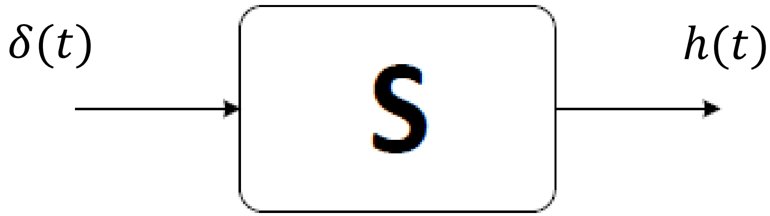
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η

- Κρουστική Απόκριση
- Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

- Γνωρίσαμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως την έξοδο του συστήματος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες
  - Θεωρώντας την είσοδο μηδενική
- Ας προχωρήσουμε στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την (μη-μηδενική) **είσοδο** του συστήματος
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές είσοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - ...απουσία αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$
- Συμβολισμός: $h(t)$



- Εμείς ήδη γνωρίζουμε τον τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου
  - Ας τον εκμεταλλευτούμε! ☺
- Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που «ζει» μόνο για $t = 0$, και μετά εξαφανίζεται!
  - Άρα επιδρά στο σύστημα ακαριαία, και μετά εξαφανίζεται
- Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η συνάρτηση Δέλτα γεννά νέες «αρχικές» συνθήκες στο σύστημα!
- Οι «αρχικές» αυτές συνθήκες υπάρχουν για $t = 0^+$ και θα είναι της μορφής

$$h(0^+), h'(0^+), \dots, h^{(N-1)}(0^+)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι τιμές των νέων αυτών «αρχικών» συνθηκών είναι

$$\begin{gathered} h(0^+) = 0 \\ h'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{gathered}$$

- Μπορούμε να λύσουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με αυτές τις συνθήκες!! ☺

- Αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

λύνουμε την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0$$

με «αρχικές» συνθήκες

$$h(0^+) = 0$$
$$h'(0^+) = 0$$
$$\vdots$$
$$h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα

- **Παράδειγμα**

REMINDER

○ Έστω το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\lambda^2+3\lambda+2$ και η εξίσωση είναι $\lambda^2+3\lambda+2=0$

Είναι $\lambda^2+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

Άρα η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},\ t>0$$

$$= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t},\ t>0$$

Θα χρησιμοποιήσαμε τις "νέες" αρχικές συνθήκες για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2. Αυτές είναι: $h(0^+)=0,\ h'(0^+)=1$

- Παράδειγμα

Οπότε έχουμε :

$$h(0^+) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$$

$$h'(0^+) = -c_1 e^0 - 2c_2 e^0 = 1 \iff -c_1 - 2c_2 = 1$$

Άρα

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ c_2 - 2c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array}$$

Οπότε

$$h(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0$$

$$= \left[e^{-t} - e^{-2t} \right] u(t).$$

- Θυμηθείτε ότι όταν ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις βρίσκεται σε αρχική ηρεμία (== μηδενικές αρχικές συνθήκες), τότε αυτό είναι **γραμμικό**
  - Επίσης, μπορεί κανείς να δείξει ότι είναι και **χρονικά αμετάβλητο**

- **Έτσι, ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) αν και μόνο αν οι αρχικές του συνθήκες είναι μηδενικές**
  - ...εννοώντας τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$

- Τα παραπάνω μας βοηθούν να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ένα σύστημα της μορφής

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_k \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

1. Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h_o(t)$ του συστήματος

$$S_o: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

2. Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος S δίνεται ως

$$h(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k h_o(t)$$

λόγω γραμμικότητας

- **Παράδειγμα**

REMINDER

○ Έστω το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = 9x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

Θεωρούμε το σύστημα S_0: $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = x(t)$

Θα βρούμε την κρουστική του απόκριση, $h_0(t)$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\lambda^2+6\lambda+9$ και η εξίσωση είναι $\lambda^2+6\lambda+9=0$, με ρίζες $\lambda_1=\lambda_2=-3$ (ταυτότητα).

Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_0(t) = [c_0 + c_1 t]e^{\lambda t}, \quad t>0$$
$$= [c_0 + c_1 t]e^{-3t}, \quad t>0$$

Με αρχικές συνθήκες $h_0(0^+)=0$ και $h_0'(0^+)=1$, θα έχουμε:

- Παράδειγμα

REMINDER

$$h_0(0^+) = \left[c_0 + c_1 \cdot 0\right] e^{-3\cdot 0} = c_0 + 0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$h_0'(0^+) = \left(c_1 t e^{-3t}\right)'\Big]_{t=0} = \left(c_1 e^{-3t} - 3c_1 t e^{-3t}\right)\Big]_{t=0} = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Οπότε

$$h_0(t) = te^{-3t}, \quad t>0$$
$$= te^{-3t}u(t).$$

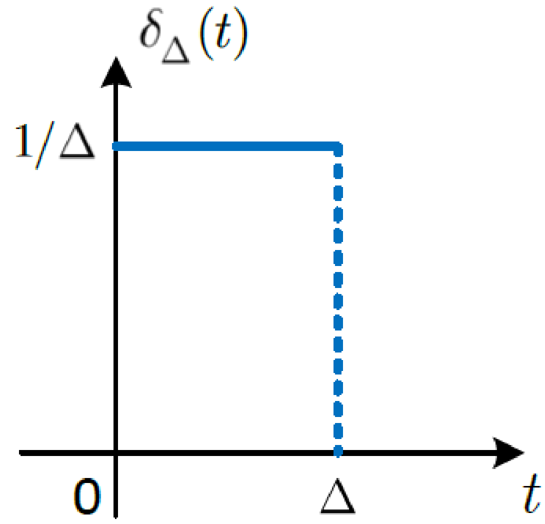
Άρα για το αρχικό σύστημα θα έχουμε:

$$h(t) = 9h_0(t) + 2\frac{d}{dt}h_0(t)$$
$$= 9te^{-3t}u(t) + 2\left(te^{-3t}u(t)\right)'$$
$$= 9te^{-3t}u(t) + 2\left(e^{-3t}u(t) + t\left(e^{-3t}u(t)\right)'\right)$$
$$= 9te^{-3t}u(t) + 2e^{-3t}u(t) + 2t\left(-3e^{-3t}u(t) + e^{-3t}\delta(t)\right)$$
$$= 3te^{-3t}u(t) + 2e^{-3t}u(t).$$

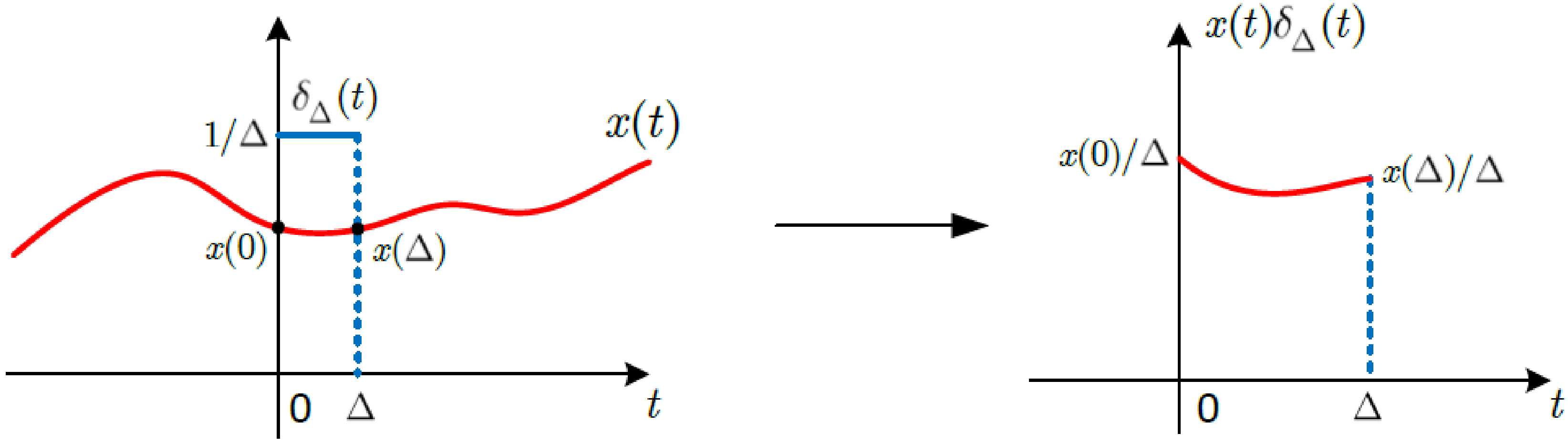
- Ας δούμε τώρα πως η κρουστική απόκριση μας χρησιμεύει στην εύρεση της εξόδου μηδενικής κατάστασης
  - Θυμίζετε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης εξαρτάται αποκλειστικά από την είσοδο
- Αφού γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για είσοδο μια συνάρτηση Δέλτα, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να γράψουμε κάθε είσοδο ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα! ☺
- Έτσι, θα χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης για να βρούμε την έξοδο για κάθε είσοδο!
- Ας δούμε αν αυτό είναι εφικτό…
- Ας ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

και σχηματικά



- Ας αναπαραστήσουμε το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t)$ για ένα τυχαίο σήμα $x(t)$



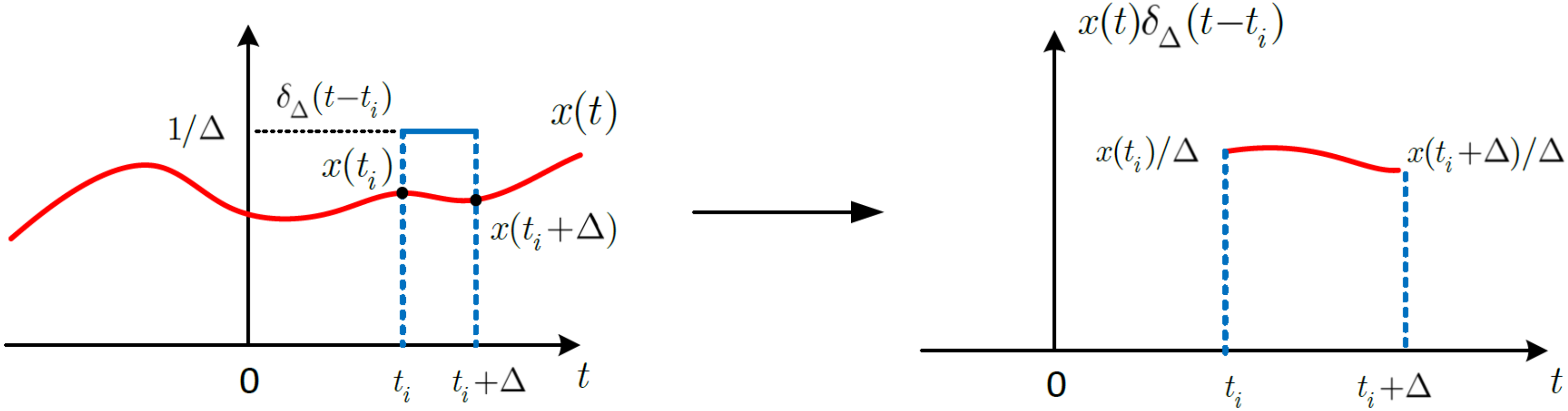
- Θεωρώντας τώρα το Δ ως πολύ μικρό, τέτοιο ώστε το τμήμα του σήματος που αποκόπτεται να θεωρείται σχεδόν σταθερό, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t) \approx \Delta x(0)\delta_\Delta(t)$$

- Αν $\Delta \to 0$ τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Ας συνεχίσουμε με το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t - t_i)$



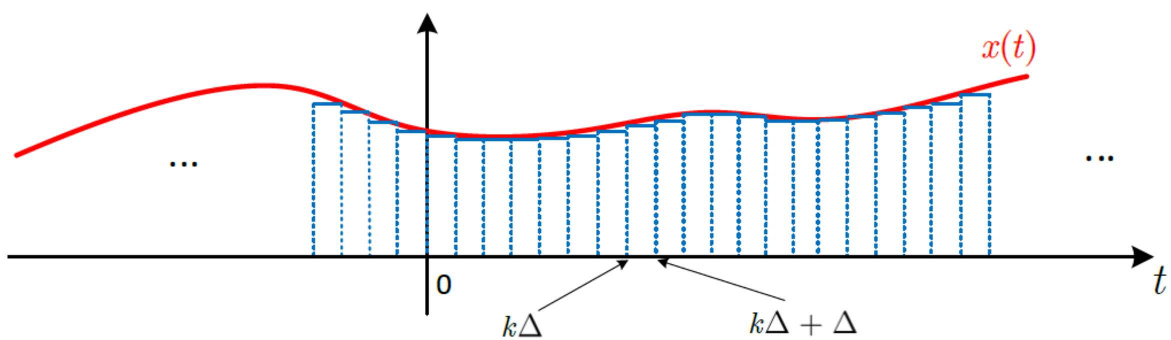
- Όμοια

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) \approx \Delta x(t_i)\delta_\Delta(t - t_i)$$

- Αν $\Delta \to 0$ τότε

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) = x(t_i)\delta(t - t_i)$$

- Μπορούμε να συνεχίσουμε για όλο το σήμα $x(t)$



- Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω τμήματα έχουμε

$$\hat{x}_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)$$

με $\hat{x}_\Delta(t)$ μια προσέγγιση του αρχικού σήματος $x(t)$ η οποία εξαρτάται από την τιμή του Δ

- Όταν $\Delta \to 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta) = x(t)$$

- Το παραπάνω όριο αποτελεί το άθροισμα Riemann και μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Πέτυχαμε να γράψουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα (ολοκλήρωμα) μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα, με καθεμιά να έχει εμβαδό $x(\tau)$!

- Το ολοκλήρωμα

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

είναι πολύ σημαντικό και η πράξη που εκτελεί ονομάζεται **συνέλιξη** μεταξύ του $x(t)$ και του $\delta(t)$

- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με τον τελεστή $*$: $x(t) * \delta(t)$

- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Πώς βοηθά λοιπόν η σχέση που βρήκαμε για την εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?

- Θυμηθείτε ότι το σύστημά μας είναι ΓΧΑ!

- Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

c) γραμμικότητα:

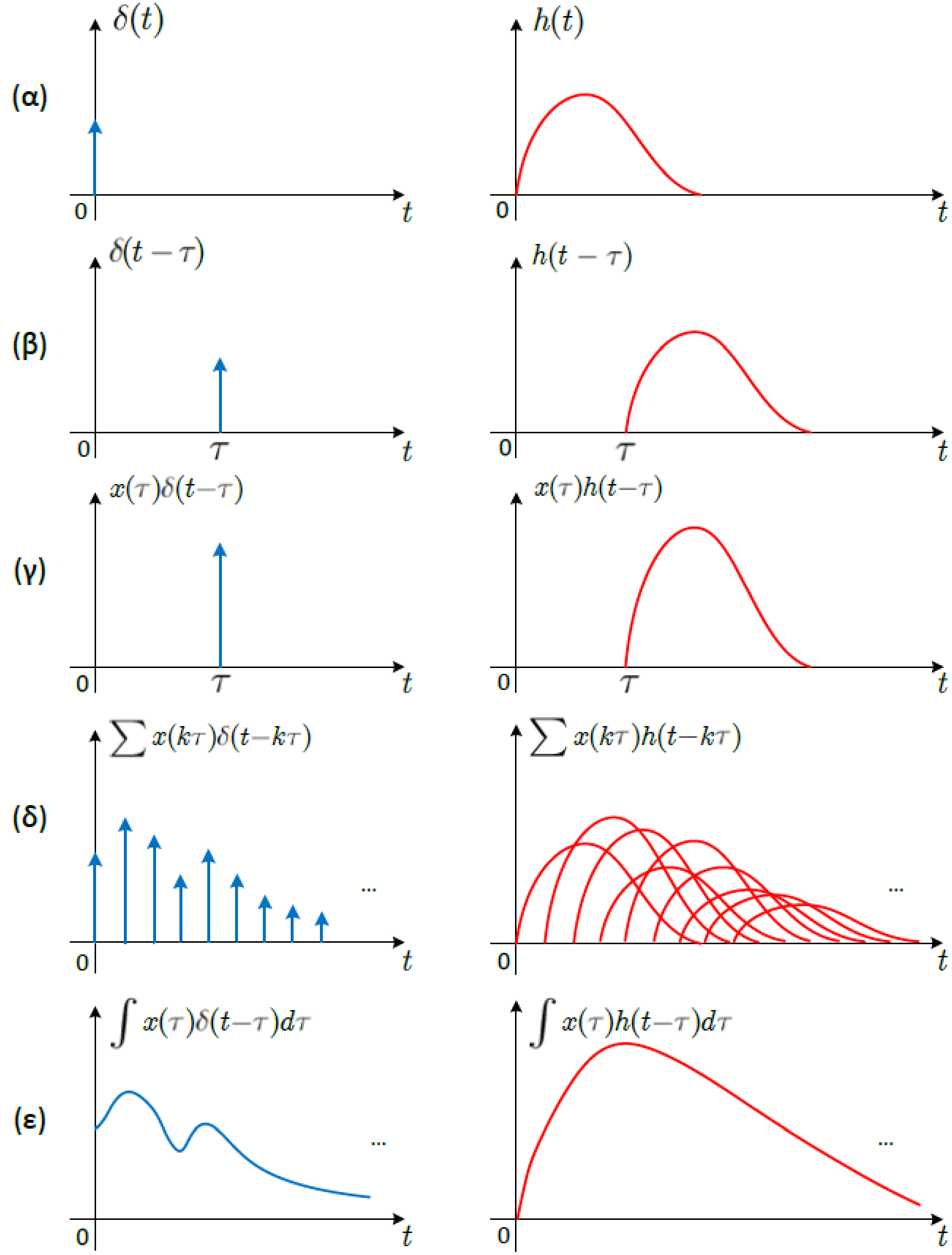
$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

d) γραμμικότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

e) απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$


(α)
$\delta(t)$
$h(t)$
(β)
$\delta(t-\tau)$
$h(t-\tau)$
(γ)
$x(\tau)\delta(t-\tau)$
$x(\tau)h(t-\tau)$
(δ)
$\sum x(k\tau)\delta(t-k\tau)$
$\sum x(k\tau)h(t-k\tau)$
(ε)
$\int x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
$\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
0
τ
t
...

- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Η συνέλιξη έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

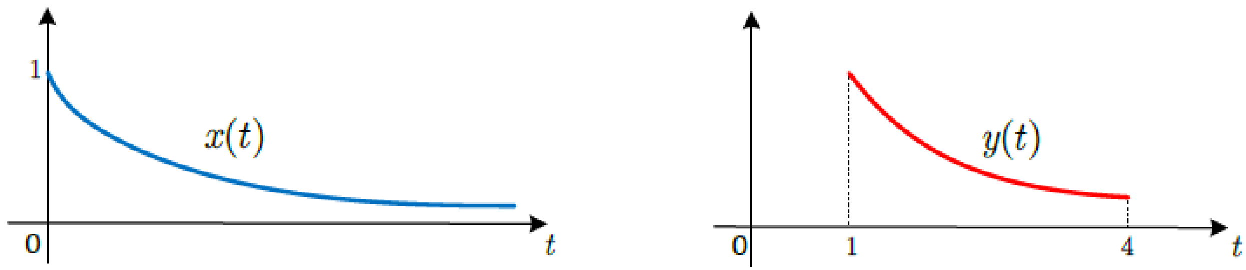
Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

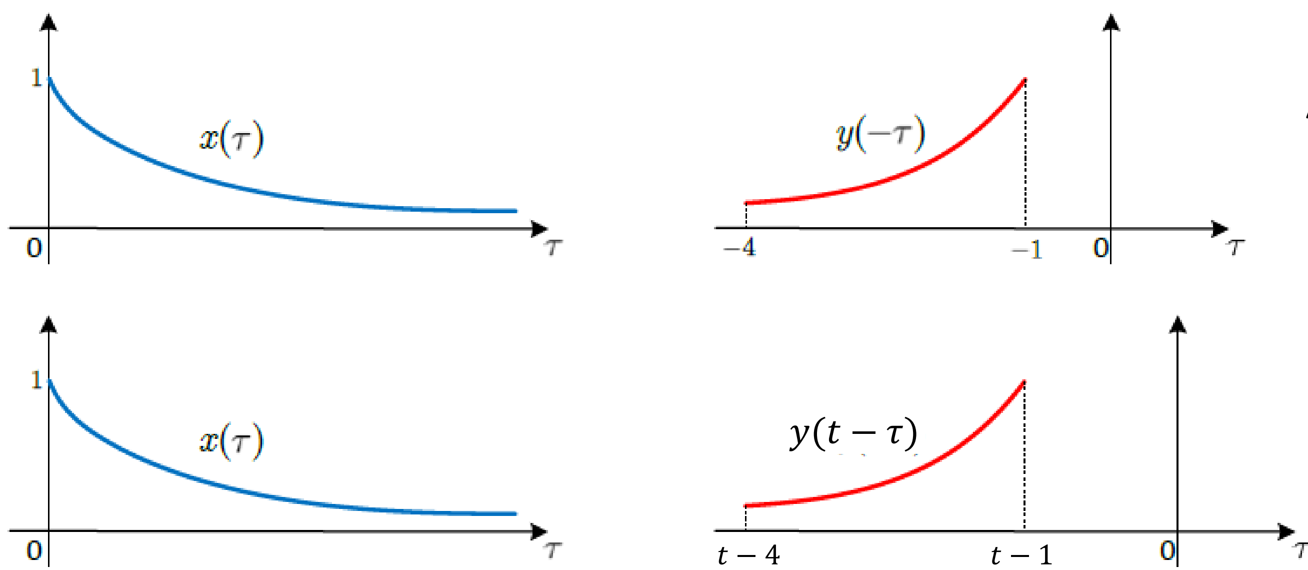
- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό της συνέλιξης
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη δυσκολία της ως πράξη
- Ας δούμε πόσο απλή είναι τελικά

- **Συνέλιξη**

- Έστω δυο σήματα $x(t), y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$



- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**
  - Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα

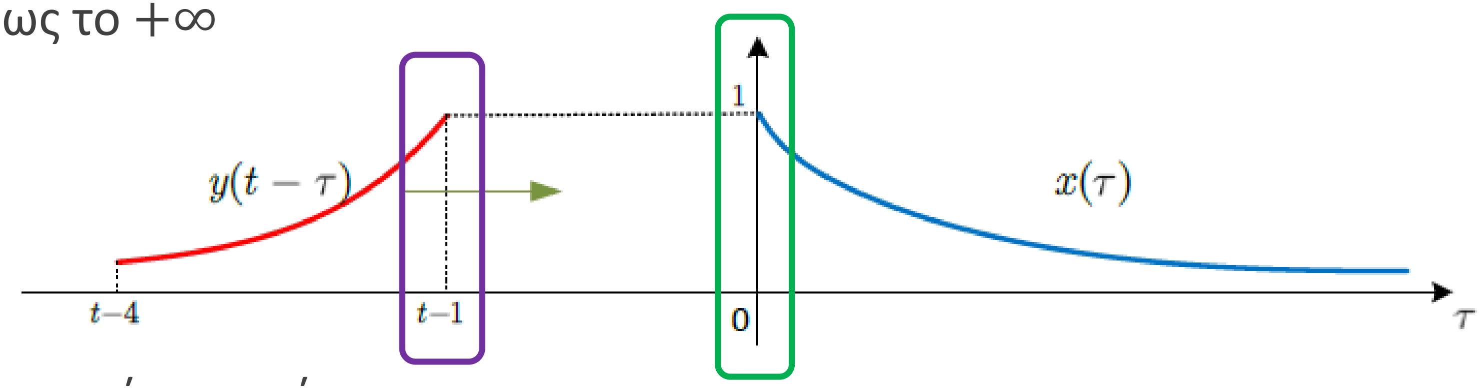


Αντιστροφή

Μετατόπιση

- **Συνέλιξη**

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην παράνω περίπτωση

$$t-1<0 \Rightarrow t<1$$

και

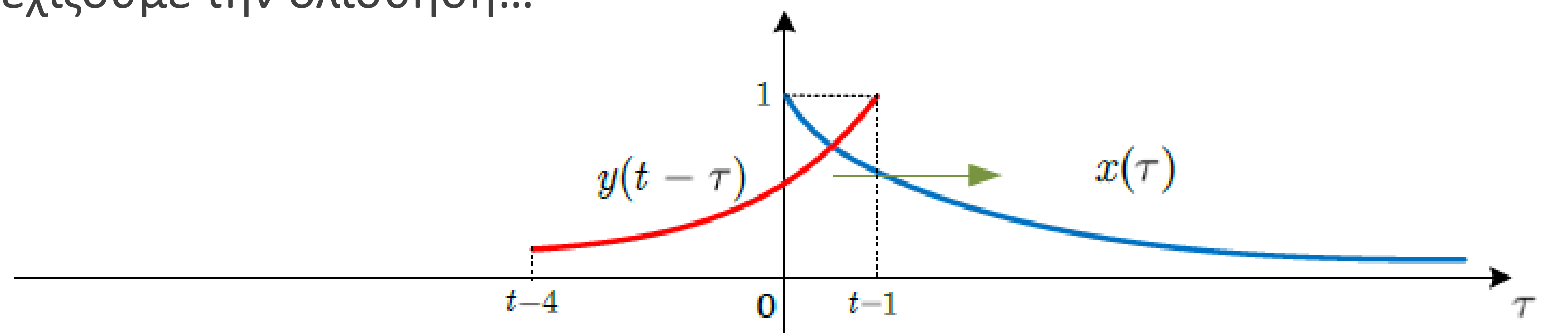
$$c(t)=0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t-\tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το δεξί «άκρο» του περάσει το $t=0$...
  - ...που είναι το αριστερό «άκρο» του $x(\tau)$

- **Συνέλιξη**

- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-4<0 \text{ και } t-1>0 \Rightarrow 1<t<4$$

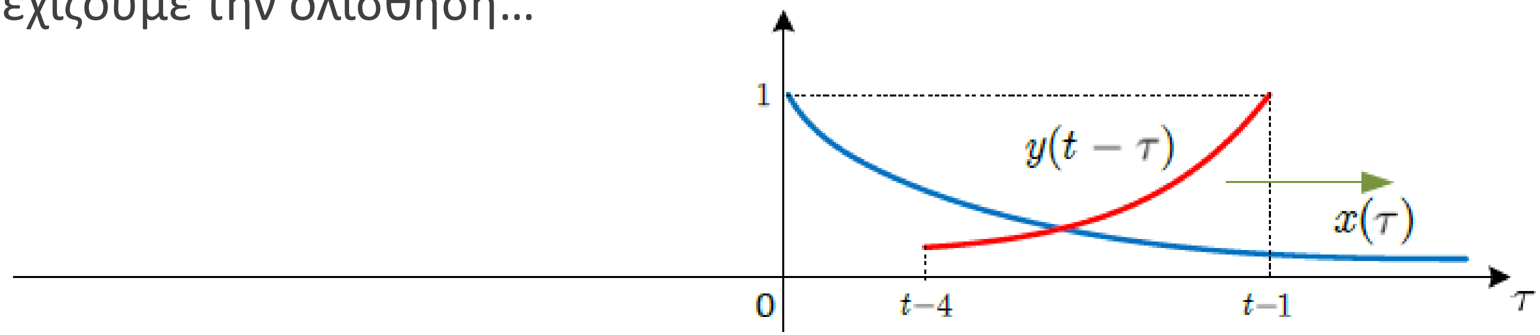
και

$$c(t)=\int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(1,4)$

- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση…

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4$$

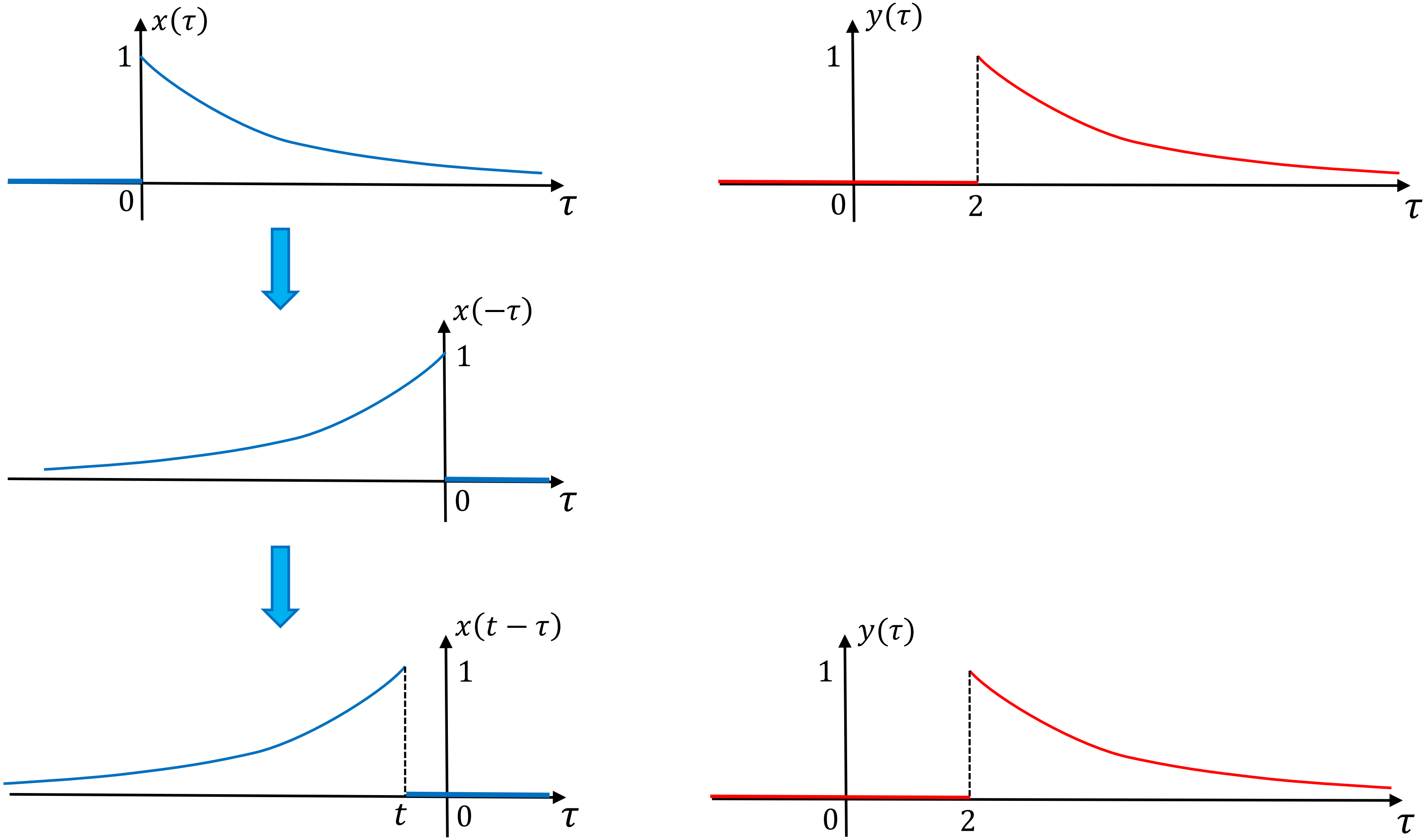
και

$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4, +\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

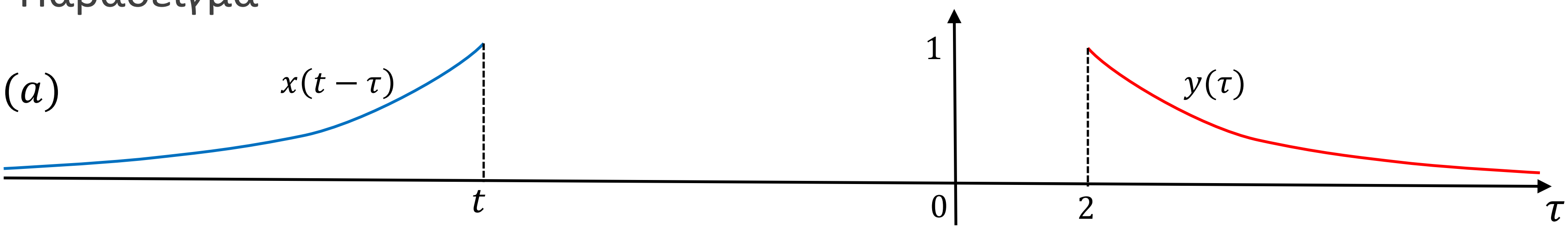
- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t), \;\; y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

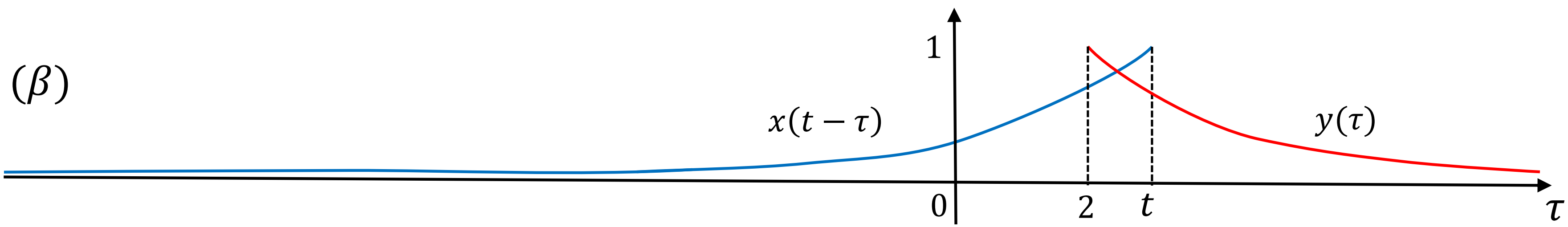


- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

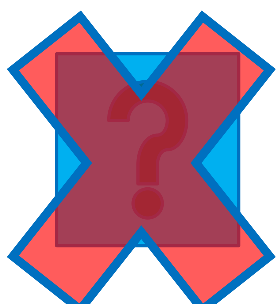
(a)



(β)



(γ)



- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

α) Είναι $c_{xy}(t) = 0$, $t < 2$.

β) Είναι $c_{xy}(t) = \int_2^t e^{-(t-\tau)} \cdot e^{-(\tau-2)} d\tau$

$= \int_2^t e^{-t} \cdot \cancel{e^{\tau}} \cdot \cancel{e^{-\tau}} \cdot e^{2} d\tau$

$= \int_2^t e^{-t} \cdot e^{2} d\tau = e^{-(t-2)} \int_2^t d\tau$

$= e^{-(t-2)} \tau \Big|_2^t = e^{-(t-2)}(t-2) =$

$= (t-2)e^{-(t-2)}$, $t > 2$

Άρα συνολικά:

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)e^{-(t-2)}, & t > 2 \end{cases}$$

$= (t-2)e^{-(t-2)}u(t-2)$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t),\ \ y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

Είναι

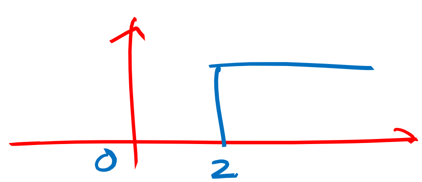
$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

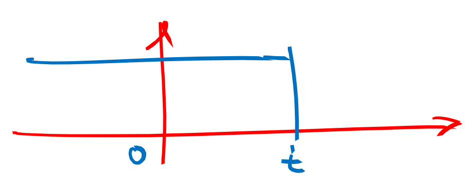
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)}u(\tau-2)\ e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)}\,e^{-(t-\tau)}\big(u(\tau-2)\cdot u(t-\tau)\big)\,d\tau$$

$$u(\tau-2) = \begin{cases} 1, & \tau>2 \\ 0, & \tau<2 \end{cases} \qquad u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t>\tau \Rightarrow \tau<t \\ 0, & t<\tau \Rightarrow \tau>t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ το γινόμενο τους είναι $1,\ 2<\tau<t$





- **Συνέλιξη**

- Παράδειγμα

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)} \cancelto{1}{u(t-\tau)}\, u(\tau-2)\, d\tau$$

!! $$= \int_{2}^{t} e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)} \cdot 1 \cdot d\tau$$

= ίδια με πριν

$$= (t-2)\, e^{-(t-2)}\, u(t-2)$$

Συνεχίζεται... ☺