ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η

- Κρουστική Απόκριση
- Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

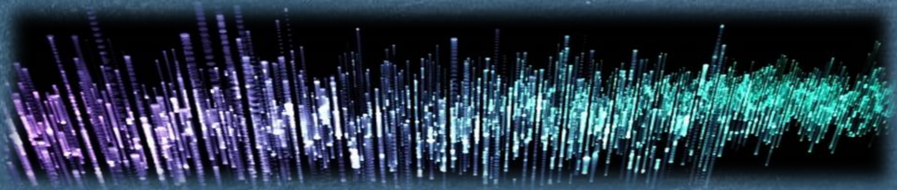
Τι περιέχει το ΗΥ215?

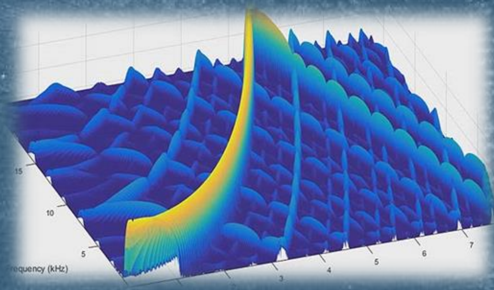
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

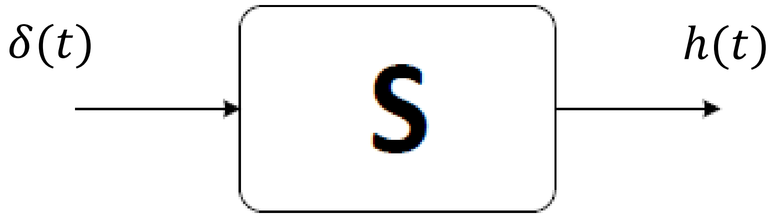
2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες





- Γνωρίσαμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως την έξοδο του συστήματος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες
  - Θεωρώντας την είσοδο μηδενική
- Ας προχωρήσουμε στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την (μη-μηδενική) **είσοδο** του συστήματος
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές είσοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - ...απουσία αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$
- Συμβολισμός: $h(t)$



- Εμείς ήδη γνωρίζουμε τον τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου
  - Ας τον εκμεταλλευτούμε! ☺

- Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που «ζει» μόνο για $t = 0$, και μετά εξαφανίζεται!
  - Άρα επιδρά στο σύστημα ακαριαία, και μετά εξαφανίζεται

- Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η συνάρτηση Δέλτα γεννά νέες «αρχικές» συνθήκες στο σύστημα!

- Οι «αρχικές» αυτές συνθήκες υπάρχουν για $t = 0^+$ και θα είναι της μορφής

$$h(0^+), h'(0^+), \dots, h^{(N-1)}(0^+)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι τιμές των νέων αυτών «αρχικών» συνθηκών είναι

$$h(0^+) = 0$$
$$h'(0^+) = 0$$
$$\vdots$$
$$h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Μπορούμε να λύσουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με αυτές τις συνθήκες!! ☺

- Αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

λύνουμε την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0$$

με «αρχικές» συνθήκες

$$h(0^+) = 0$$
$$h'(0^+) = 0$$
$$\vdots$$
$$h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα

- **Παράδειγμα**

○ Έστω το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

Αρχ. Συνθήκες

$h(0^+) = 0$

$\dot{h}(0^+) = 1$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow h(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \quad t > 0$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$\dot{h}(0) = 1 \Rightarrow -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}\Big|_{t=0} = 1 \Rightarrow -c_1 - 2c_2 = 1$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Άρα $\boxed{h(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)}$

- Θυμηθείτε ότι όταν ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις βρίσκεται σε αρχική ηρεμία (== μηδενικές αρχικές συνθήκες), τότε αυτό είναι **γραμμικό**
  - Επίσης, μπορεί κανείς να δείξει ότι είναι και **χρονικά αμετάβλητο**

- **Έτσι, ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) αν και μόνο αν οι αρχικές του συνθήκες είναι μηδενικές**
  - …εννοώντας τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$

- Τα παραπάνω μας βοηθούν να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ένα σύστημα της μορφής

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_k \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

1. Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h_o(t)$ του συστήματος

$$S_o: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

2. Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος S δίνεται ως

$$h(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k h_o(t)$$

λόγω γραμμικότητας

- **Παράδειγμα**

$$y_{zi}(t) = \underbrace{\sum_{l=1}^{r} c_l t^{l-1} e^{\lambda_1 t}}_{\lambda_1 \text{ είναι πολ. } r} + \sum_{k=r+1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}$$

○ Έστω το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = 9x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

a) $h_0(t)$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = x(t)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}h_0(t) + 6\frac{d}{dt}h_0(t) + 9h_0(t) = \delta(t)$$

$x(t) = \delta(t)$

$y(t) = h_0(t)$

$$t = 0^+ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}h_0(t) + 6\frac{d}{dt}h_0(t) + 9h_0(t) = 0$$

$h_0(0^+) = 0$

$\dot{h}_0(0^+) = 1$

ΧΕ. $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$

$$h_0(t) = c_1 t^{1-1} e^{\lambda_1 t} + c_2 t^{2-1} e^{\lambda_1 t} = c_1 e^{\lambda_1 t} + \underline{c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t}}$$

$h_0(0^+) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$$\dot{h}_0(0^+) = 1 \Rightarrow c_2 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot t\, \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\Big|_{t=0} = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\boxed{h_0(t) = t \cdot e^{-3t}\, u(t)}$$

- Παράδειγμα

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t)+6\frac{d}{dt}y(t)+9y(t)=9x(t)+2\frac{d}{dt}x(t)} \rightarrow h(t)=?$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+6\frac{d}{dt}y(t)+9y(t)=x(t) \rightarrow h_0(t)=t\cdot e^{-3t}u(t)$$

$$h(t)=9h_0(t)+2\frac{d}{dt}h_0(t)=9t\cdot e^{-3t}u(t)+2\frac{d}{dt}\left\{t\,e^{-3t}u(t)\right\}=$$

$$=9te^{-3t}u(t)+2\left(e^{-3t}u(t)+t\left(e^{-3t}u(t)\right)'\right)=$$

$$=9te^{-3t}u(t)+2\left(e^{-3t}u(t)+t\left(-3e^{-3t}u(t)+e^{-3t}\underbrace{u'(t)}_{\delta(t)}\right)\right)=$$

$$=9te^{-3t}u(t)+2e^{-3t}u(t)-6te^{-3t}u(t)+2t\cdot e^{-3t}\delta(t)=$$

$$=3te^{-3t}u(t)+2e^{-3t}u(t)+0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t)=[2+3t]e^{-3t}u(t)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)\cdot\delta(t-t_0)= \\ x(t_0)\delta(t-t_0) \end{array}\right.$$

- Ας δούμε τώρα πως η κρουστική απόκριση μας χρησιμεύει στην εύρεση της εξόδου μηδενικής κατάστασης
  - Θυμίζετε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης εξαρτάται αποκλειστικά από την είσοδο

- Αφού γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για είσοδο μια συνάρτηση Δέλτα, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να γράψουμε κάθε είσοδο ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα! ☺

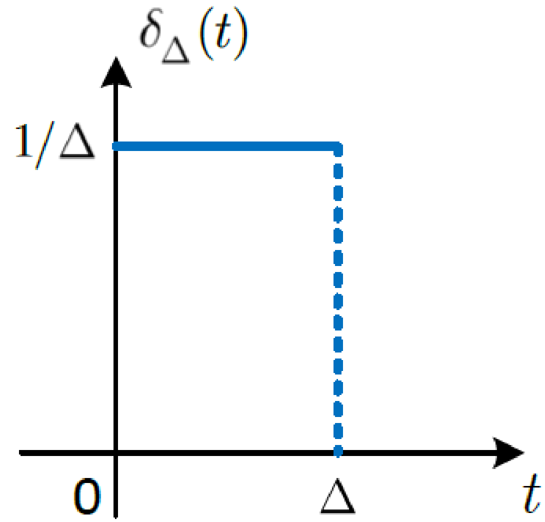
- Έτσι, θα χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης για να βρούμε την έξοδο για κάθε είσοδο!

- Ας δούμε αν αυτό είναι εφικτό…

- Ας ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

και σχηματικά



$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad \forall\, t_0 = \tau$

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t) * \delta(t)$