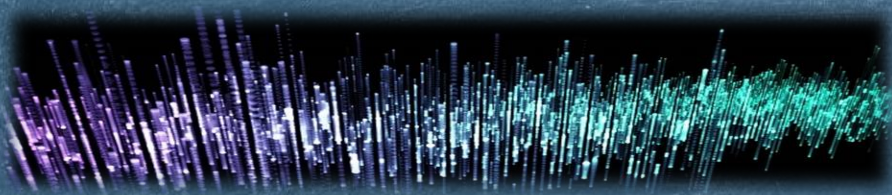


- Κρουστική Απόκριση
- Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Τι περιέχει το ΗΥ215?

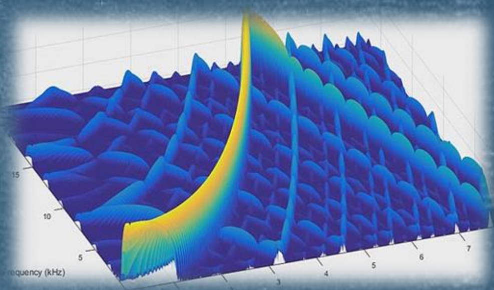
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

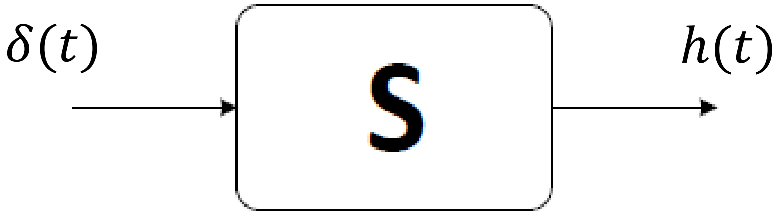
- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Κρουστική απόκριση (impulse response)**

- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - …απουσία αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$

- Συμβολισμός: $h(t)$



- Γραφή ενός σήματος ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων Δέλτα

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

- Πράξη **συνέλιξης** (για την απόκριση μηδενικής κατάστασης)

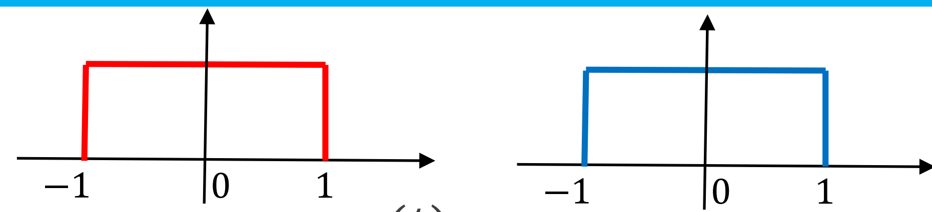
$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

REMINDER

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

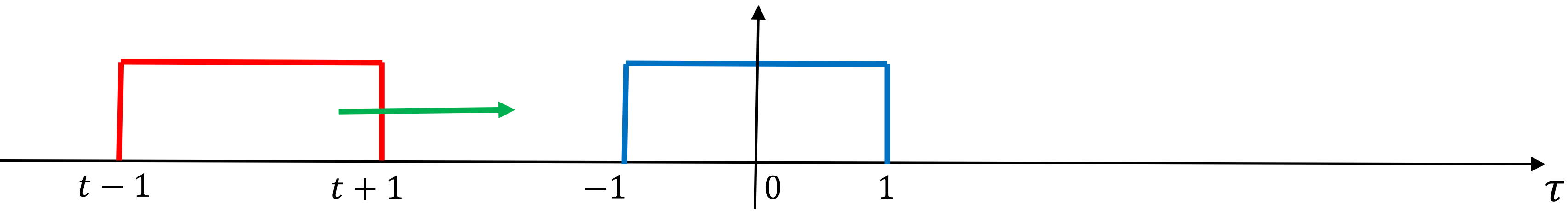
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

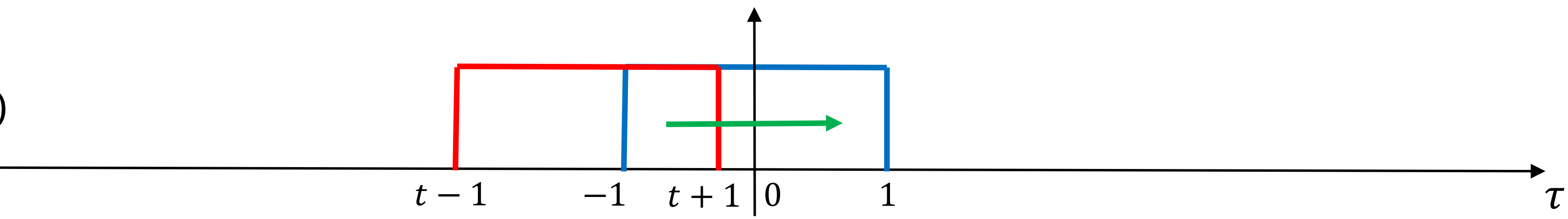


○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(t)$

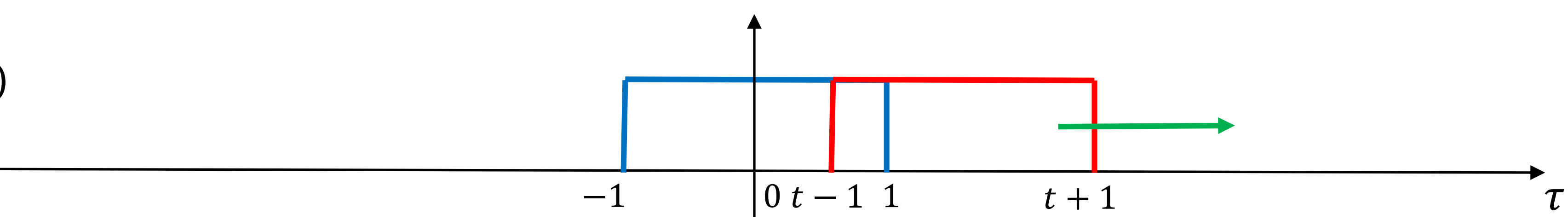
(a)



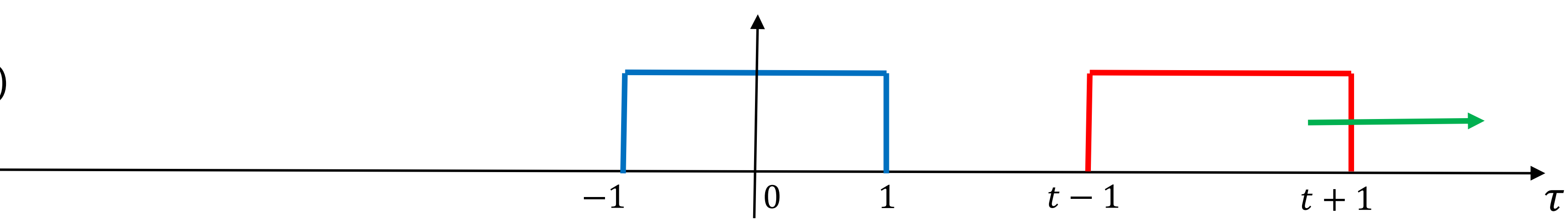
(β)



(γ)

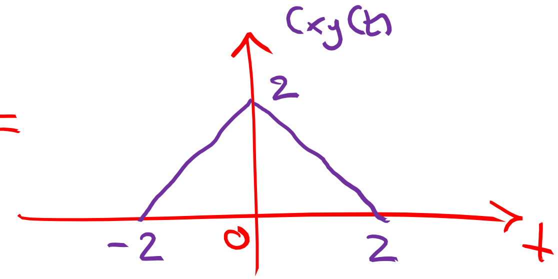


(δ)



- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

$2\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2}\right) =$



Είναι :

α) $C_{xy}(t) = 0$, για $t+1 < -1 \Leftrightarrow t < -2$.

δ) $C_{xy}(t) = 0$, για $t-1 > 1 \Leftrightarrow t > 2$.

β) $C_{xy}(t) = \int_{-1}^{t+1} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \int_{-1}^{t+1} d\tau = \tau \Big|_{-1}^{t+1} = t+1-(-1) = t+2$, για

$t+1 < 1$ και $t+1 > -1 \Leftrightarrow t < 0$ και $t > -2 \Leftrightarrow -2 < t < 0$.

γ) $C_{xy}(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \int_{t-1}^{1} d\tau = \tau \Big|_{t-1}^{1} = 1-(t-1) = 2-t$, για

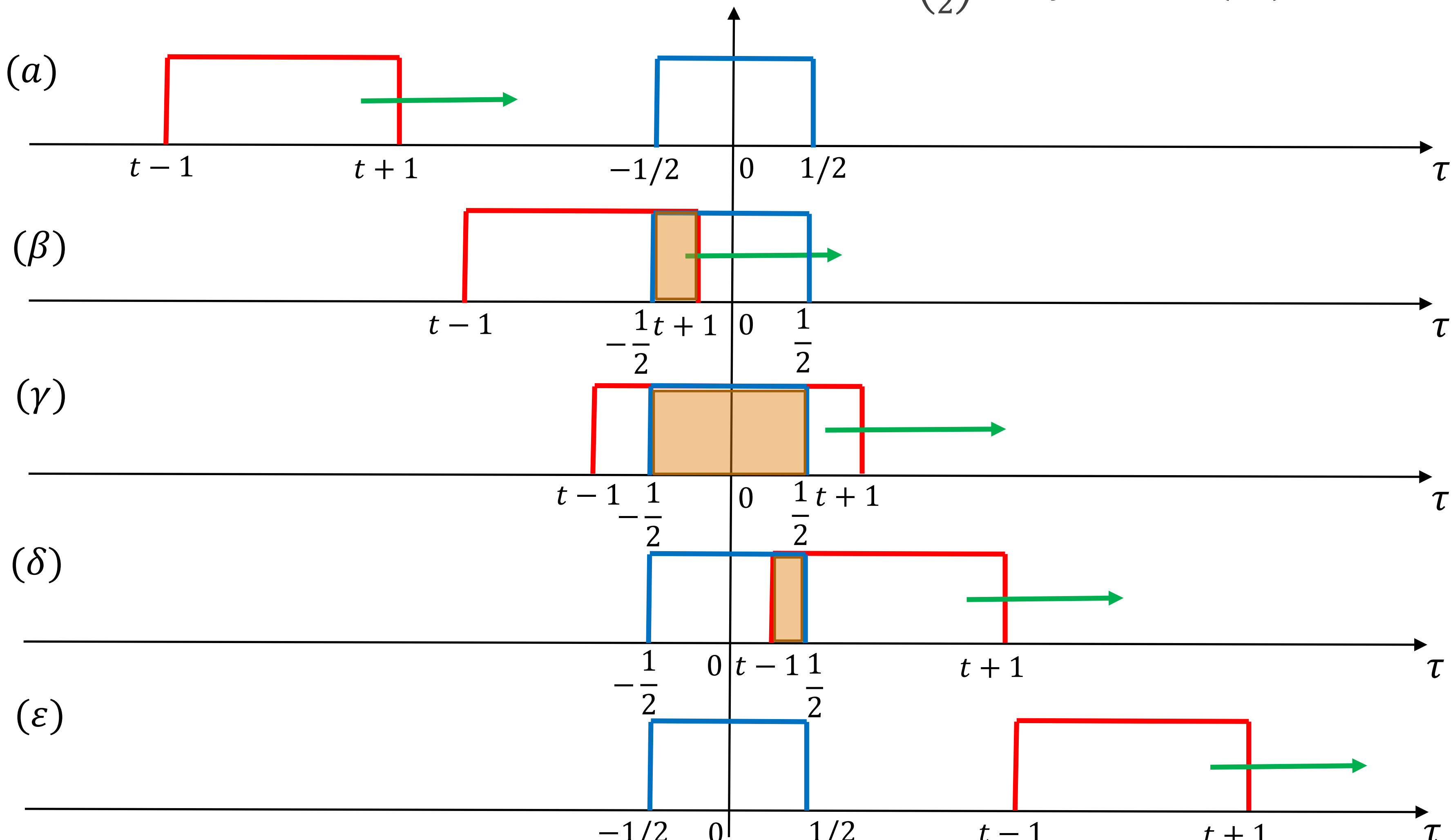
$t-1 < 1$ και $t-1 > -1 \Leftrightarrow t < 2$ και $t > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2$.

Άρα $C_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < -2,\ t > 2 \\ t+2, & -2 < t < 0 \\ 2-t, & 0 < t < 2 \end{cases}$

- **Συνέλιξη**

- **Παράδειγμα [<u>μόνο σχήματα – δουλέψτε το στο σπίτι</u>]**

  - Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(2t)$



- **Συνέλιξη**

- Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

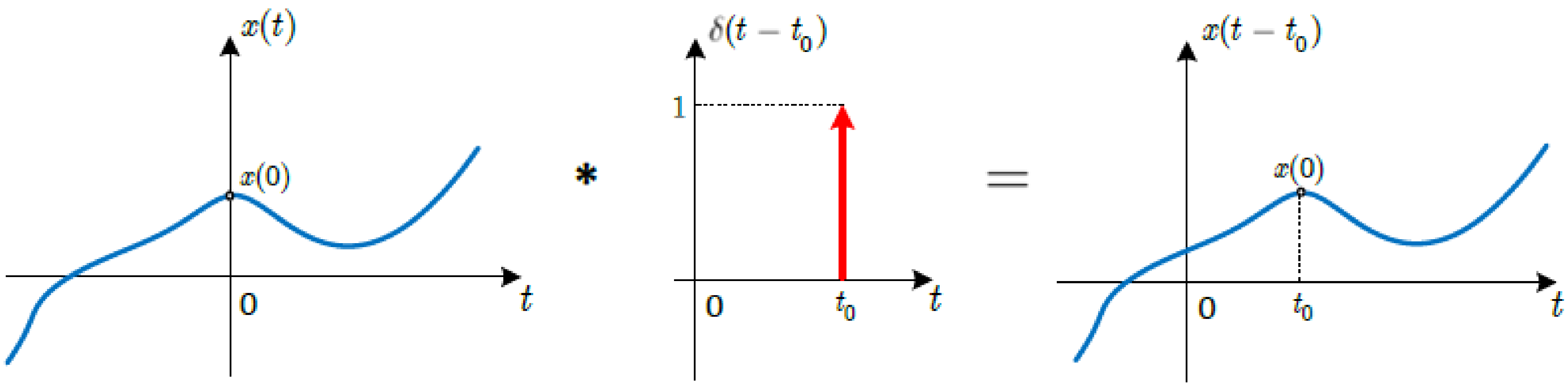
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος $x(t)$ με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$A\delta(t-t_0), \qquad A \in \Re$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0 και πολλαπλασιασμένο με $A \in \Re$, δηλ.

$$x(t) * A\delta(t-t_0) = A\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau} = Ax(t-t_0)$$



- **Συνολική Απόκριση Συστήματος**

- Με βάση τα προηγούμενα, η συνολική έξοδος ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες δίνεται ως

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}\right) u(t) + x(t) * h(t)$$

αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι απλές

- Αν το **σύστημα είναι ΓΧΑ**, τότε η έξοδος δίνεται **μόνο** από την απόκριση μηδενικής κατάστασης

$$y(t) = y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

- Κατά κανόνα ενδιαφερόμαστε για ΓΧΑ συστήματα
  - Κάποιες πολύ λίγες φορές θα εξετάζουμε και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Προφανώς αυτή η έξοδος $y(t)$ μπορεί να είναι είτε η συνολική, είτε κάποια από τις επιμέρους
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου περιλαμβάνει σήματα της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Για αυτά πρέπει υποχρεωτικά $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

$$|y_{zs}(t)| < B_y \Rightarrow |y_{zs}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t-\tau)| d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau$$

- **Ευστάθεια Συστήματος**

- Η σχέση

$$|y_{zs}(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})| \boldsymbol{dt} < +\infty$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!

- Η συνθήκη αυτή μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα των συναρτήσεων που δημιουργούν την κρουστική απόκριση:

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Ξανά λοιπόν πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ για να είναι το σύστημα ευσταθές!
  - …αφού το εμβαδόν της $|h(t)|$ πρέπει να είναι πεπερασμένο

- **Αιτιατότητα Συστήματος**
- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει
- Προφανώς ένα σύστημα που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό...
  - ... αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! ☺
- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος
- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα (ή μη) του?
  - Ναι!
- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$
- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό
- Άρα ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$\boxed{h(t) = 0, \qquad t < 0}$$

ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η

- Ο χώρος της συχνότητας

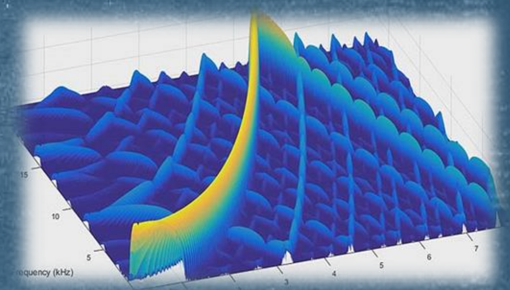
Τι περιέχει το HY215?

$1^{ο}$ Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

$2^{ο}$ Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ’ όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! ☺
- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δηλ. δεν ξέρουμε γιατί μια δεδομένη είσοδος παράγει τη συγκεκριμένη έξοδο, παρ’ όλο που μπορούμε να την προβλέψουμε στο χαρτί!
- Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς
- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**
- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις **πλάτους-χρόνου** που έχουμε δει ως τώρα…
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!
- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα…

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου…
- …έτσι και το **μιγαδικό εκθετικό** σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi \boldsymbol{f_0} t+\varphi)}$, $A > 0$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας
- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0 (t-\tau)+\phi)}\, d\tau \\ &= Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau \\ &= H(f_0)\left(Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\right) \\ &= H(f_0) x(t) \end{aligned}$$

με

$$\boxed{H(\boldsymbol{f_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \boldsymbol{f_0} \tau}\, d\tau}$$

ένα σταθερό μιγαδικό (εν γένει) αριθμό που εξαρτάται από το f_0, δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ και

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

είναι πολύ σημαντικό!

$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

- Μας λέει ότι ένα **μιγαδικό** σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος, και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!
  - Η οποία «απλά» αλλάζει το πλάτος ή/και τη φάση της εισόδου! ☺
- Ξέρουμε ότι τέτοια μιγαδικά εκθετικά σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
  - Μέσω των σχέσεων του Euler
- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων?
  - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο <u>περιοδικά</u> σήματα

Συνεχίζεται