ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

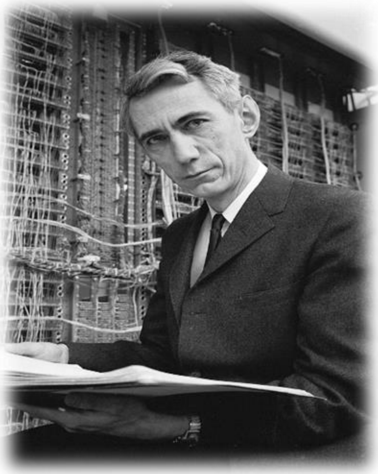
ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

- Δειγματοληψία

- **Δειγματοληψία**

- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα - samples*) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

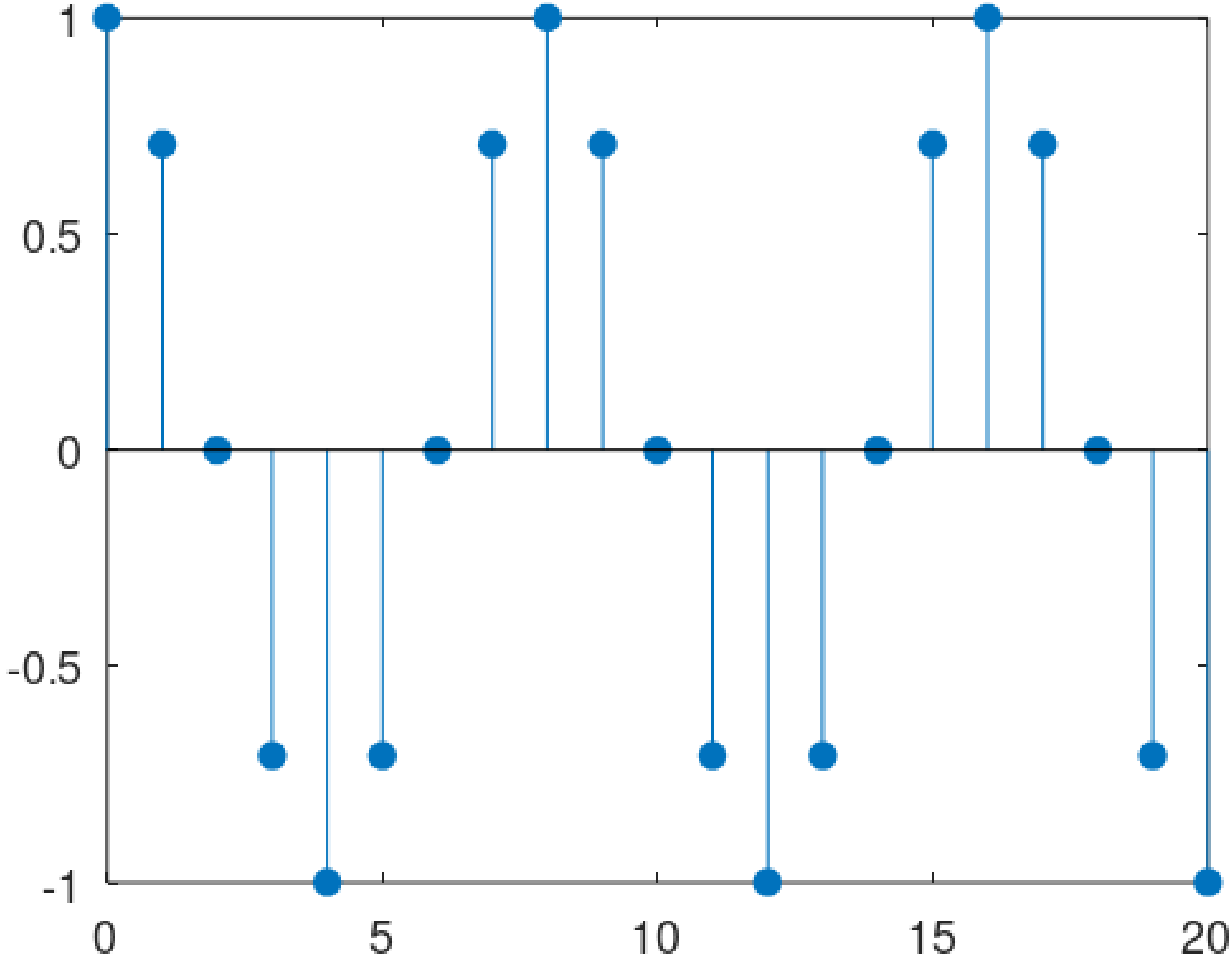
- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)



- Ας δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό…

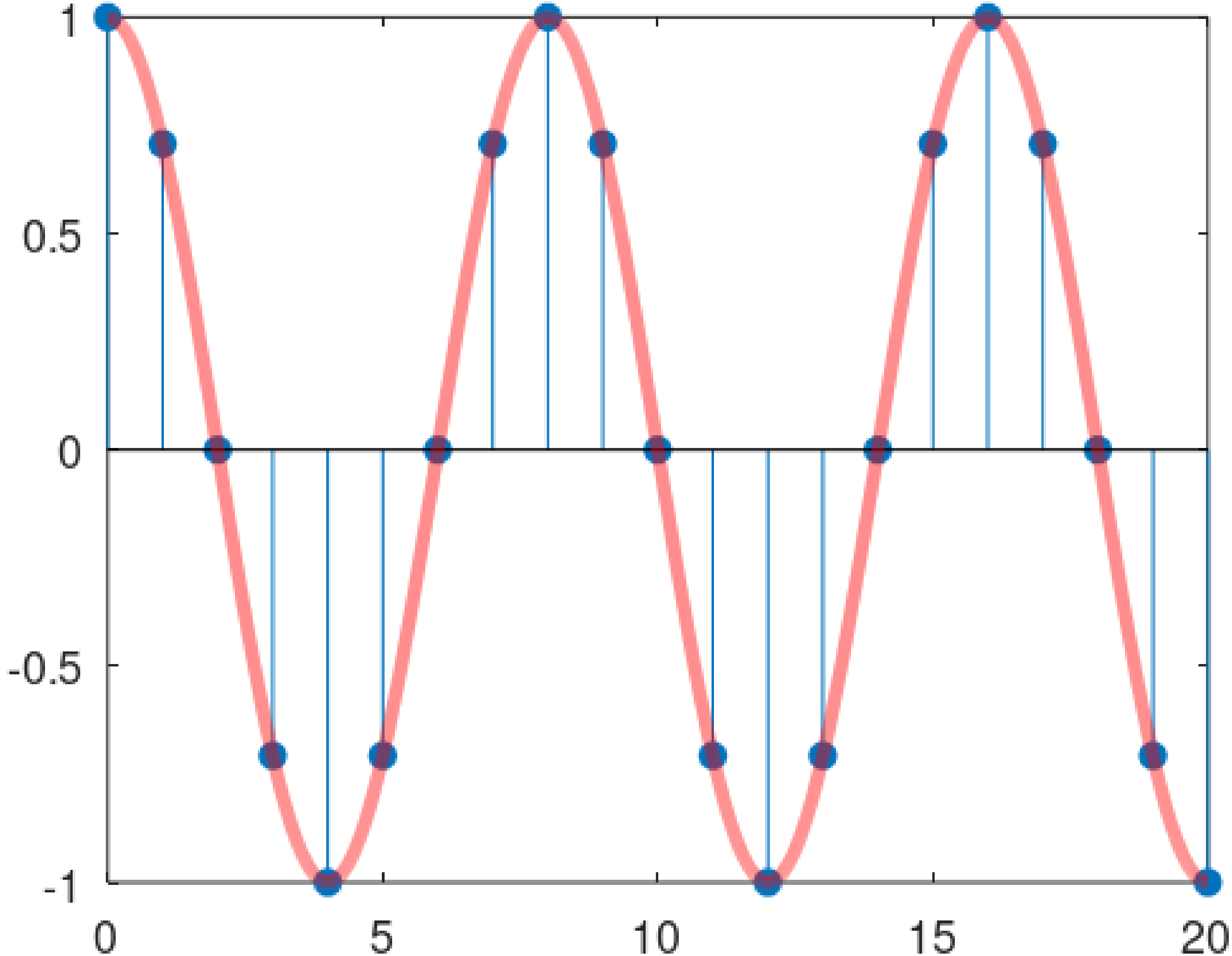
- **Δειγματοληψία**

Quiz:



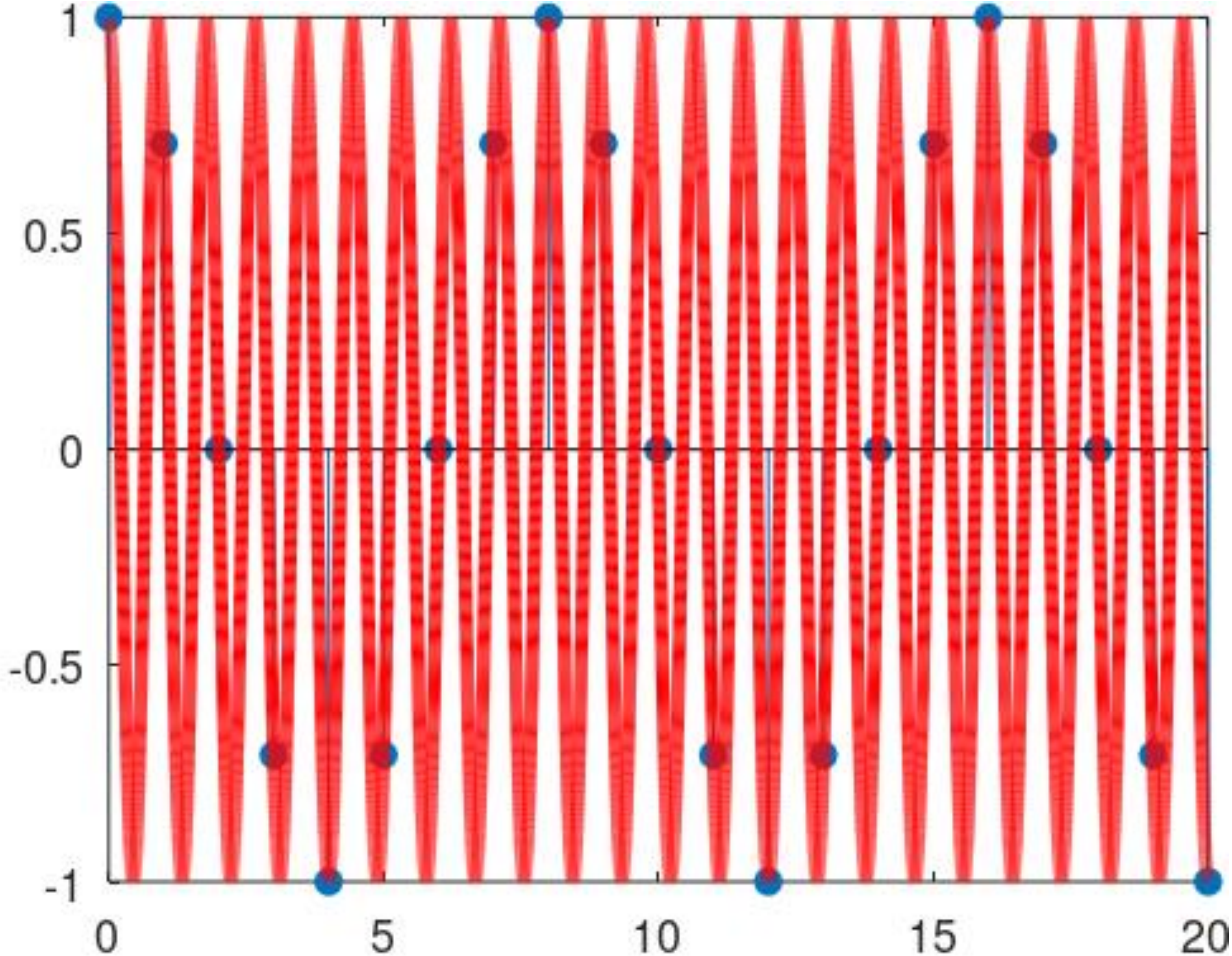
- **Δειγματοληψία**

Quiz:



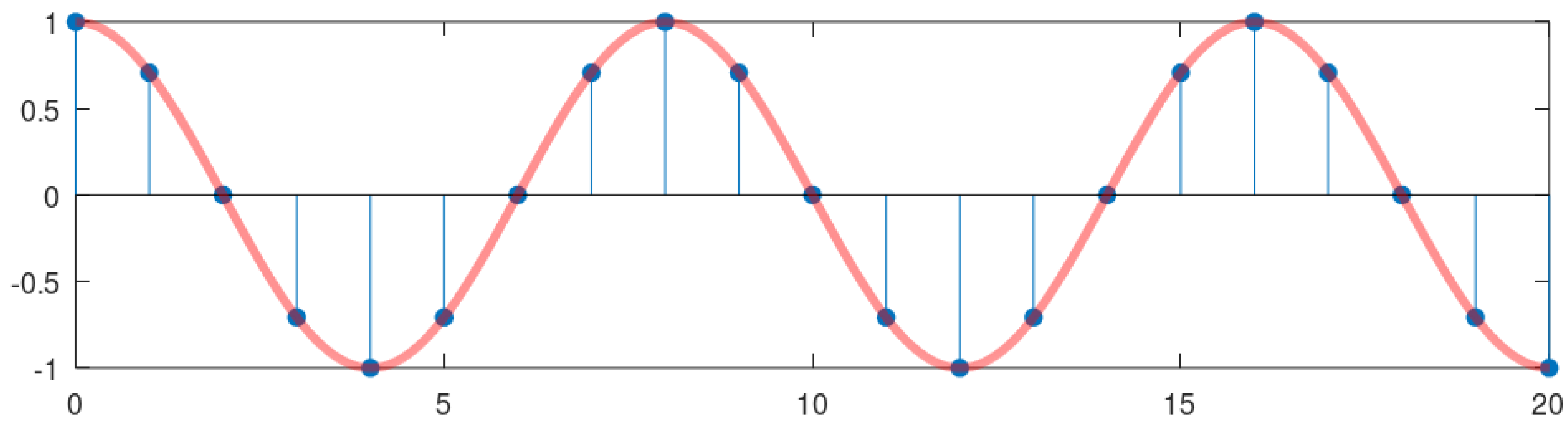
- **Δειγματοληψία**

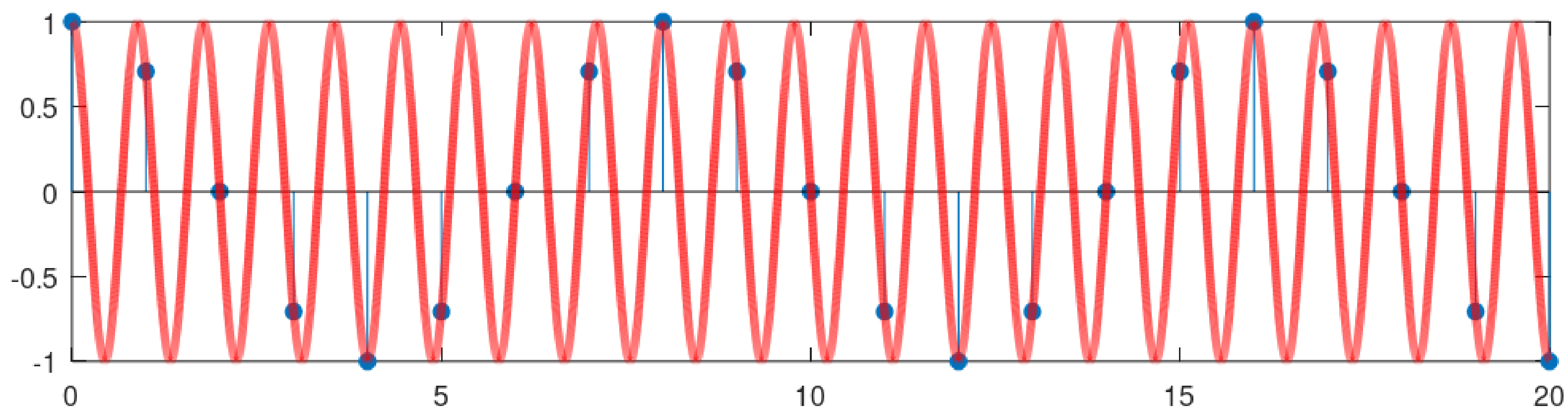
Quiz:



- **Δειγματοληψία**

Quiz:





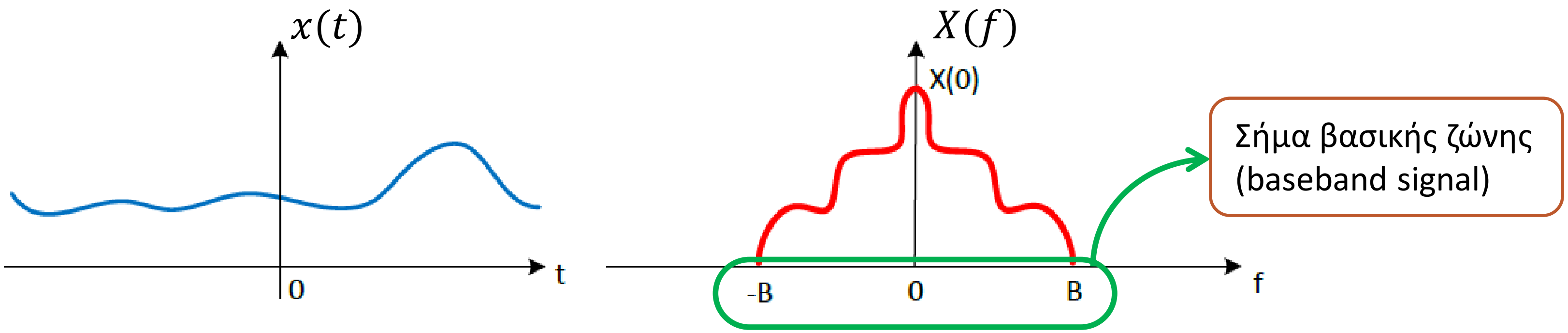
- **Δειγματοληψία**

- Θέλουμε να αποθηκεύσουμε ένα σήμα $x(t)$ σε έναν Η/Υ
- Προφανώς δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις *άπειρες* τιμές του
  - Ακόμα κι αν αυτό είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα
- Πρέπει να πάρουμε μερικά **δείγματα** του σήματος $x(t)$
  - Τιμές: $x(-20), x(-1), x(0), x(10), x\left(\sqrt{152}\right), x(62.7)$, κ.ο.κ
- Τα δείγματα αυτά θέλουμε να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ξανά ***ακριβώς*** το σήμα συνεχούς χρόνου

- **Ερώτημα Ι**: *ποιά* δείγματα πρέπει να πάρουμε;
  - Όποια θέλουμε? Κάποια συγκεκριμένα? Έχει σημασία?
- **Ερώτημα ΙΙ**: *πόσο συχνά* πρέπει να τα πάρουμε;
  - Μια τιμή-δείγμα κάθε δευτερόλεπτο? Πιο συχνά? Λιγότερο συχνά? Έχει σημασία?
- Ας υποθέσουμε ότι θα δειγματοληπτήσουμε ***ομοιόμορφα*** και ότι το σήμα μας είναι σήμα ***βασικής ζώνης (baseband signal)***
  - Δηλ. με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος είναι μηδενικός εκτός από ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, π.χ. $X(f) = 0,\ \ f \notin [-B, B]$

- **Δειγματοληψία**

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ και ο μετασχ. Fourier του $X(f)$ όπως στο σχήμα



- Για να «τραβήξουμε» δείγματα από το σήμα $x(t)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη δειγματοληπτική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

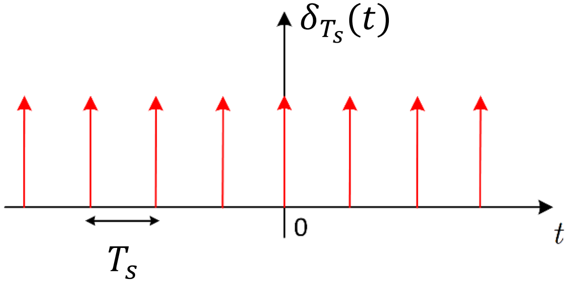
- Ας ορίσουμε μια **συνάρτηση δειγματοληψίας με περίοδο δειγματοληψίας $\boldsymbol{T_s}$**

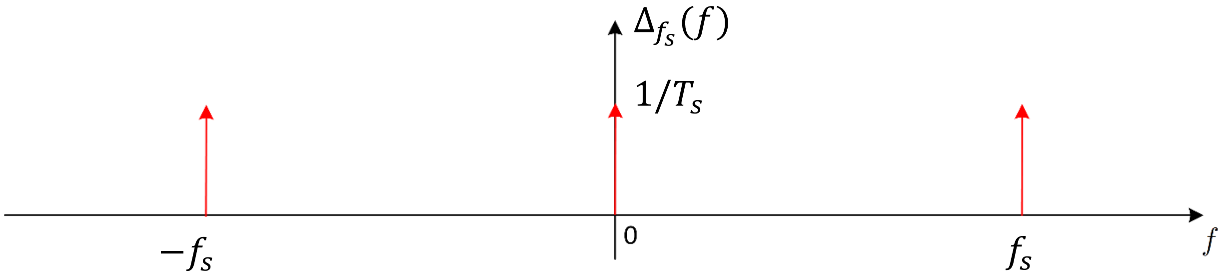
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-kf_s)$$

- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** είναι $\boldsymbol{f_s = 1/T_s}$

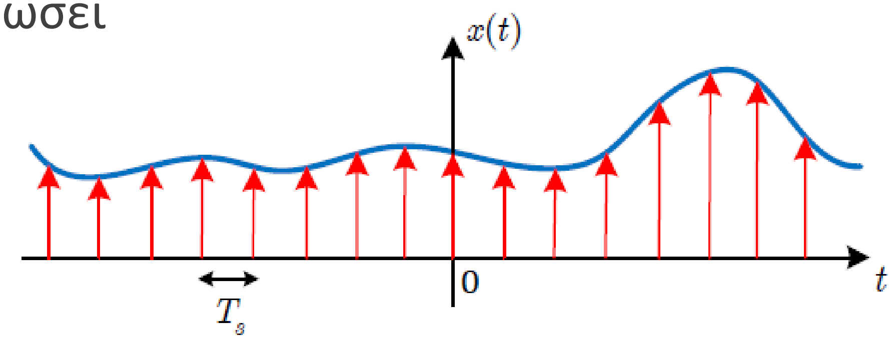
- **Δειγματοληψία**

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

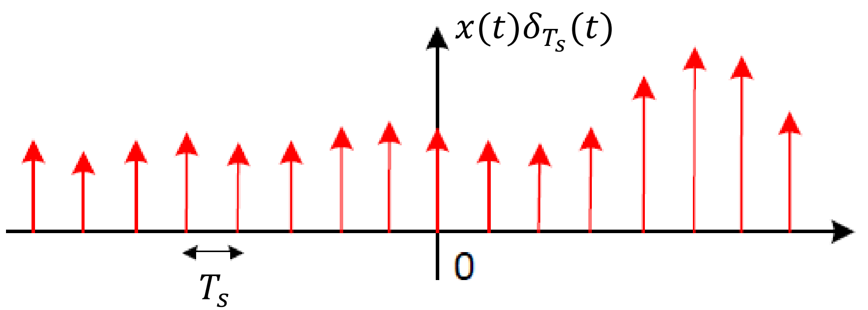




- Το γινόμενο της $\delta_{T_s}(t)$ με το σήμα $x(t)$ θα δώσει μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με *μη μοναδιαίους* συντελεστές
  - Συναρτήσεις δέλτα που η επιφάνειά τους έχει αλλάξει με βάση το σήμα



- Τα δείγματα απέχουν χρόνο T_s μεταξύ τους
  - Ας υποθέσουμε ότι αυτή η τιμή είναι «αρκετά μικρή»
  - Οπότε η $f_s = 1/T_s$ «αρκετά μεγάλη»



- **Δειγματοληψία**
- Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των δυο σημάτων στο χρόνο θα μετατραπεί σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας
- Δηλ.

$$x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

και

$$X(f) * \Delta_{f_s}(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}X(f-kf_s)$$

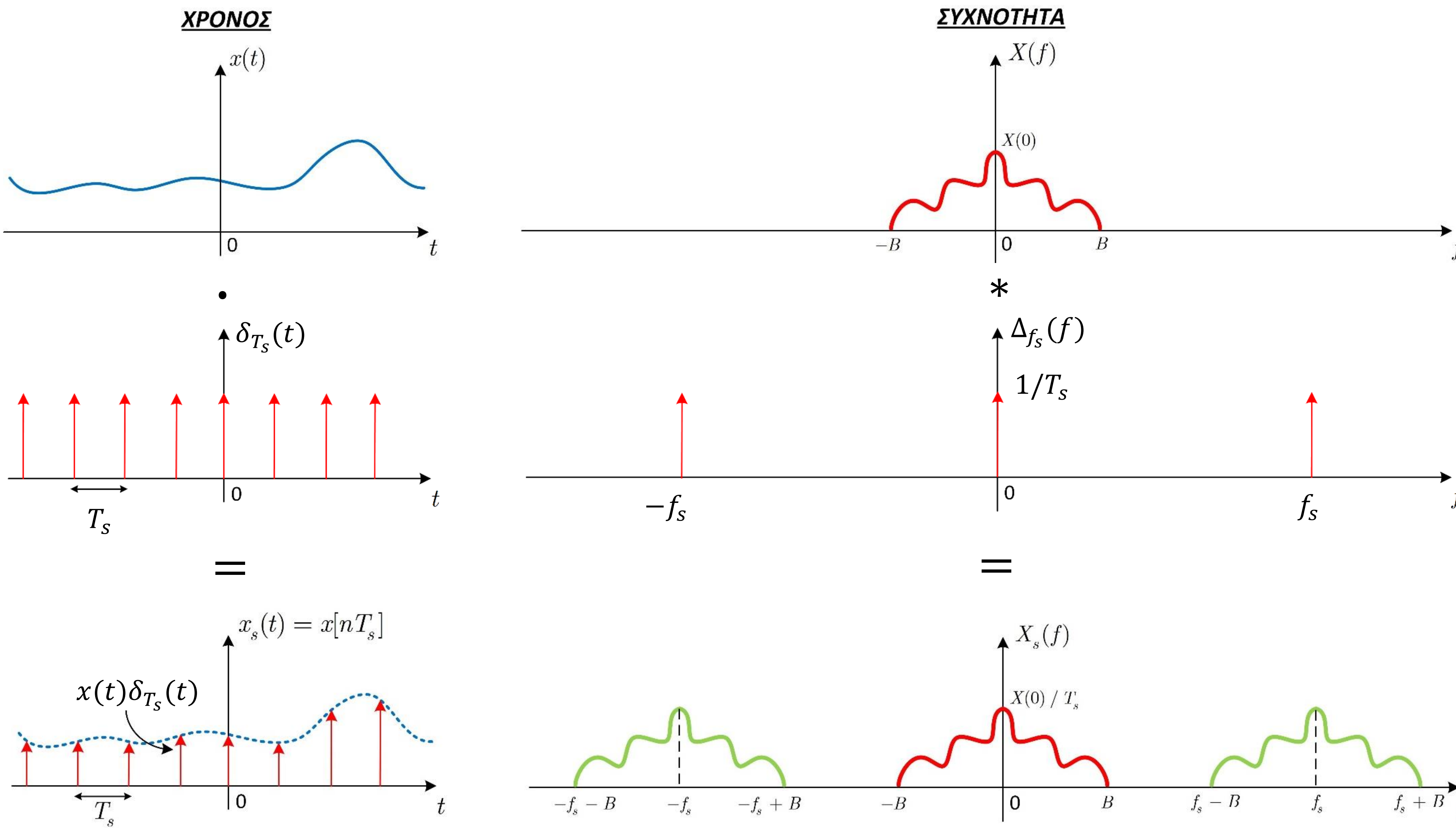
λόγω της ιδιότητας

$$X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$$

- Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα από τους μετασχηματισμούς Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου, τοποθετημένους σε απόσταση f_s (ανά δυο) μεταξύ τους!!
- Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι **περιοδικός** στη συχνότητα με περίοδο f_s!!!

- **Δειγματοληψία**

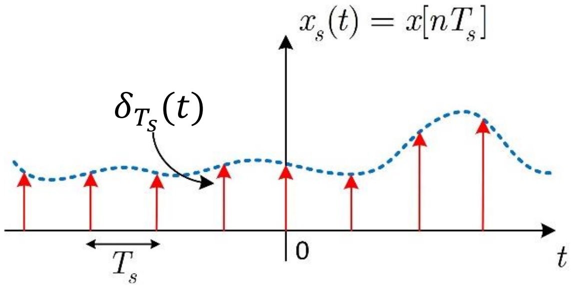
- Σχηματικά, έχουμε την παρακάτω εικόνα:

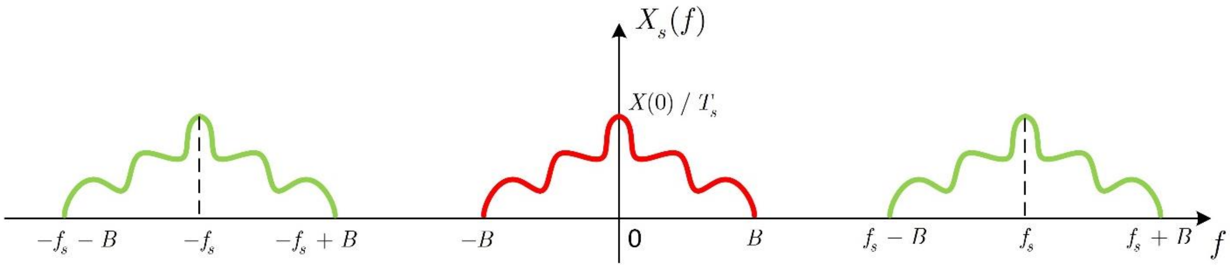


- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**

- Έχουμε τώρα τα δείγματα από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου
  - Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου

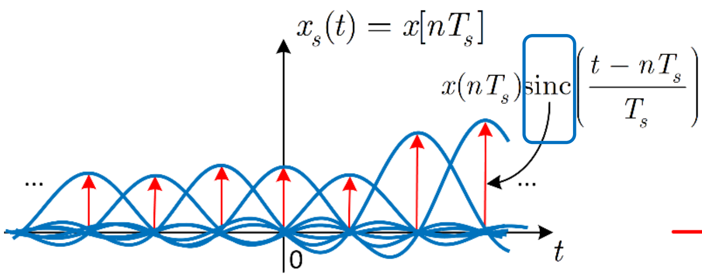
- Πως θα ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?

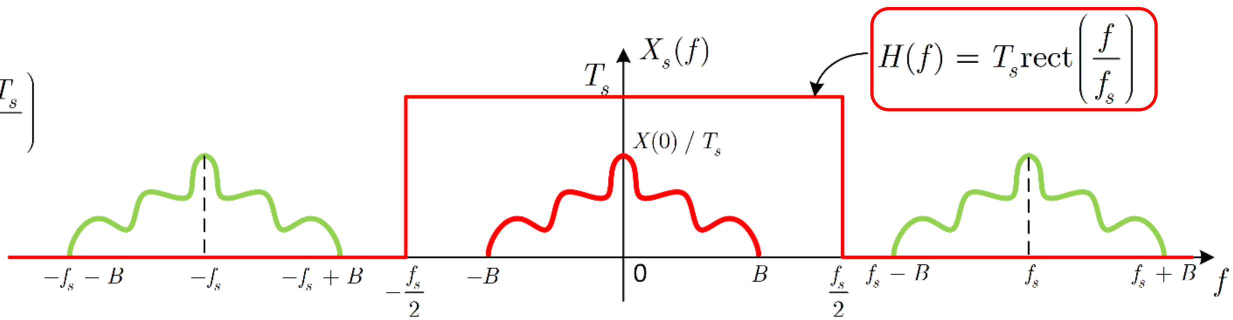




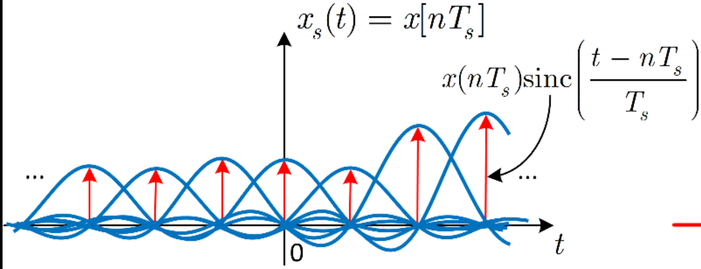
- Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θα μπορούσε να απομονώσει το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου

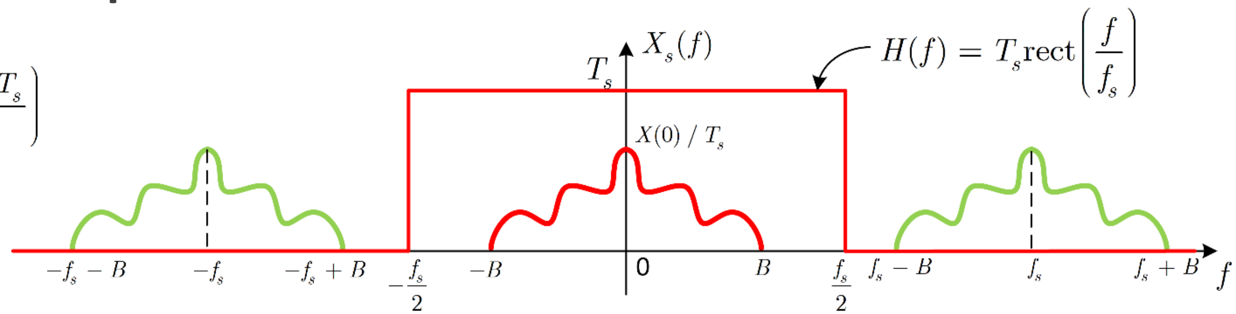
- Το γινόμενο του φίλτρου με το φάσμα στη συχνότητα αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο χρόνο των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$!!!!





- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**





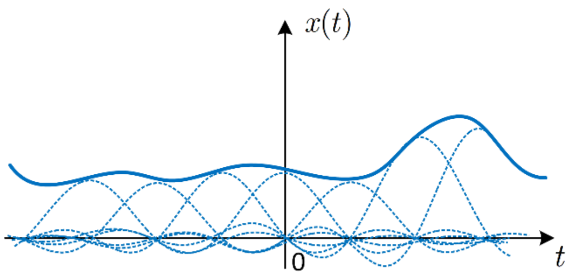
- Με μαθηματικά:

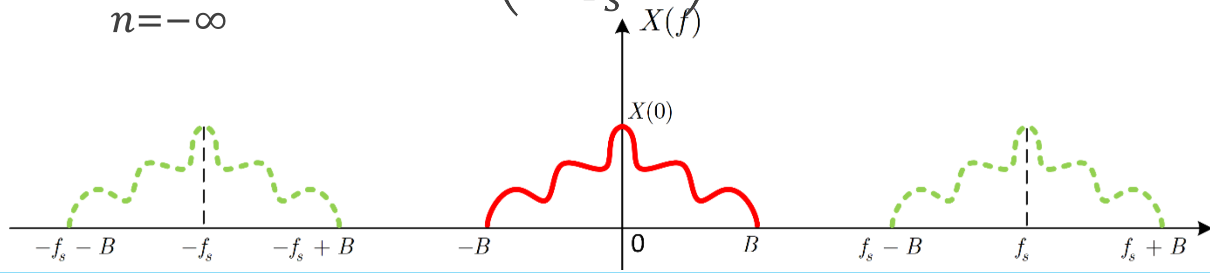
$$[X(f) * \Delta_{f_s}(f)]H(f) = [X(f) * \Delta_{f_s}(f)]T_s\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = X(f)$$

- Στο πεδίο του χρόνου:

$$\left(x(t)\delta_{T_s}(t)\right) * h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

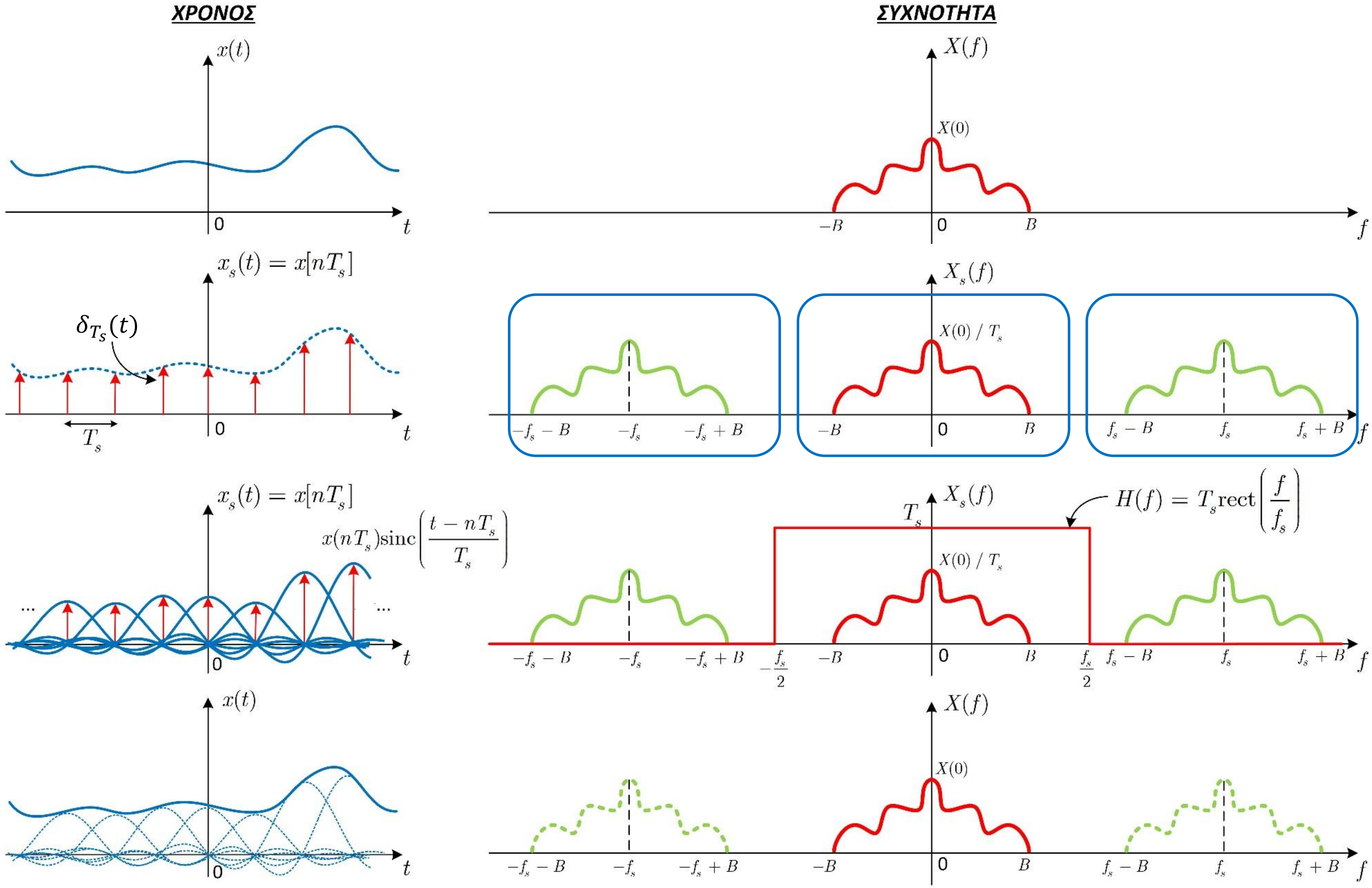
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) = x(t)$$



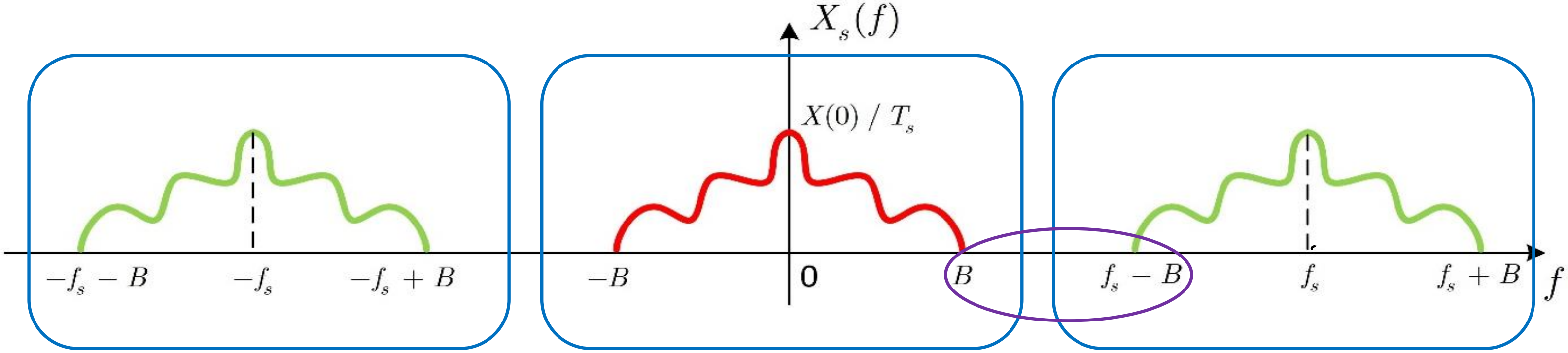


- **Δειγματοληψία και Ανακατασκευή**

- Συγκεντρωτικά:



- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**



- Για να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, πρέπει το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος να μην έχει επικαλύψεις!
  - Η **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s να είναι «αρκετά μεγάλη»
  - Πόσο μεγάλη?

- Αρκεί

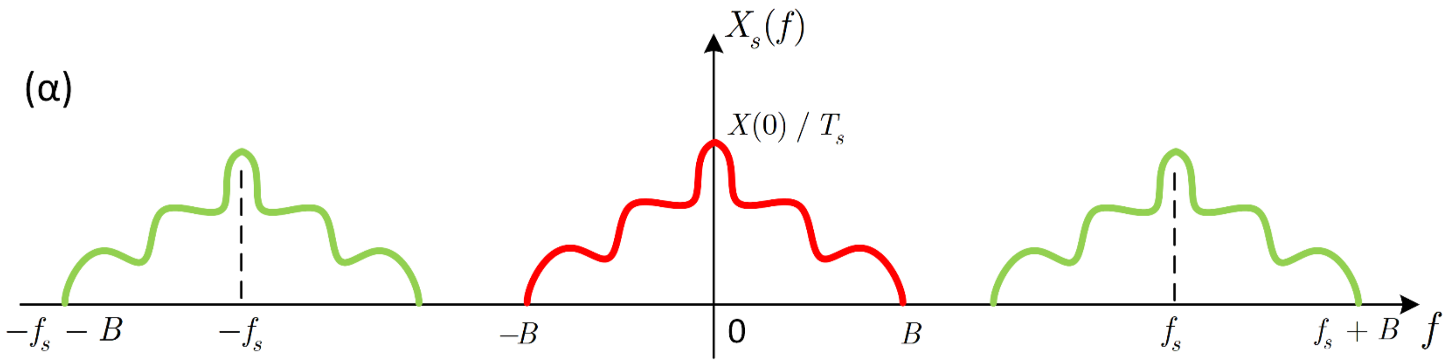
$$\boxed{f_s - B > B \Leftrightarrow f_s > 2B = 2f_{max}}$$

που αποτελεί και το θεώρημα της Δειγματοληψίας

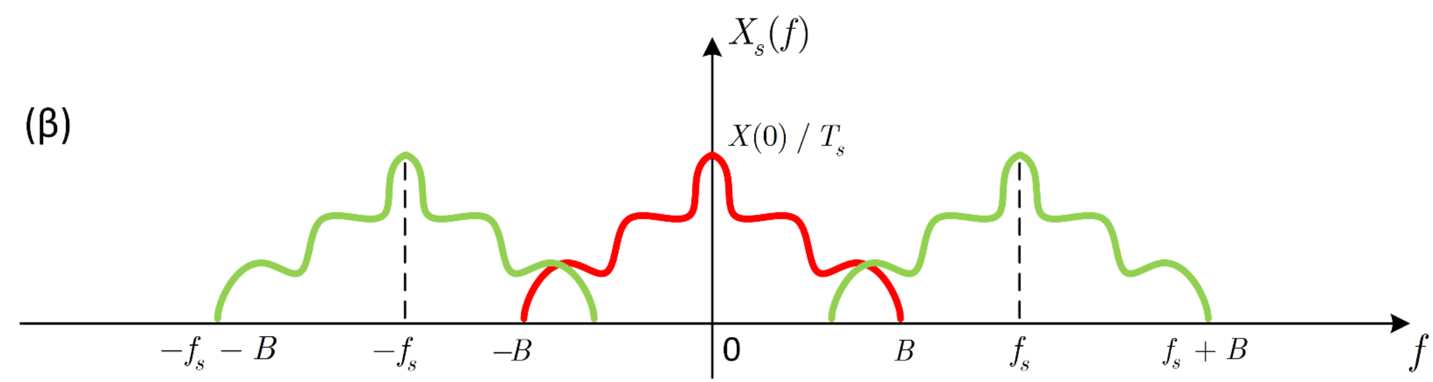
- Με άλλα λόγια, **μπορούμε να ανακατασκευάσουμε <u>πλήρως και ακριβώς</u> το σήμα συνεχούς χρόνου από μια δειγματοληπτημένη έκδοσή του (ένα σήμα *διακριτού* χρόνου) αν τα δείγματα έχουν ληφθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $2B$ Hz, με $2B$ τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος**

Δειγματοληψία – Aliasing

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?
- Αν $f_s > 2f_{max}$, τότε:



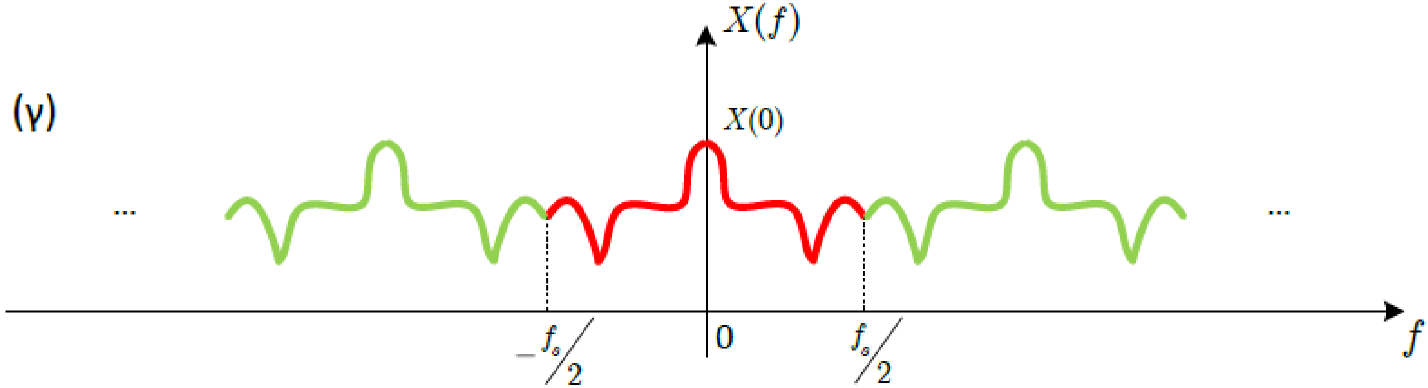
- Αν όμως $f_s < 2f_{max}$, τότε:



- **Δειγματοληψία – Aliasing**

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

- Το φάσμα που θα αποκόψει το χαμηλοπερατό φίλτρο θα μοιάζει με το παρακάτω:



- Το φάσμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα εντελώς διαφορετικό σήμα στο χρόνο, σε σχέση με αυτό που δειγματοληπτήθηκε!!

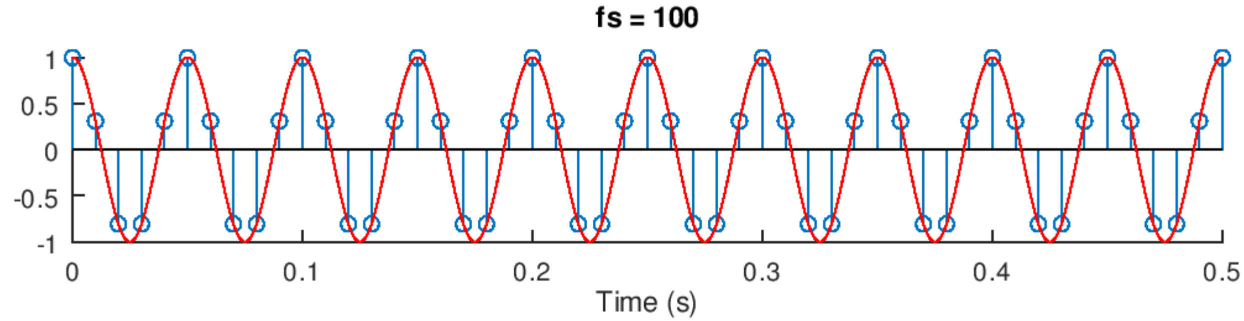
- Βλέπετε ότι έχουν εισαχθεί (και αλλοιώσει) το φάσμα συχνότητες που δεν ανήκουν σε αυτό (ξένες συχνότητες)
  - … οι οποίες προέρχονται από το άθροισμα συχνοτήτων του ίδιου του σήματος και των γειτονικών αντιγράφων του

- Οι συχνότητες αυτές λέγονται **ψευδώνυμες** συχνότητες (**aliased** frequencies)

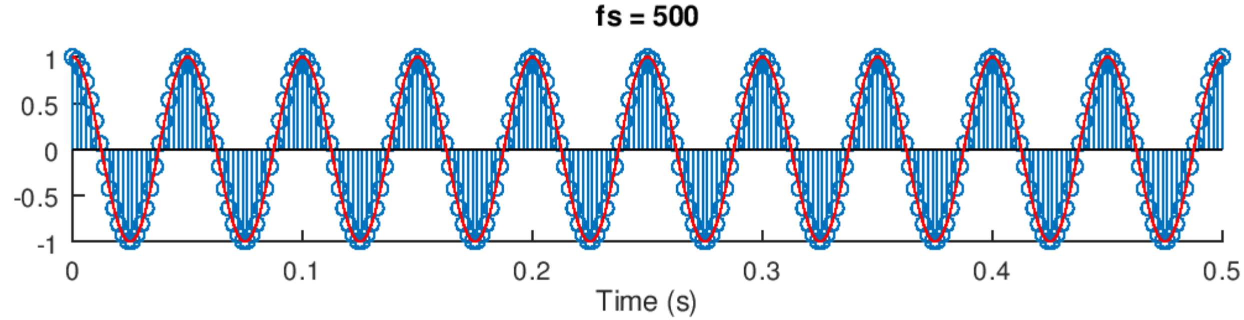
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
  - **Ψευδωνυμία** ή **Αναδίπλωση** (in Greek)

- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Έστω ένα απλό ημίτονο με $f_0 = 20$ Hz το οποίο δειγματοληπτείται με συχνότητες δειγματοληψίας

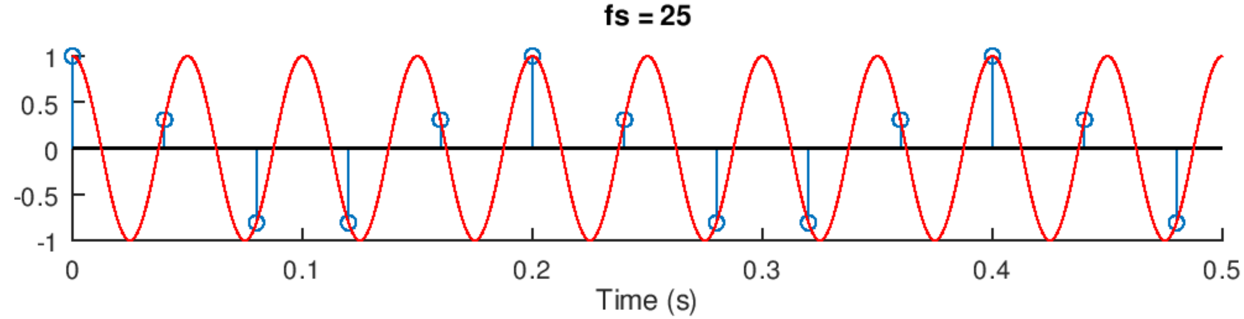
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz

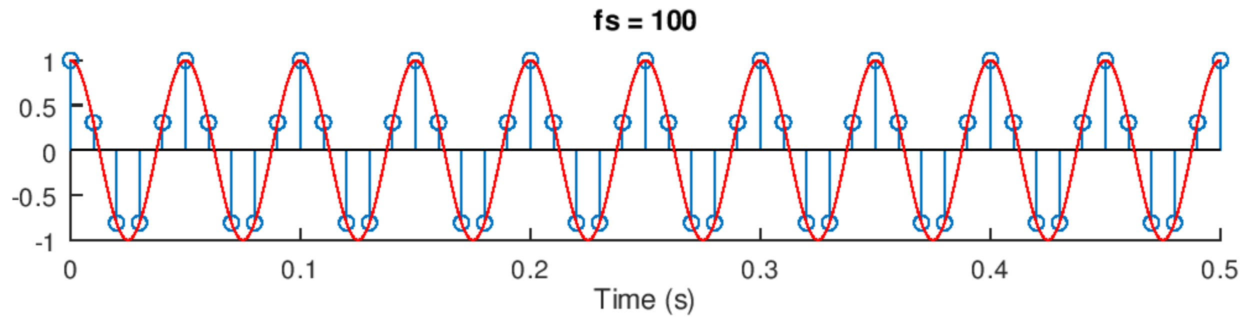


❑ $f_s = 25$ Hz

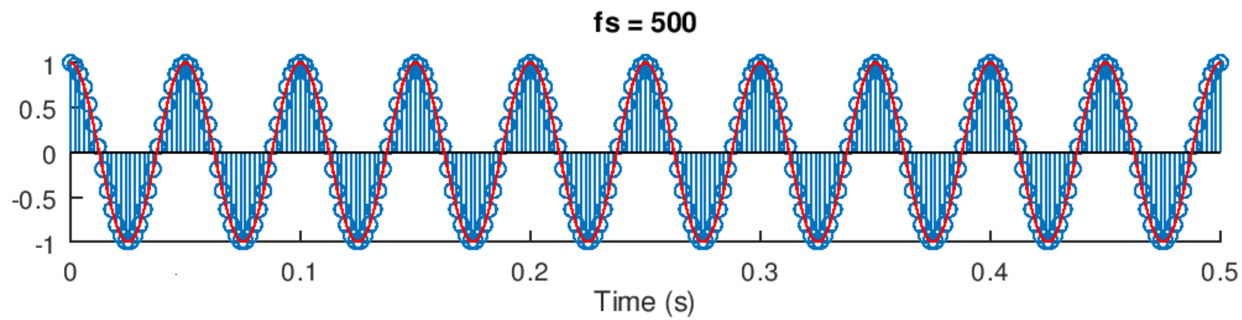


- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ποιο είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται στην τελευταία περίπτωση?

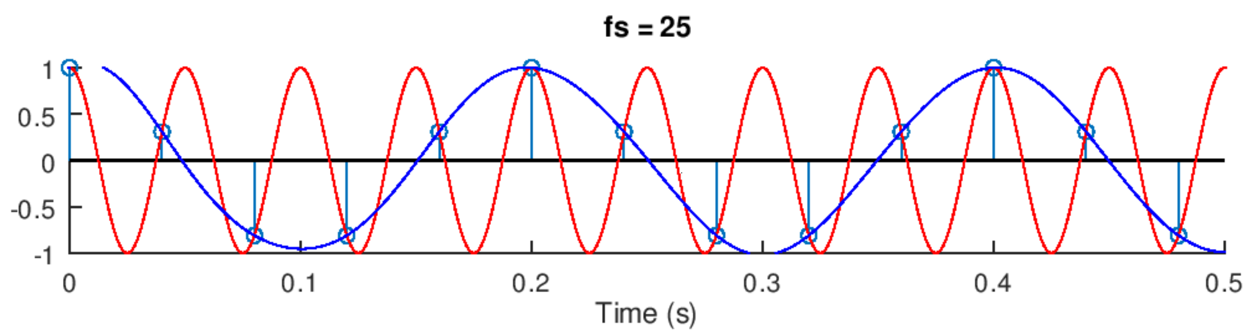
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz



❑ $f_s = 25$ Hz



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:
  - Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Για τη δειγματοληψία, θέτω $t := nT_s = \frac{n}{f_s}$, $n \in \mathbb{Z}$.

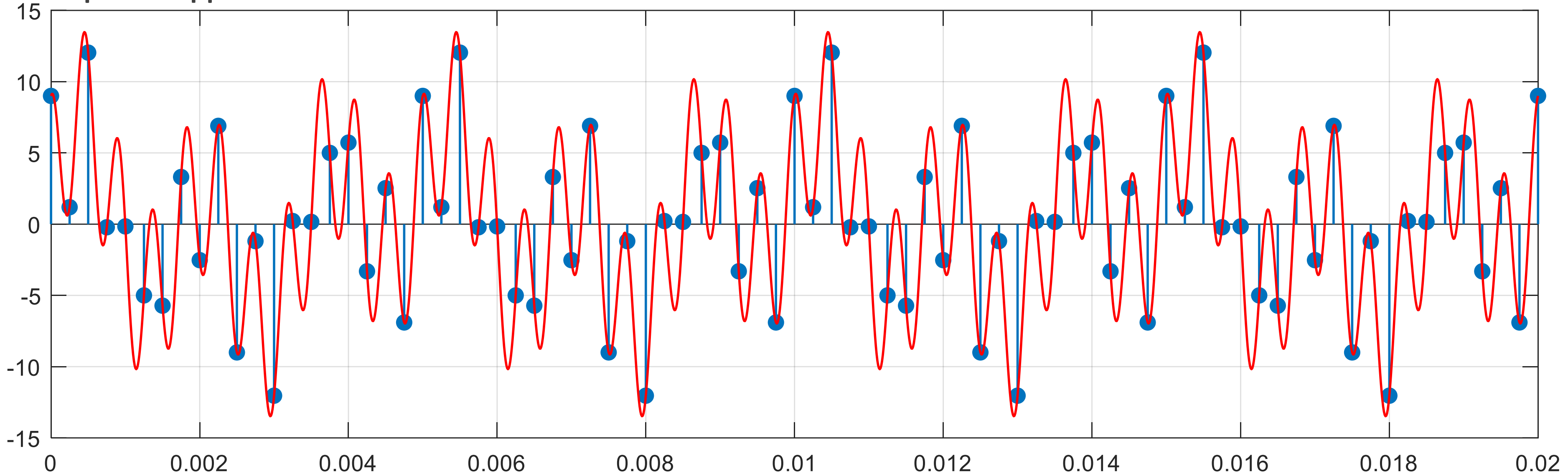
Άρα

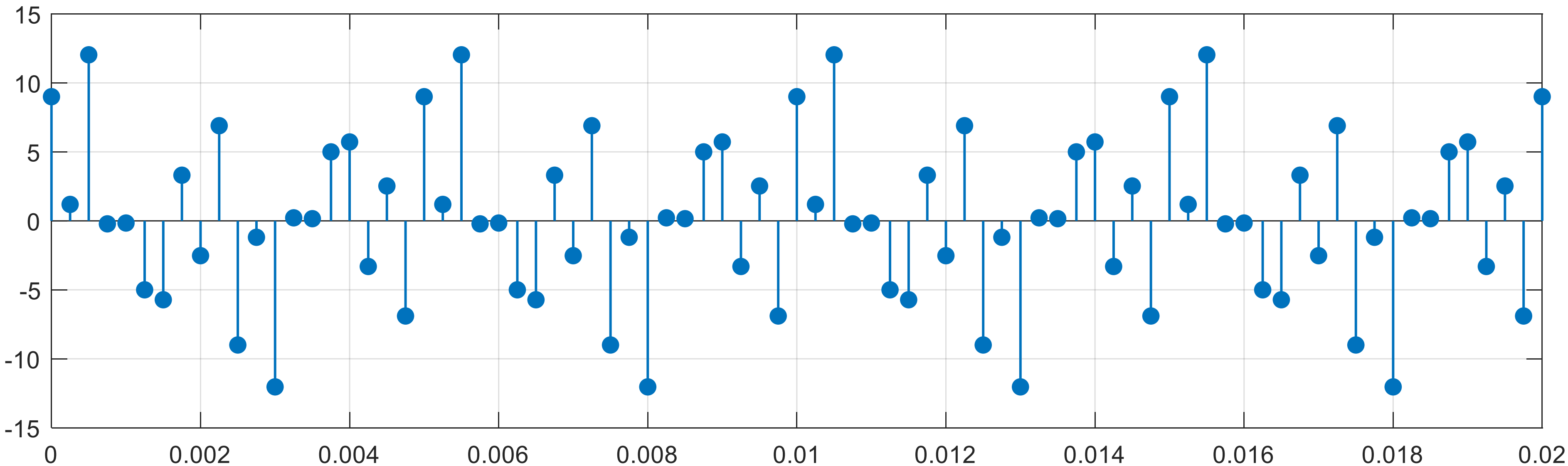
$$x[n] = x(t)\Big|_{t:=\frac{n}{f_s}} = 3\cos\left(4\cancel{00}\pi \frac{n}{40\cancel{00}}\right) + 5\sin\left(\frac{12\cancel{00}\pi n}{40\cancel{00}}\right) + 6\cos\left(\frac{44\cancel{00}\pi n}{40\cancel{00}}\right)$$

$$= 3\cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6\cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right)$$

- **Δειγματοληψία**

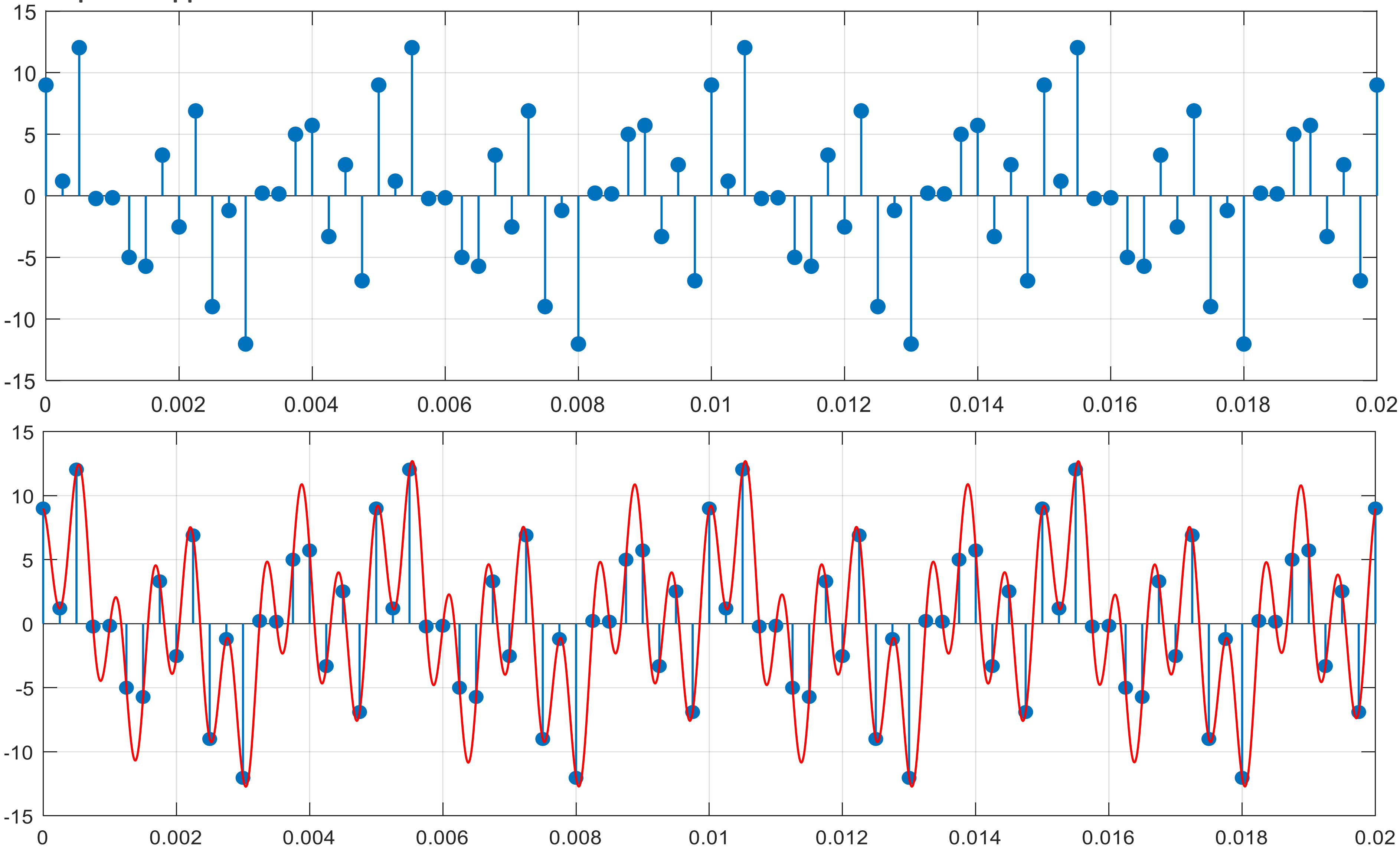
- Παράδειγμα:





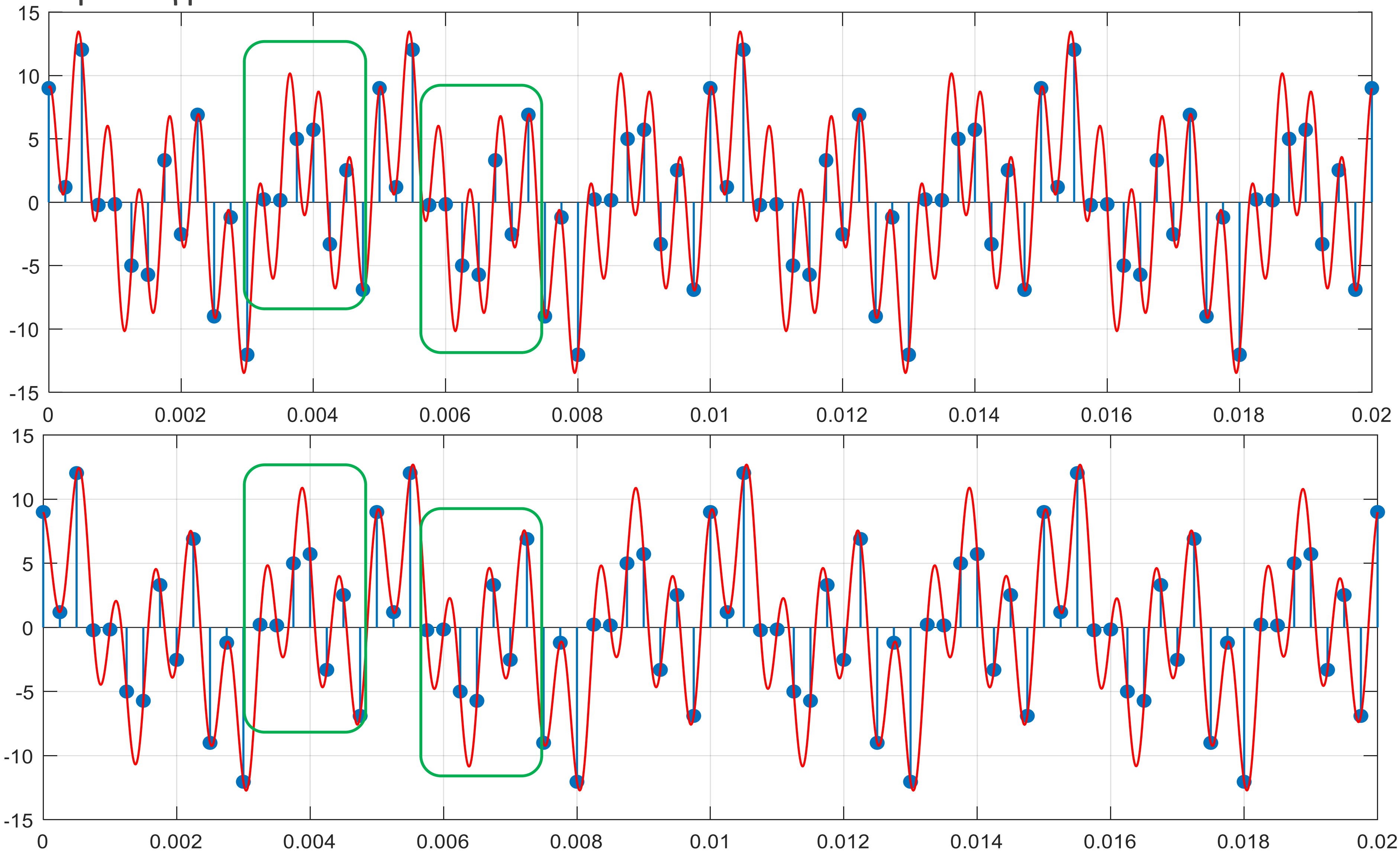
- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:



- **Δειγματοληψία**

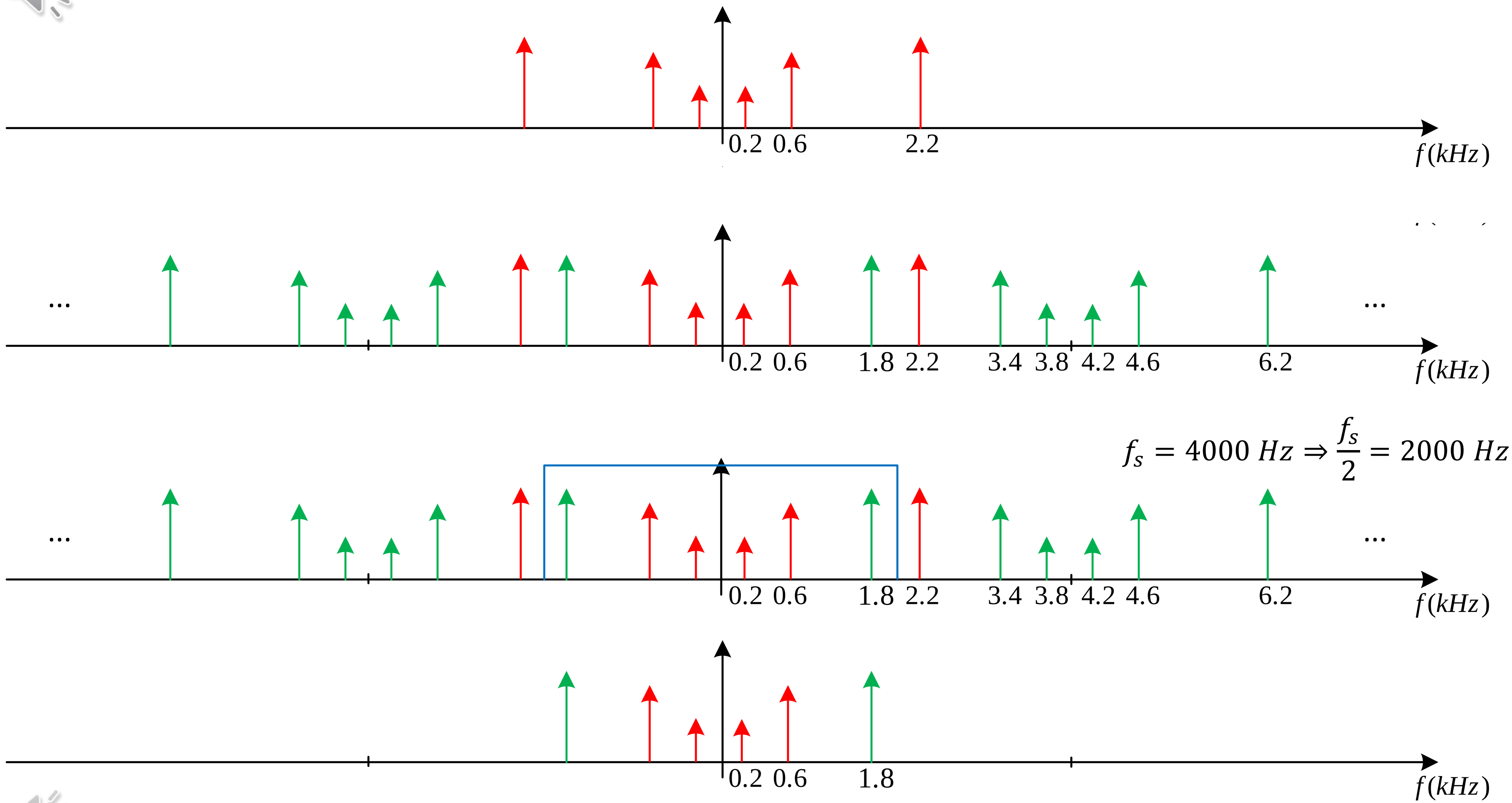
- Παράδειγμα:



- **Δειγματοληψία**

- Ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο του ανακατασκευασμένου σήματος?

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$



$$x_r(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(3600\pi t)$$

- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

$2f_{max}$

○ Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α′) $x(t)$

(β′) $x(t - t_0)$

(γ′) $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ′) $x(t - t_0) + x(t + t_0)$

(ε′) $\frac{dx(t)}{dt}$

(ϛ′) $x(t)x(t)$

(ζ′) $x(t) * x(t)$

α) $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, $f \in [-B, B]$, άρα $f_{max} = B$, οπότε Ρ.Ν $= 2B$

β) $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$, είναι μη μηδενικό στο $[-B,B]$, άρα Ρ.Ν $= 2B$

γ) $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f-f_0)$, — " — " — στο $[-B+f_0, f_0+B]$, άρα
Ρ.Ν $= 2(f_0+B)$.

δ) $x(t-t_0) + x(t+t_0) \xleftrightarrow{F} X(f)e^{-j2\pi f t_0} + X(f)e^{+j2\pi f t_0} = 2X(f)\cos(2\pi f t_0)$
είναι μη μηδενικό στο $[-B,B]$, άρα Ρ.Ν $= 2B$

$[-B,B]$ $\quad -\infty < f < +\infty$

- **Δειγματοληψία**

ΕΒΑ × 2

- Παράδειγμα:

○ Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α′) $x(t)$

(β′) $x(t-t_0)$

(γ′) $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ′) $x(t-t_0)+x(t+t_0)$

(ε′) $\frac{dx(t)}{dt}$

(ϛ′) $x(t)x(t)$

(ζ′) $x(t) * x(t)$

(ε) $\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} \underbrace{j2\pi f}_{\forall f} \underbrace{X(f)}_{[-B,B]}$, είναι μη μηδενικό στο $[-B,B]$, άρα Ρ.Ν $= 2B$

(στ) $x(t)\cdot x(t) = x^2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \underbrace{X(f)}_{[-B,B]} * \underbrace{X(f)}_{[-B,B]}$, είναι μη μηδενικό στο $[-2B, 2B]$, άρα Ρ.Ν $= 4B$.

(ζ) $x(t) * x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \underbrace{X(f)}_{[-B,B]} \cdot \underbrace{X(f)}_{[-B,B]}$, μη μηδενικό στο $[-B,B]$. άρα Ρ.Ν $= 2B$.

- **Δειγματοληψία**

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

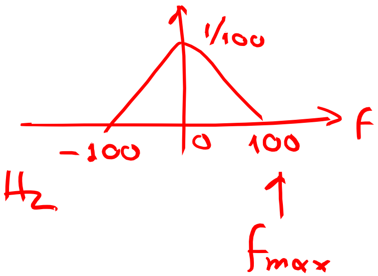
$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

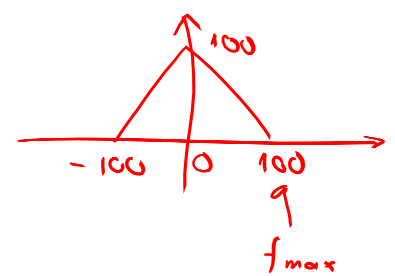
(α′) $\mathrm{sinc}^2(100t)$ (β′) $\frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t)$ (γ′) $\mathrm{sinc}(100t) + 3\mathrm{sinc}^2(60t)$ (δ′) $\mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

(α) $x(t) = \mathrm{sinc}^2(100t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{1}{100}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$



$\left(T\,\mathrm{sinc}^2(tT) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{tri}\left(\frac{f}{T}\right) \right)$, άρα $P.N = 2f_{max} = 200\ Hz$

(β) $x(t) = \frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = 100\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$



άρα ξανά $P.N = 2f_{max} = 200\ Hz$

(γ) $x(t) = \mathrm{sinc}(100t) + 3\,\mathrm{sinc}^2(60t)$

$$\downarrow F \qquad\qquad \downarrow F$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f}{60}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$[-50, 50]$ $[-60, 60]$ $\longrightarrow$ $[-60, 60]$ $\longrightarrow$ άρα $P.N = 120\ Hz$

- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

$(\alpha')\ \ \mathrm{sinc}^2(100t) \quad (\beta')\ \ \frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t) \quad (\gamma')\ \ \mathrm{sinc}(100t) + 3\mathrm{sinc}^2(60t) \quad (\delta')\ \ \mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

$(\delta)\ x(t) = \mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

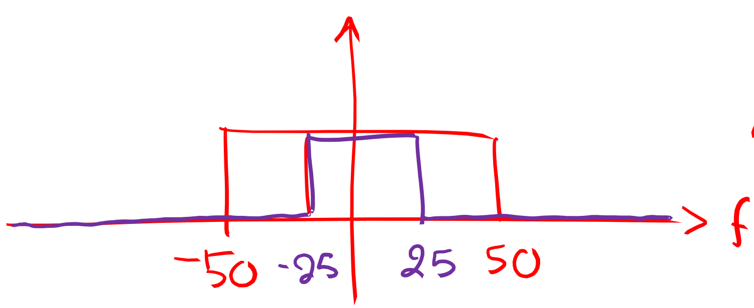
$\downarrow F \qquad \downarrow F$

$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$[-25, 25] \qquad [-50, 50]$

$\Rightarrow P.N = 50\ Hz$

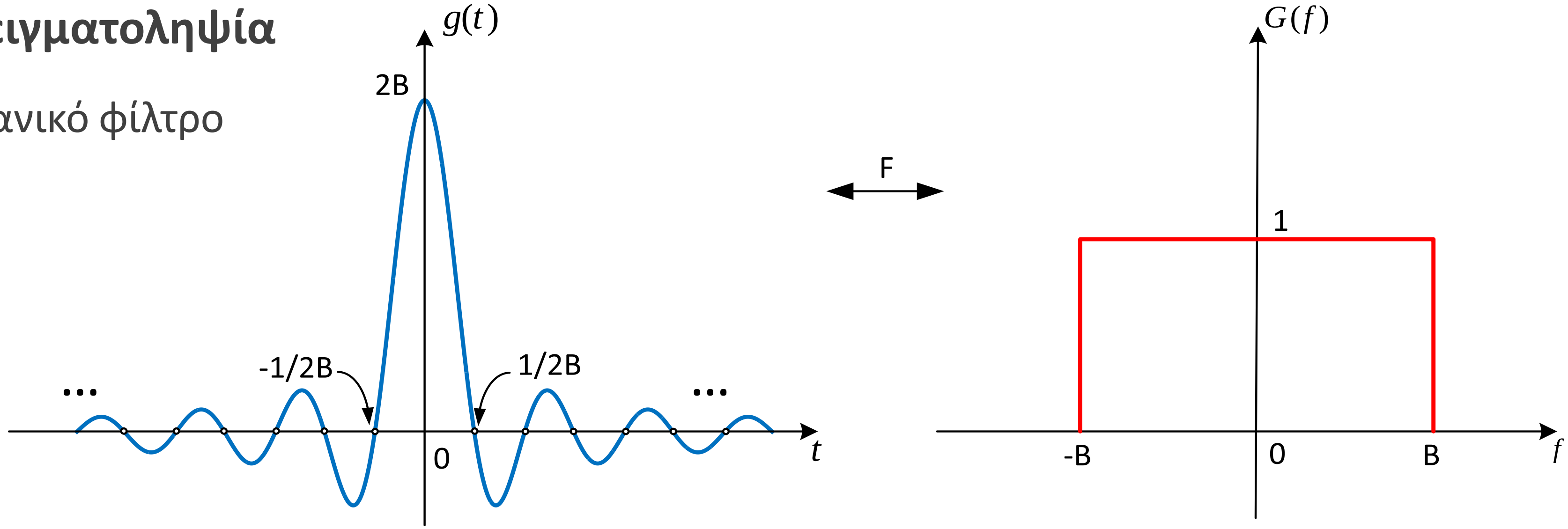


$\rightsquigarrow [-25, 25]$

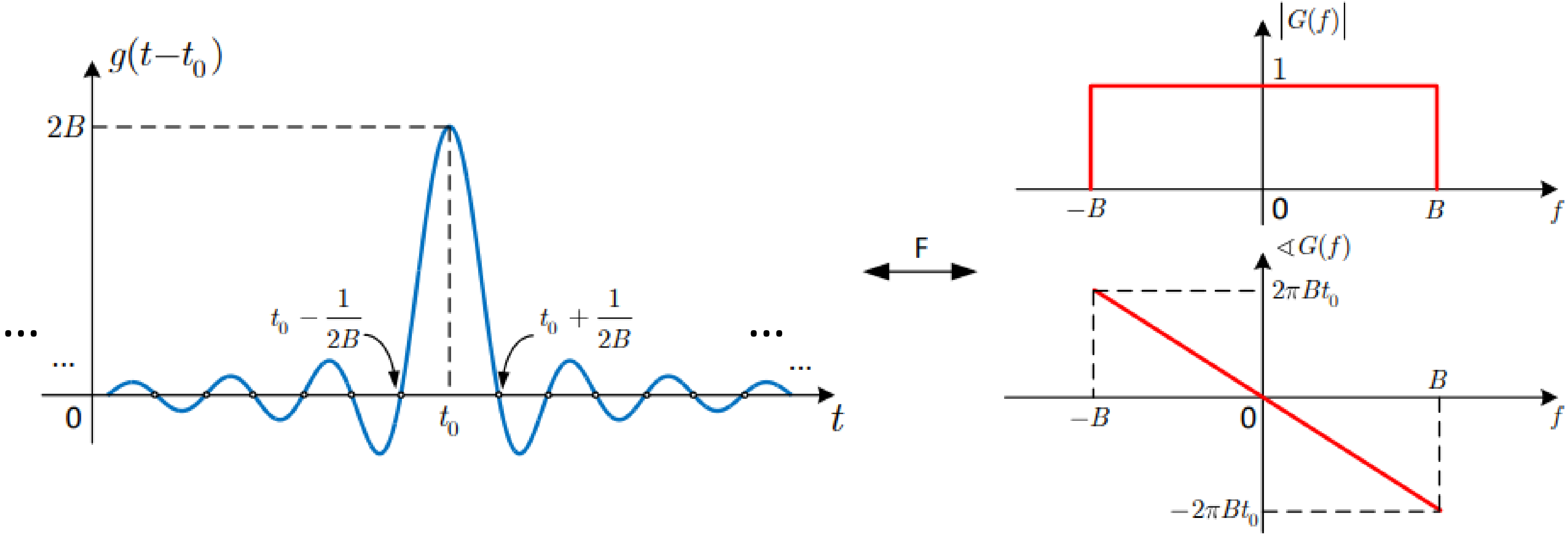
- **Δειγματοληψία**
- Πρακτικά προβλήματα:

1. Κανένα πραγματικό σήμα δεν είναι βασικής ζώνης
   - Αφού ένα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων σήμα πρέπει να είναι άπειρης διάρκειας στο χρόνο!
   - Εφαρμόζουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για να μετατρέψουμε το φάσμα του σήματος σε βασικής ζώνης
2. Οι συναρτήσεις Δέλτα δεν υπάρχουν στην πράξη
   - Μπορούν να προσεγγιστούν από στενούς τετραγωνικούς παλμούς
     - **Φυσική Δειγματοληψία**
     - **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**
3. Το χαμηλοπερατό φίλτρο που αποκόπτει το βασικό φάσμα δεν μπορεί να υλοποιηθεί (ιδανικό φίλτρο)
   - Ούτε η κρουστική του απόκριση (συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$), αφού είναι άπειρης διάρκειας και μη αιτιατή!
   - Μπορεί να προσεγγιστεί από μη ιδανικά φίλτρα
     - Από κρουστικές αποκρίσεις πεπερασμένης διάρκειας και αιτιατές

- **Δειγματοληψία**
- Ιδανικό φίλτρο

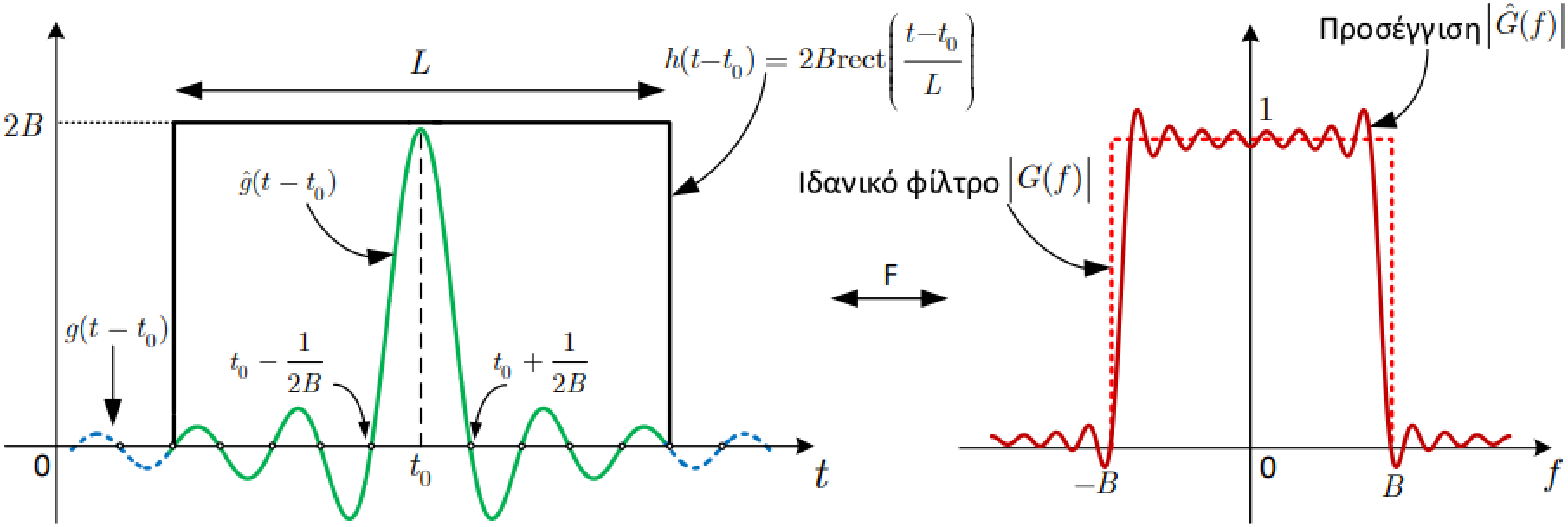


- Το μετατοπίζουμε προς τα δεξιά κατά t_0 έτσι ώστε η περισσότερη ενέργειά του να βρίσκεται στις θετικές χρονικές στιγμές



- **Δειγματοληψία**

- Ακόμα και μετά τη μετατόπιση, ένα τμήμα της κρουστικής απόκρισης είναι μη αιτιατό



- Εφαρμόζουμε ένα χρονικό παράθυρο διάρκειας L για να αποκόψουμε ένα τμήμα της

- Ο Μετασχ. Fourier του μη ιδανικού φίλτρου θα είναι

$$F\{\hat{g}(t-t_0)\} = \hat{G}(f)e^{-j2\pi f t_0} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) * 2B\mathrm{sinc}(fL)e^{-j2\pi f t_0}$$

- L μικρό: σφάλμα στην προσέγγιση μεγάλο, αλλά εύκολα και γρήγορα πραγματοποιήσιμο

- L μεγάλο: σφάλμα στην προσέγγιση μικρό, αλλά «αργό» στην πραγματοποίηση

- **Φυσική Δειγματοληψία**
- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα, μια σειρά από τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας D

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{D}{2}}{D}\right)$$

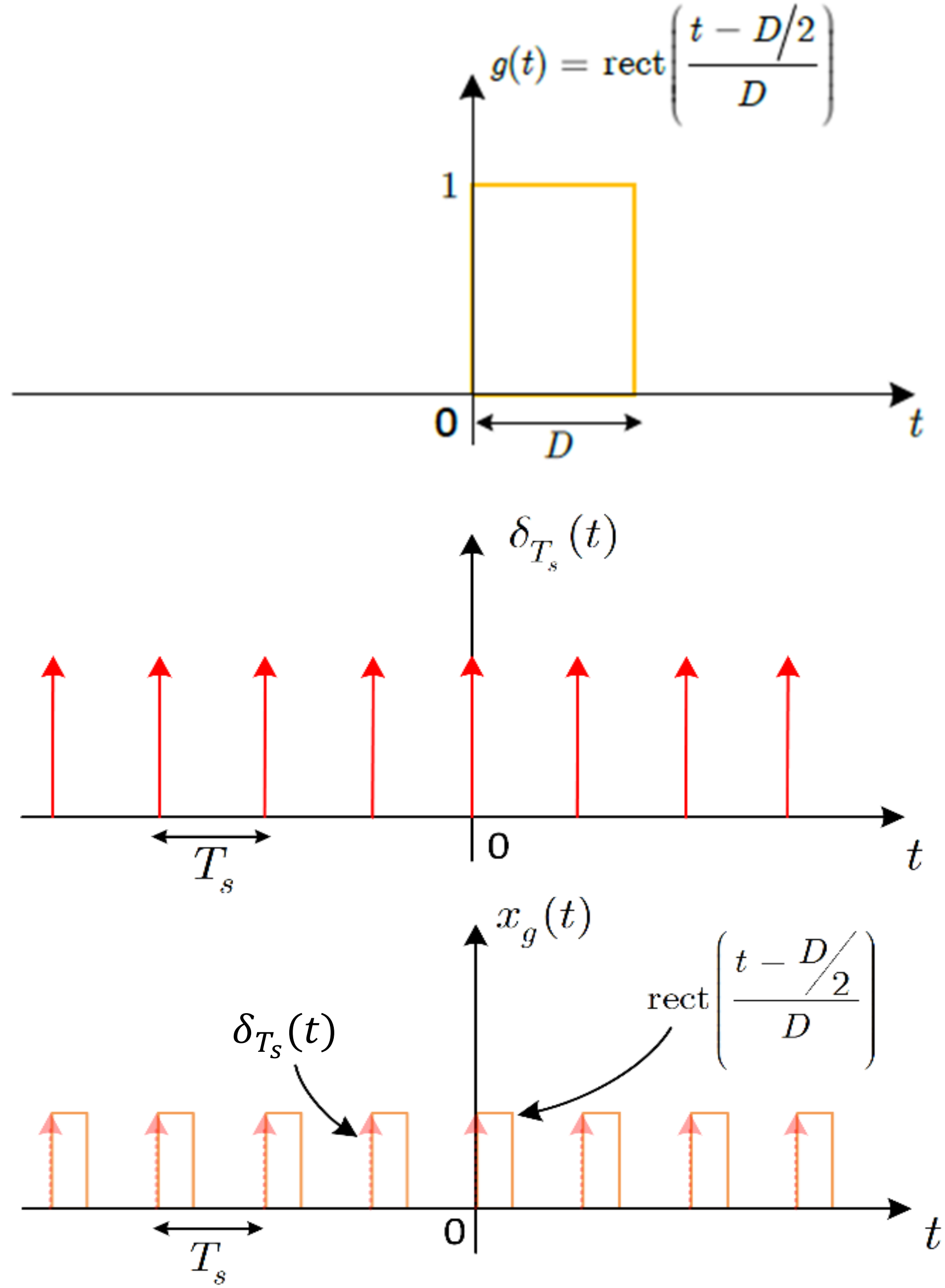
με μετασχ. Fourier

$$G(f) = D\mathrm{sinc}(fD)e^{-j\pi f D}$$

- Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα είναι

$$x_g(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_s)$$

- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα αυτή συνάρτηση δειγματοληψίας

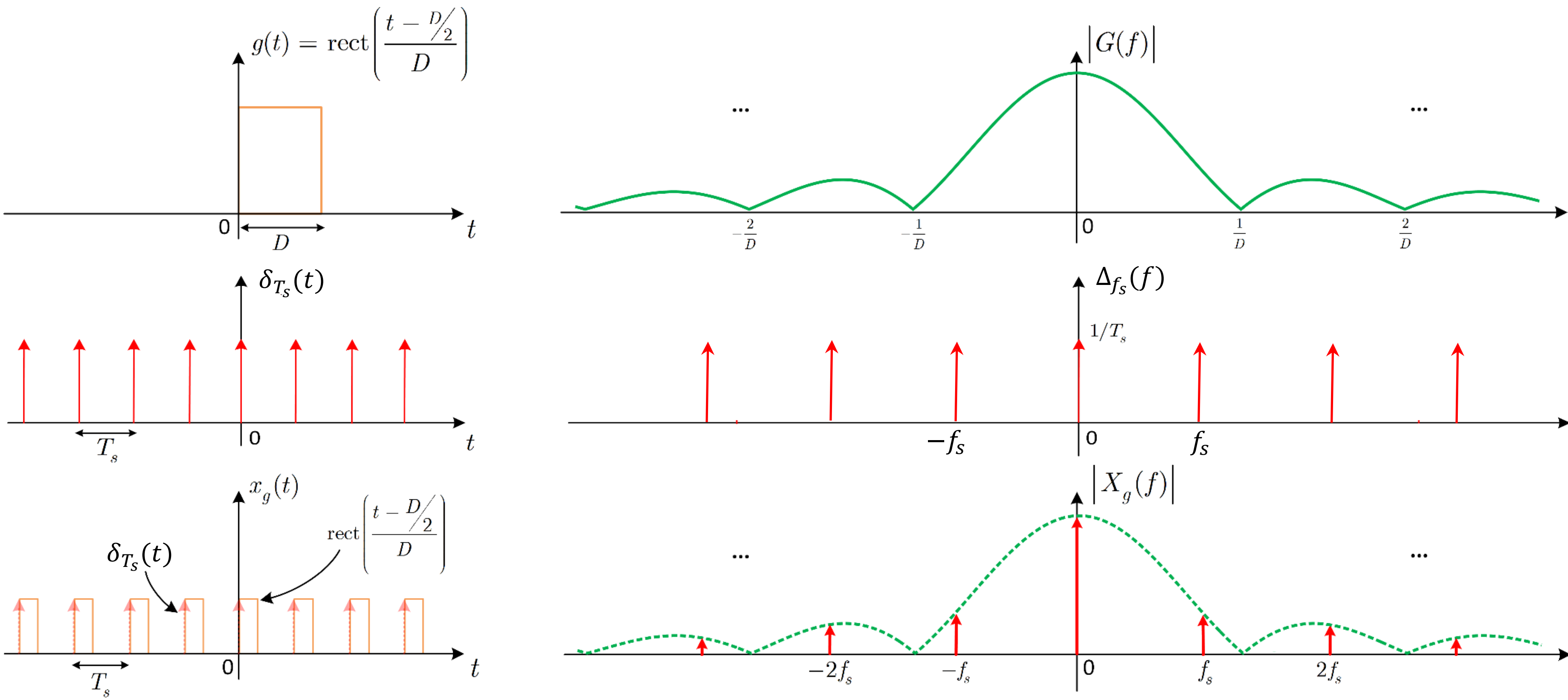


• Φυσική Δειγματοληψία

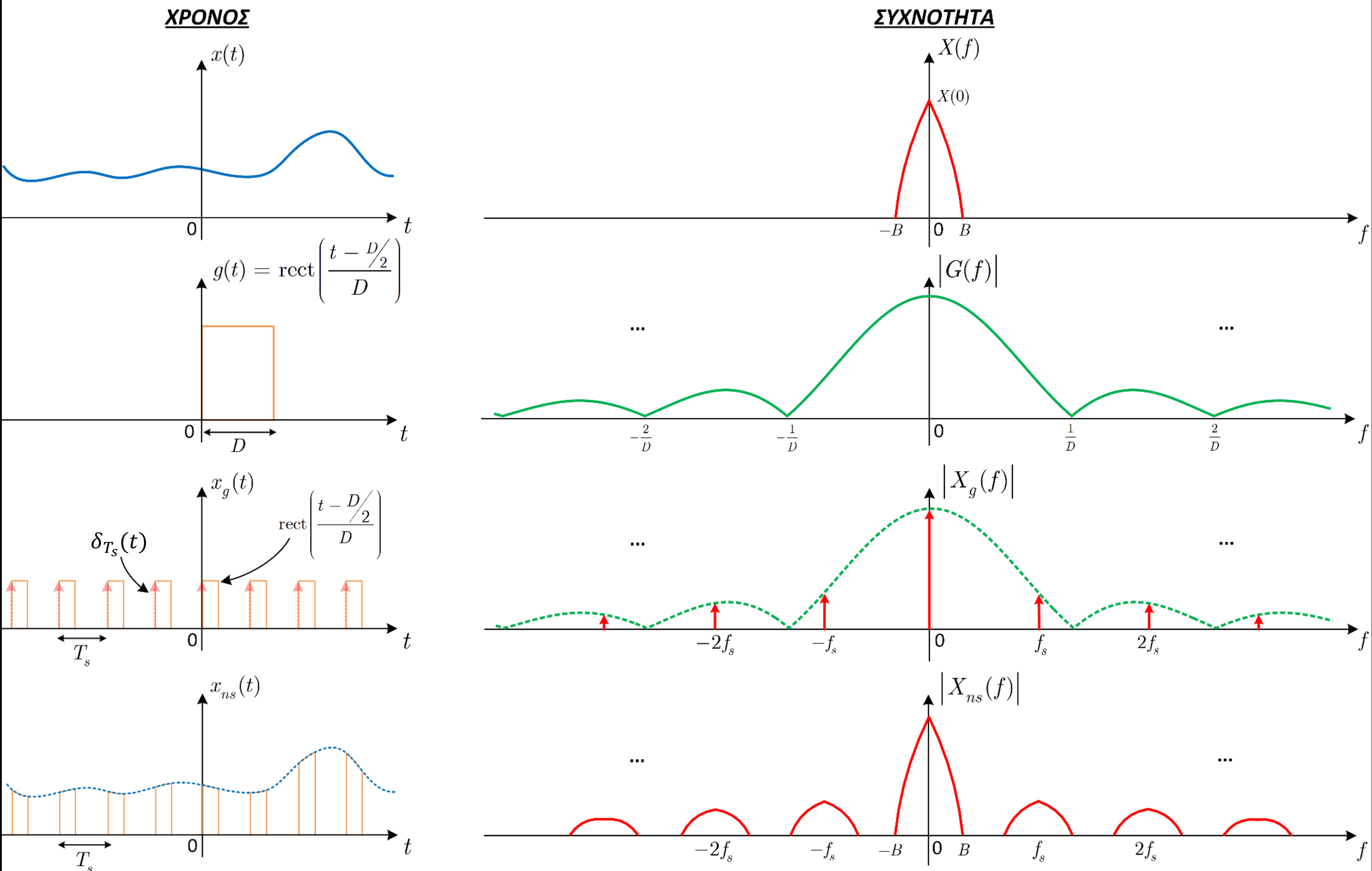
• Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα έχει μετασχ. Fourier

$$X_g(f) = G(f)\Delta_{f_s}(f) = G(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}G(kf_s)\delta(f-kf_s)$$

• Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη συνάρτηση δειγματοληψίας στους δυο χώρους

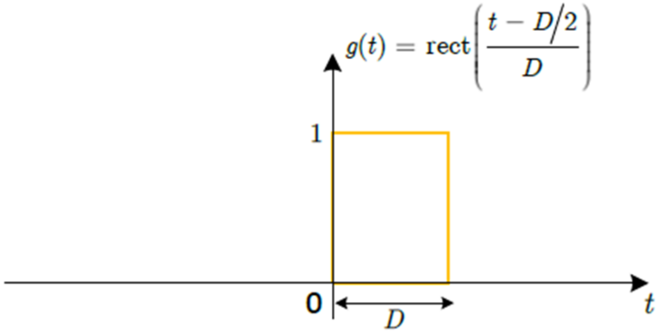


• Φυσική Δειγματοληψία

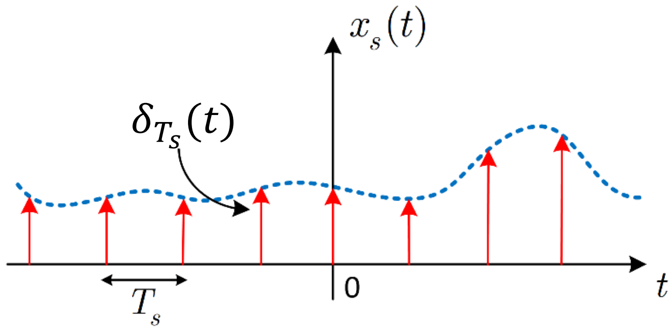


- **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**

- Πολλές φορές προτιμάται η σειρά παλμών να διατηρεί σταθερό το πλάτος κάθε παλμού σύμφωνα με τη χρονική στιγμή της δειγματοληψίας



- Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή αναπαρίσταται από μια εναλλαγή των πράξεων της φυσικής δειγματοληψίας

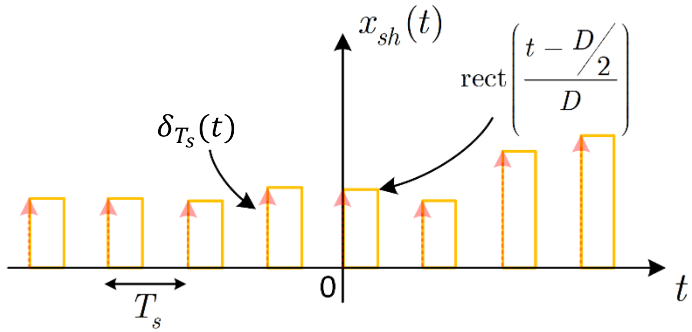


- Στη φυσική δειγματοληψία είχαμε

$$x_{ns}(t) = [\delta_{T_s}(t) * g(t)]x(t)$$

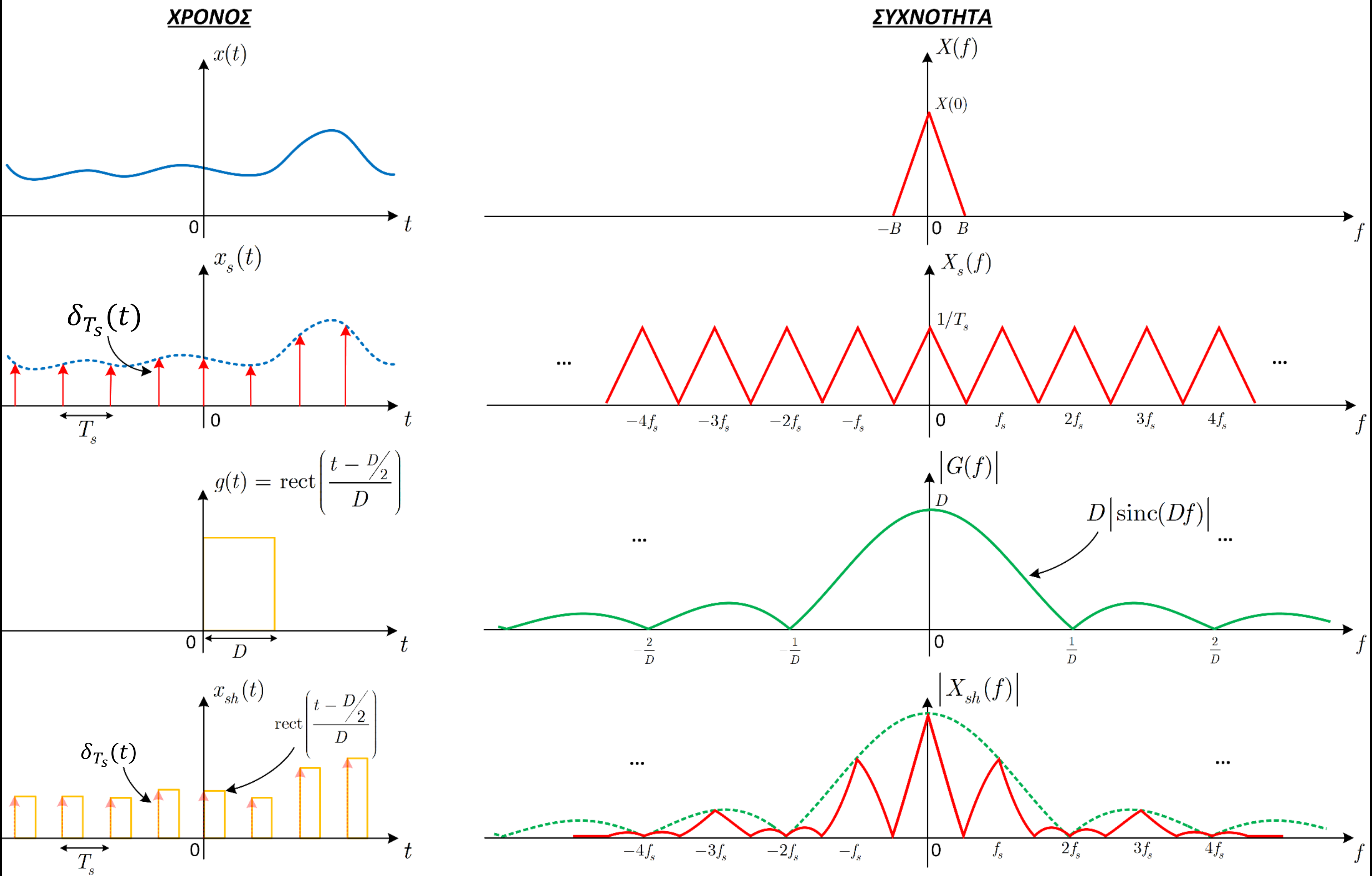
ενώ τώρα

$$x_{sh}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * g(t)$$



- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα διαδικασία

• **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ