ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Περιοδικά Σήματα**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ενέργειας**

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

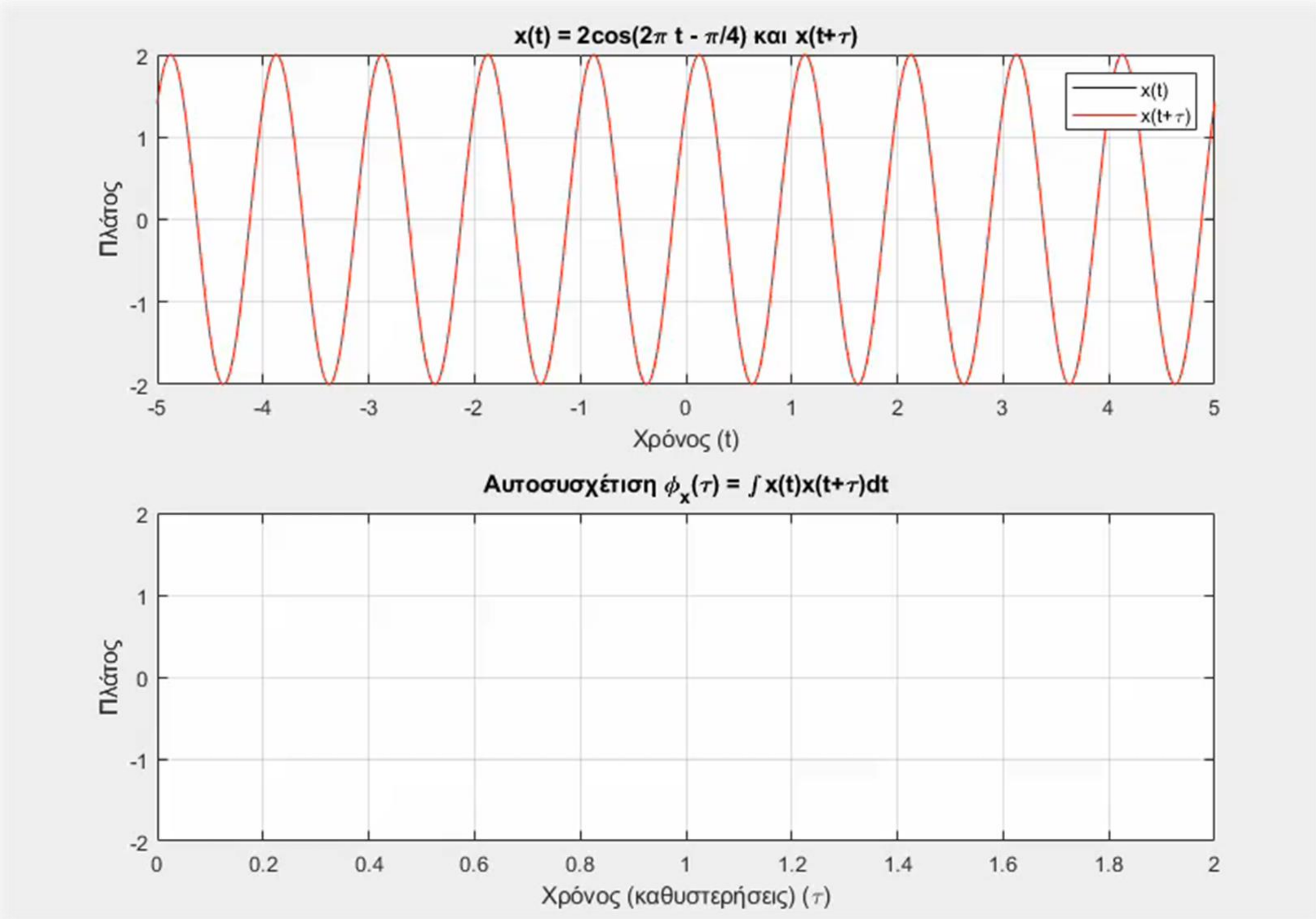
$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**

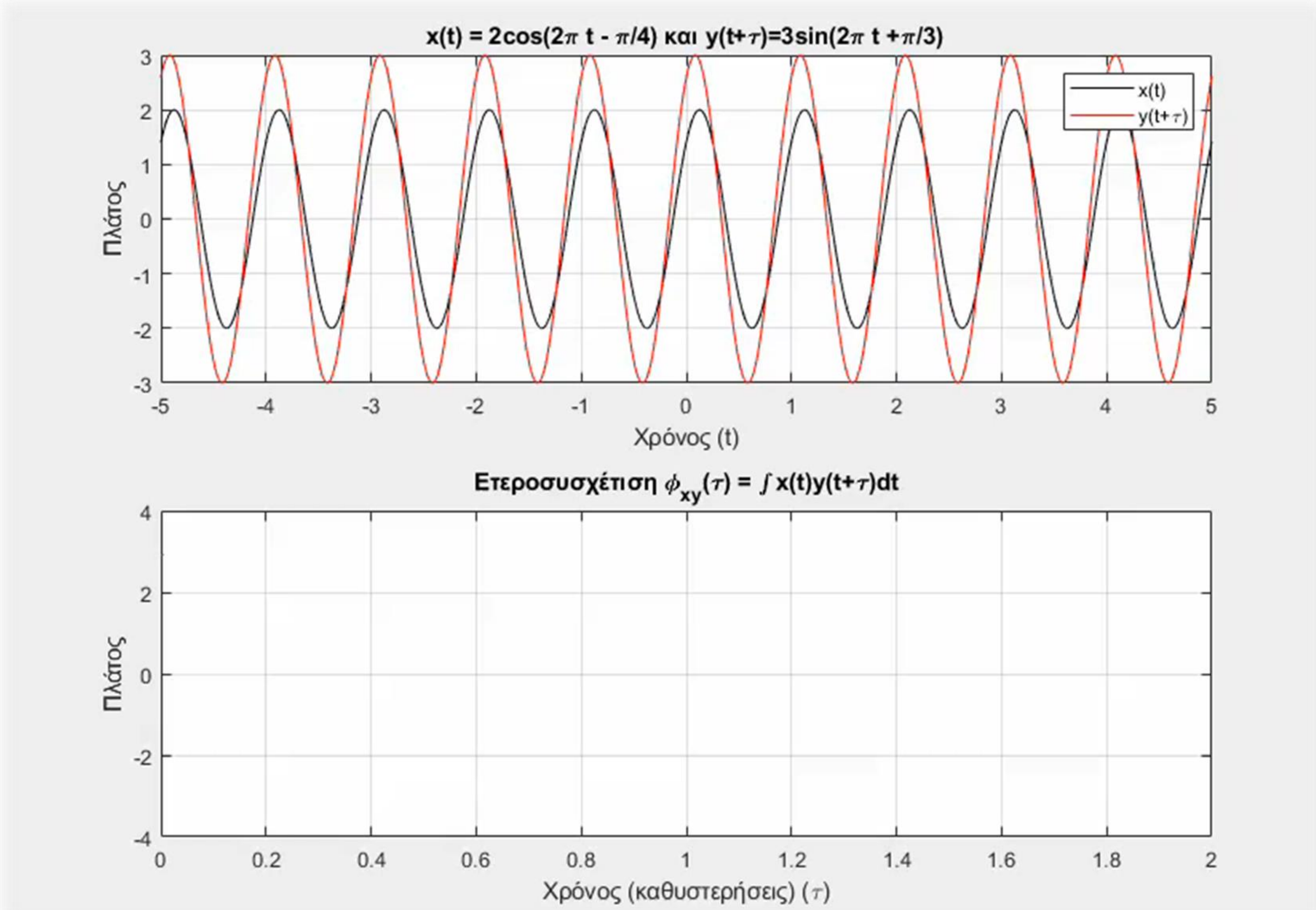
$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

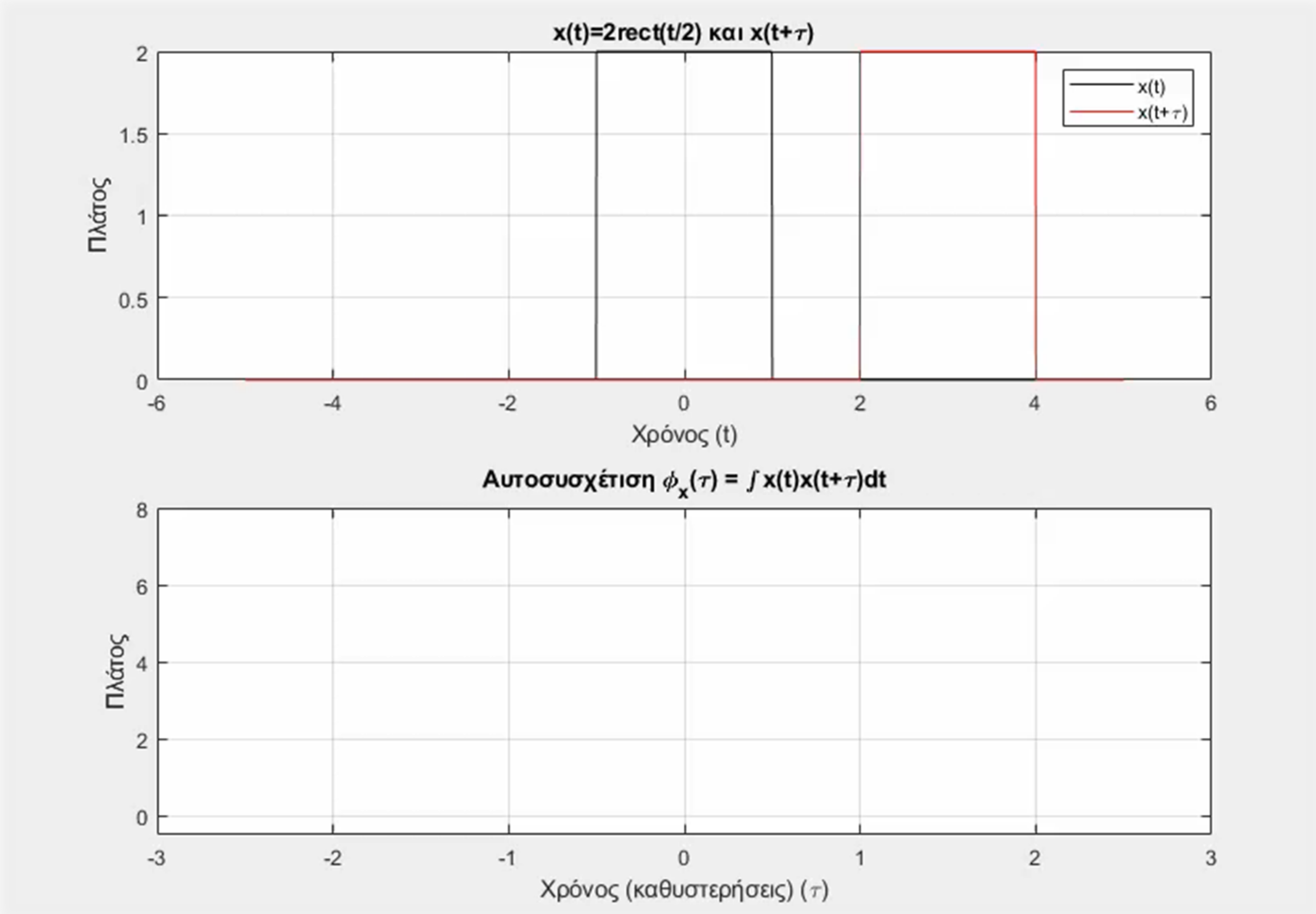
- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Περιοδικά Σήματα (check webpage)**



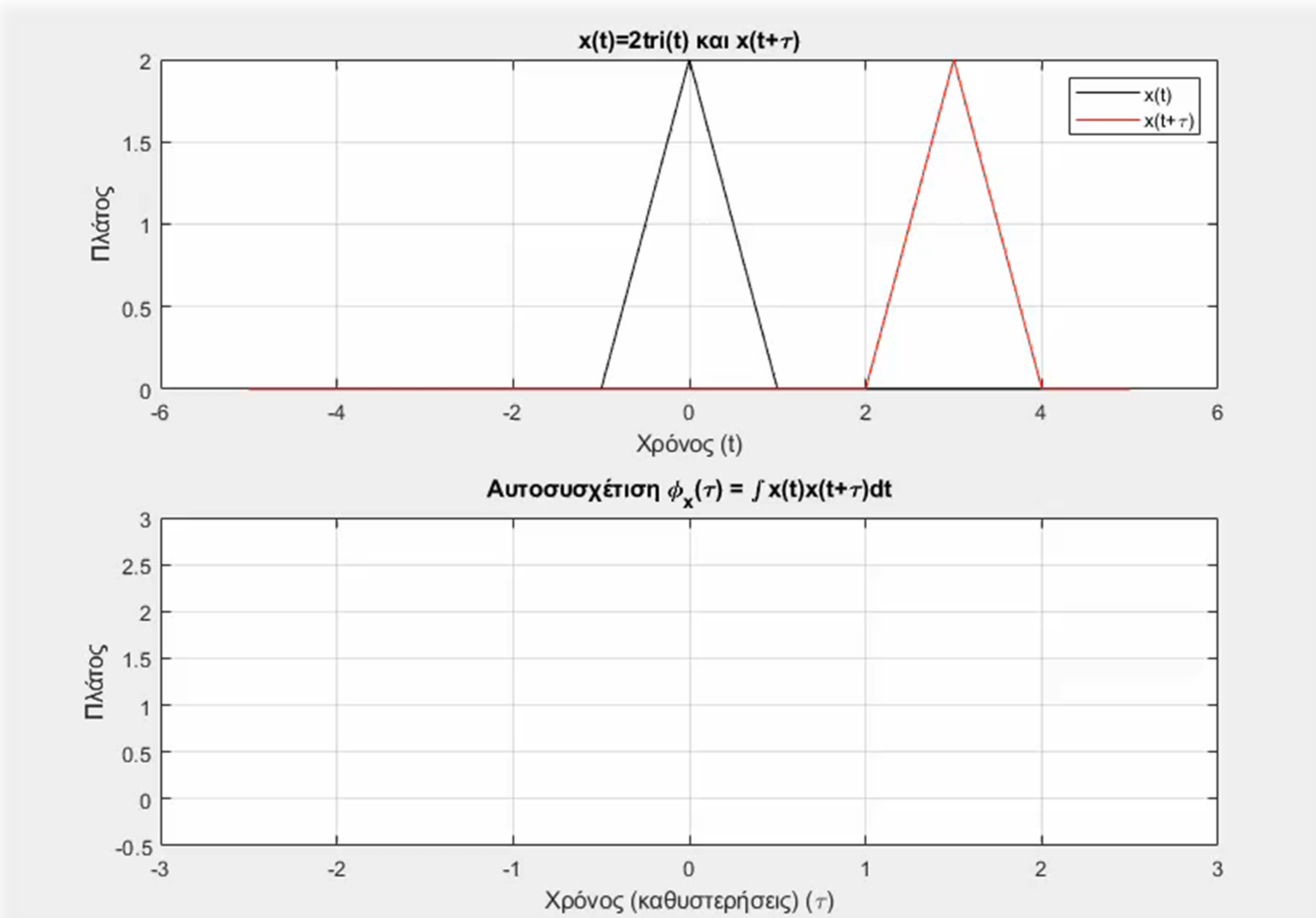
- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Περιοδικά Σήματα (check webpage)**



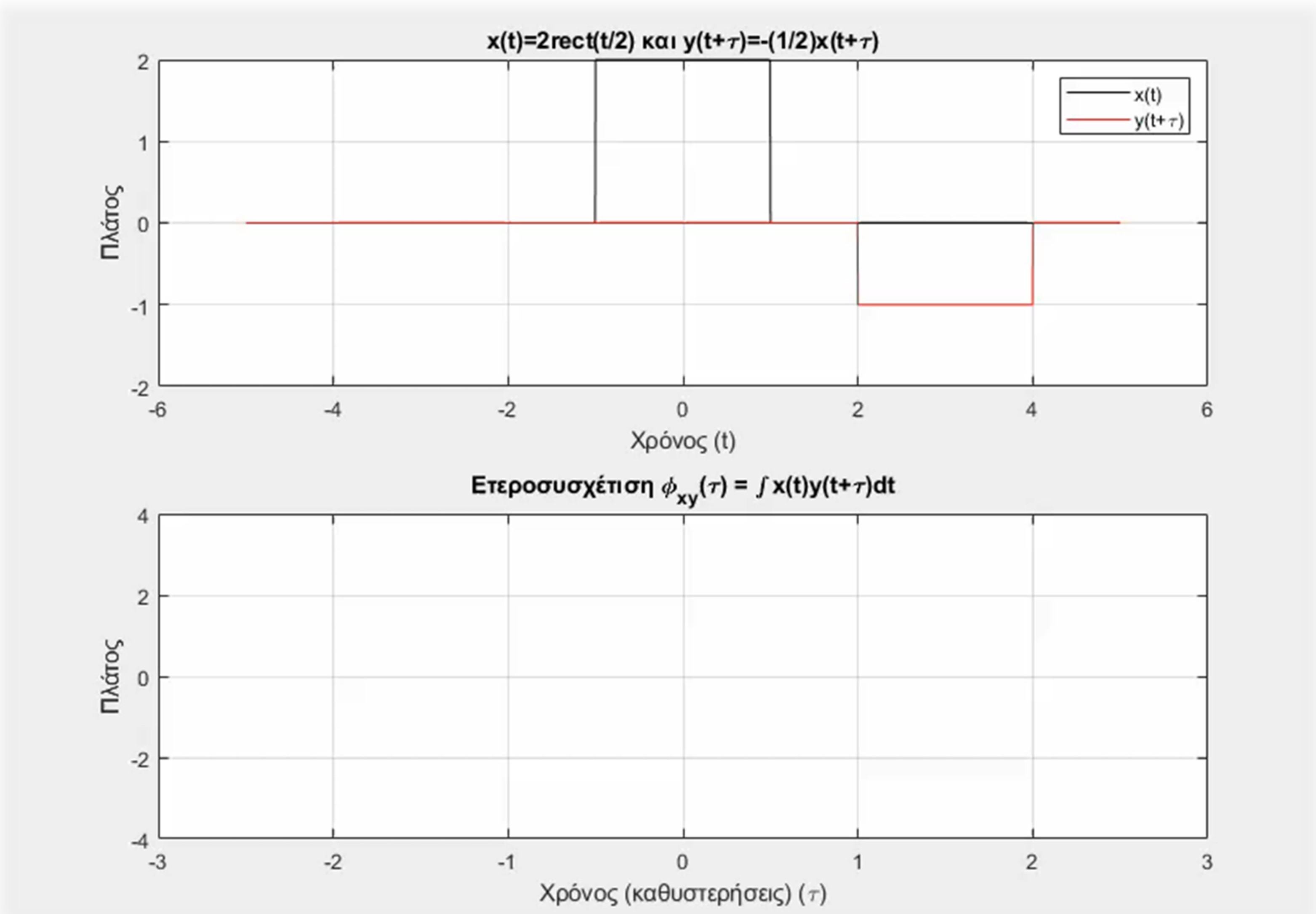
- Συσχετίσεις (review…)
- Σήματα Ενέργειας (check webpage)



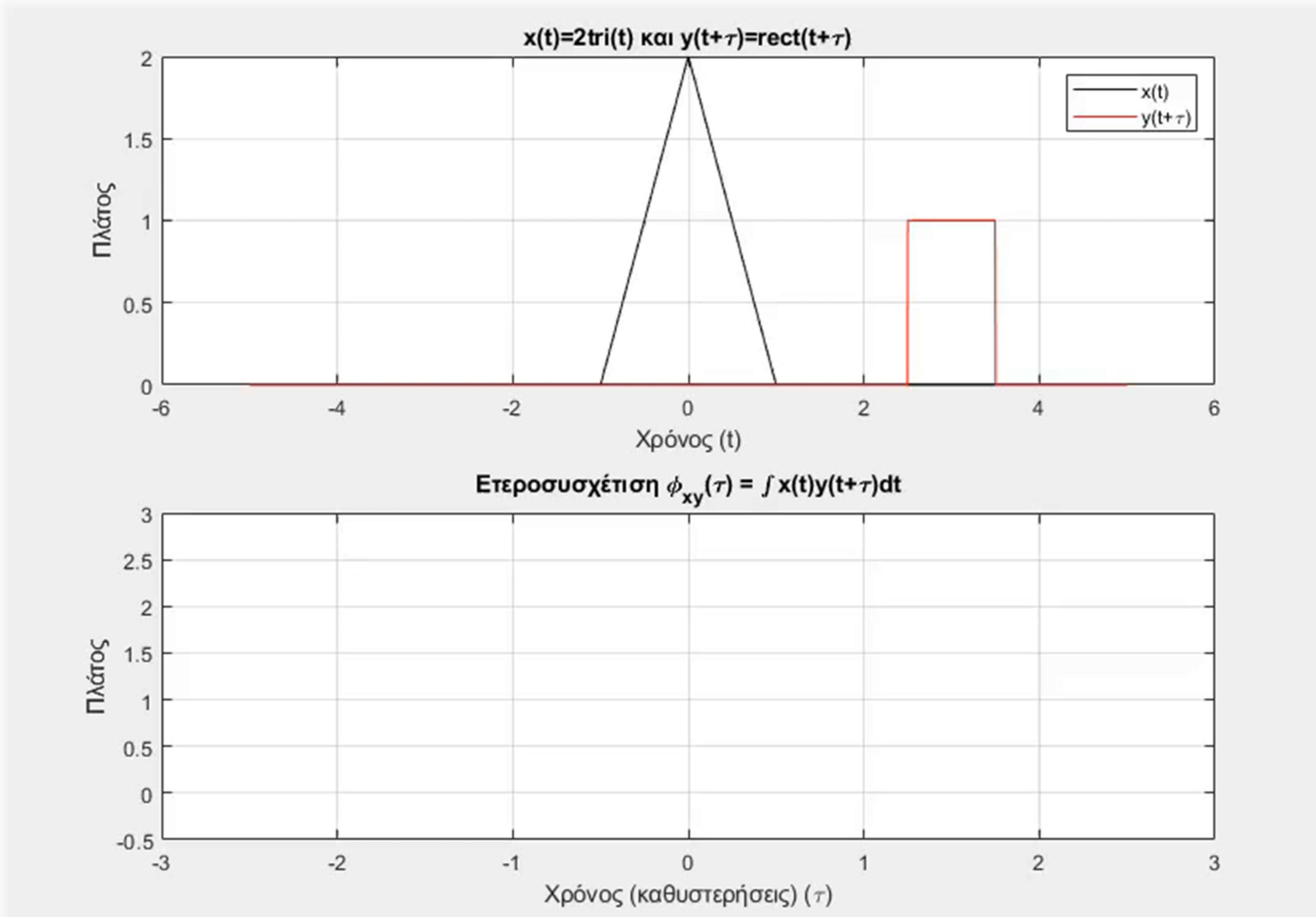
- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Σήματα Ενέργειας (check webpage)**



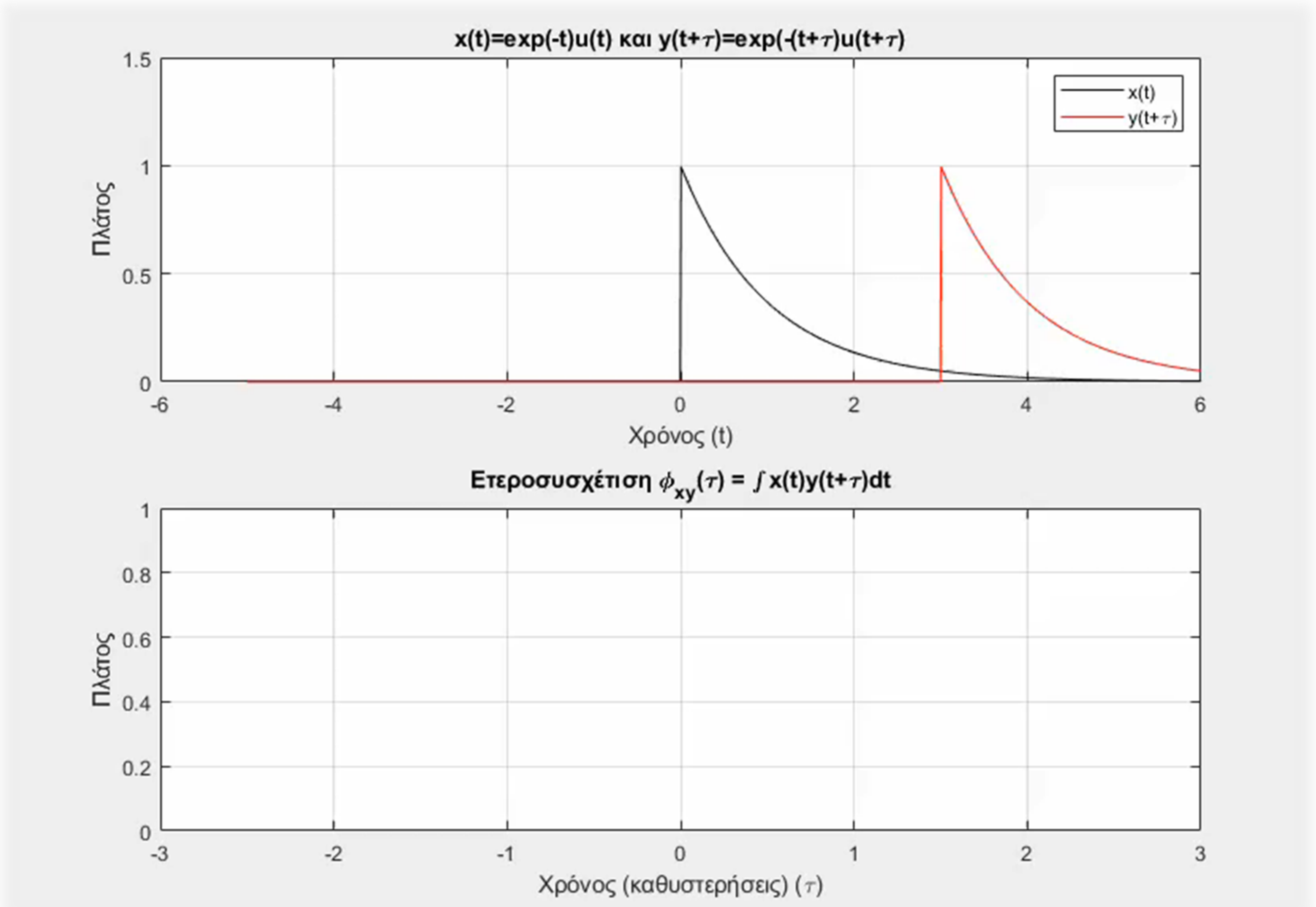
- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Σήματα Ενέργειας (check webpage)**



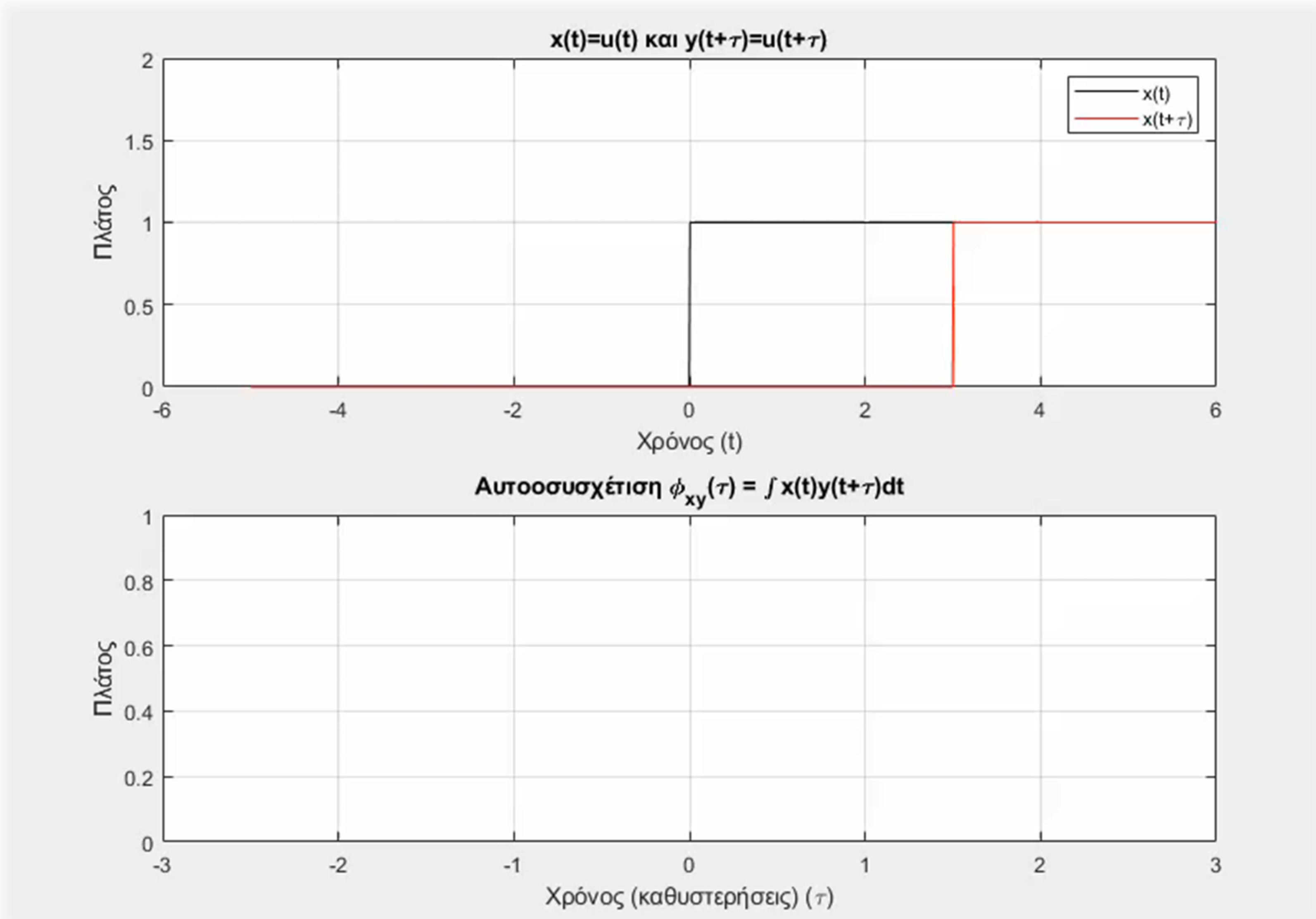
- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Σήματα Ενέργειας (check webpage)**



- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Σήματα Ενέργειας (check webpage)**



- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Σήματα Ισχύος (check webpage)**



- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων

- Θα λάβουμε ιδιαίτερη βοήθεια σχετικά με τα σήματα ισχύος που **δεν** έχουν μετασχηματισμό Fourier
  - Εξίσου σημαντικές είναι όμως και για τις υπόλοιπες κατηγορίες

- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι φασματικές πυκνότητες σχετίζονται με τους *μετασχηματισμούς Fourier* των σημάτων που εμπλέκονται στις συσχετίσεις

- Ας ξεκινήσουμε με τα τελευταία (σήματα ενέργειας)

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Ο μετασχ. Fourier της **αυτοσυσχέτισης** ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)

- Ο μετασχ. Fourier της **ετεροσυσχέτισης** δυο σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)

- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή***/***από κοινού κατανομή*** της ενέργειας του/των σήματος/σημάτων στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(X(f) e^{j2\pi f t} \right) dt$$

$$= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Άρα ο **μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ισούται με $|X(f)|^2$**

$$\boxed{\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2}$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος
- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \qquad x(t) \in \Re$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \qquad \forall f$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \,\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x}$$

- **Βλέπουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι για δυο σήματα ενέργειας $x(t), y(t)$

$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)$$

- Παρατηρήστε ότι αφού για πραγματικά σήματα ισχύει

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$$

τότε

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

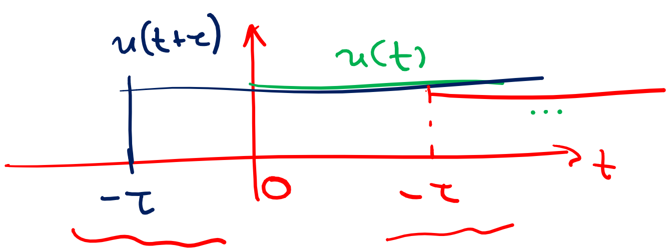
$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-2at}u(t), \qquad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

(a) $\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t+\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)\,e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-2at}\cdot e^{-2a\tau}u(t)u(t+\tau)\,dt$

$= e^{-2a\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at}u(t)u(t+\tau)\,dt$ (1)



- Αν $-\tau<0$, $e^{-2a\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-3at}\,dt$

$= e^{-2a\tau}\dfrac{-1}{3a}e^{-3at}\Big|_{0}^{+\infty} = \dfrac{1}{3a}e^{-2a\tau},\ \tau>0.$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

- Αν $-\tau > 0$, $e^{-2a\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at}\,dt = e^{-2a\tau}\frac{1}{-3a}e^{-3at}\Big|_{-\tau}^{+\infty} =$

$= \frac{1}{3a}e^{+a\tau}$, $\tau < 0$.

Άρα (1) $\Rightarrow$ $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau)\right)$.

(β) Ξέρουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$\left.\begin{array}{l} X(f) = F\{x(t)\} = \dfrac{1}{a+j2\pi f} \Rightarrow X^*(f) = \dfrac{1}{a-j2\pi f} \\ Y(f) = F\{y(t)\} = \dfrac{1}{2a+j2\pi f} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Παράδειγμα:

$$e^{at}u(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$\Rightarrow \Phi_{xy}(f) = \frac{1}{(a-j2\pi f)(2a+j2\pi f)} = \frac{1}{(a-u)(2a+u)} =$$

θέτω $u = j2\pi f$

$$= \frac{A}{a-u} + \frac{B}{2a+u}, \text{ με}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{(a-u)}(2a+u)}\cancel{(a-u)}\Big|_{u=a} = \frac{1}{2a+u}\Big|_{u=a} = \frac{1}{3a}$$

$$B = \frac{1}{(a-u)\cancel{(2a+u)}}\cancel{(2a+u)}\Big|_{u=-2a} = \frac{1}{a-u}\Big|_{u=-2a} = \frac{1}{3a}$$

Άρα

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a}\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{3a}\frac{1}{2a+j2\pi f}$$ και από πίνακες έχουμε

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}e^{a\tau}u(-\tau) + \frac{1}{3a}e^{-2a\tau}u(\tau)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο (α).

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Ο μετασχ. Fourier της **αυτοσυσχέτισης** ενός σήματος ισχύος ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος** (Power Spectral Density – PSD)

- Ο μετασχ. Fourier της **ετεροσυσχέτισης** δυο σημάτων ισχύος ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος** (Power Interspectral Density – PID)

- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή/από κοινού κατανομή*** της ισχύος του/των σήματος/σημάτων στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Για τα περιοδικά σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων
  - Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση
- Δείξαμε ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με συντελεστές Fourier X_k, η αυτοσυσχέτισή του δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

Parseval ξανά!:

$$\phi_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε από τη θεωρία Fourier, ο μετασχ. Fourier της θα είναι

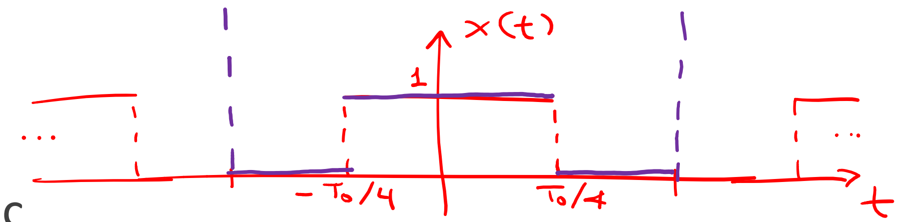
$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $|X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπτώντας τη φασματική πυκνότητα *ενέργειας* **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος, δηλ.

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f = k f_0 = k/T_0}$$

- Άρα αν έχουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ και θέλουμε να βρούμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος του, $\Phi_x(f)$, μπορούμε εναλλακτικά να:
  - Κόψουμε μια περίοδο του περιοδικού σήματος, $x(t, T_0)$
  - Βρούμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειάς του, $\Phi_x(f, T_0)$
  - Δειγματοληπτήσουμε (και πολλαπλασιάσουμε με $1/T_0^2$) το παραπάνω αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια του $1/T_0$

- **Φασματικές Πυκνότητες**



- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < |t| < T_0 \end{cases}$$

$$x(t,T_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f,T_0)$$

Αν $x(t)$ το περιοδικό σήμα με φασματική πυκνότητα ισχύος $\Phi_x(f)$, τότε $x(t,T_0)$ μια περίοδος του και $\Phi_x(f,T_0)$ η φασματική πυκνότητα ενέργειας του και $X(f,T_0)$ ο μετασχ. Fourier του. Θα είναι

$$x(t,T_0) = 1 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f,T_0) = \frac{T_0}{2} \text{sinc}\left(\frac{T_0}{2} f\right).$$

Ξέραμε ότι $$\Phi_x(f,T_0) = |X(f,T_0)|^2$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Παράδειγμα:

Άρα

$$\Phi_x(f, T_0) = \frac{T_0^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{2} f\right)$$

Οπότε

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f = \frac{k}{T_0}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{T_0^2}} \frac{\cancel{T_0^2}}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\cancel{T_0}}{2} \frac{k}{\cancel{T_0}}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right).$$

Άρα

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα

- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι η διαφασματική πυκνότητα ισχύος αποτελεί το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο περιοδικών σημάτων $x(t), y(t)$

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

με

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0)\Big|_{f=kf_0}$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0)\Big|_{f=kf_0}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε, με

$$x(t) \leftrightarrow X_k, \qquad y(t) \leftrightarrow Y_k$$

$$x(t, T_0) \leftrightarrow X(f, T_0), \qquad y(t, T_0) \leftrightarrow Y(f, T_0)$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι φασματικές πυκνότητες μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων που εμπλέκονται στις συσχετίσεις
- Για απεριοδικά σήματα ισχύος, κάτι τέτοιο δεν ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για τέτοια σήματα ισχύος ισχύει η σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2$$

με

$$X(f,T) = F\left\{x(t)\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

δηλ. το μετασχ. Fourier ενός τμήματος του απεριοδικού σήματος ισχύος, διάρκειας T

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να μην υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η μελέτη των απεριοδικών σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται **μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους**
  - ...και **όχι** μέσω του μετασχ. Fourier των ίδιων των σημάτων ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος $x(t) = u(t)$

Βρήκατε ότι $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}$, $\forall\ \tau$.

Άρα

$$\Phi_x(f) = \mathcal{F}\{\varphi_x(\tau)\} =$$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f).$$

Άρα $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Phi_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f)$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την απόκριση συχνότητας $H(f)$, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$

- Θα συμβολίζουμε με $\phi_x(\tau), \phi_y(\tau)$ τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με $\Phi_x(f), \Phi_y(f)$ τις αντίστοιχες πυκνότητες

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_y(\tau) &= y(\tau) * y(-\tau) \\ &= \big(x(\tau) * h(\tau)\big) * \big(x(-\tau) * h(-\tau)\big) \\ &= \big(x(\tau) * x(-\tau)\big) * \big(h(\tau) * h(-\tau)\big) \\ &= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)\end{aligned}$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για σήματα ενέργειας:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2$$

όπως αναμενόταν

- Για περιοδικά σήματα:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\,\delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2\,\delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2|H(kf_0)|^2\,\delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για απεριοδικά σήματα ισχύος:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

μια και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier των τελευταίων

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Σύνοψη:
- Σήματα ενέργειας:

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$
$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$
$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)$$

- Σήματα ισχύος (απεριοδικά):

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f)$$
$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f)$$
$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f)$$

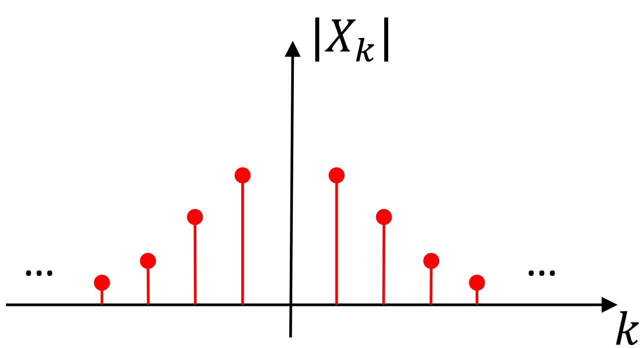
- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

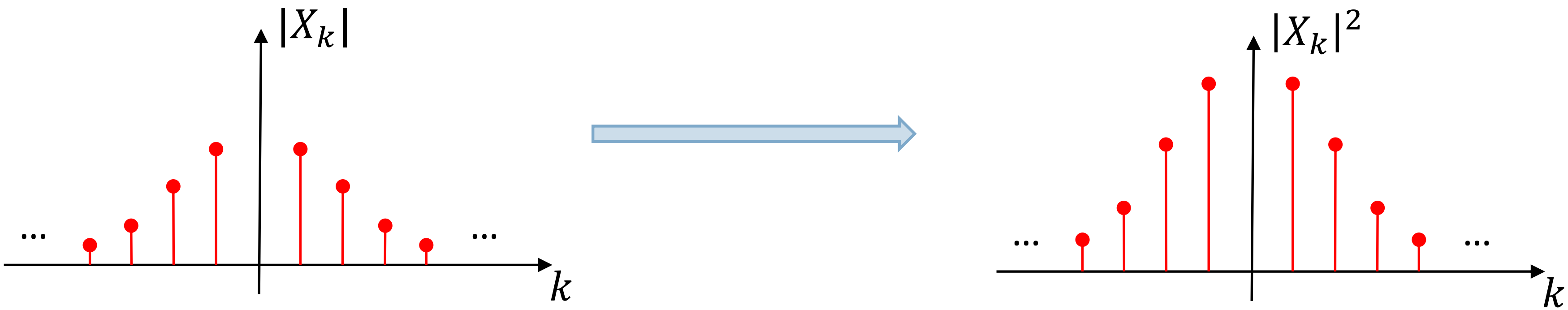
$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k \delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- Περιοδικά σήματα:
  - Αναπτύσσονται σε σειρά Fourier
  - Περιγράφονται από τους συντελεστές Fourier, $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$
  - Οι τελευταίοι μας πληροφορούν για το πλάτος $|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi k f_0 t}$ που «περιέχεται» στο περιοδικό σήμα
  - Αν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορούν *επιπλέον* για το πλάτος $2|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του συνημιτόνου συχνότητας kf_0 που «περιέχεται» στο πραγματικό περιοδικό σήμα
  - Το περιοδικό σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης των συντελεστών Fourier (είτε ως προς k είτε ως προς f)
  - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** των συντελεστών Fourier όπως το παρακάτω



<u>Ερώτημα</u>: το διπλανό φάσμα είναι φάσμα πλατών. Αν θέλω να έχω ένα φάσμα ισχύος, δηλ. να δω πόση ισχύ φέρει κάθε συχνότητα kf_0, τι πρέπει να κάνω?

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- Περιοδικά σήματα:
  - Αρκεί να πάρουμε το μέτρο των συντελεστών Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



  - Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται φάσμα ισχύος ή φασματική πυκνότητα ισχύος του περιοδικού σήματος!
    - Μας πληροφορεί για το πόση από τη συνολική ισχύ του περιοδικού σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα kf_0
    - Η ισχύς αυτή είναι απλά $|X_k|^2$, για τη συχνότητα kf_0
    - … ή, αν πρόκειται για πραγματικό σήμα, η ισχύς του συνημιτόνου συχνότητας kf_0 είναι $2|X_k|^2$

  - Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ισχύος** του περιοδικού σήματος!
  - Μαθηματικά, το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$
    - … και εναλλακτικά το σχεδιάζουμε σε συνεχή άξονα f, αντί του διακριτού άξονα k
      - … αλλάζουμε στο σχήμα το k σε f, και χρησιμοποιούμε συναρτήσεις Δέλτα αντί για «στρογγυλά» κεφαλάκια

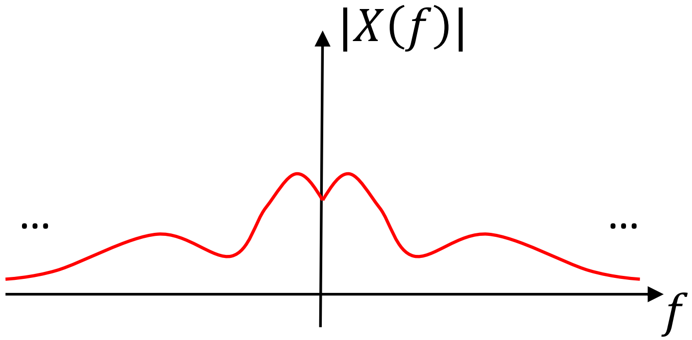
- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- Περιοδικά σήματα:
  - Ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί σε αυτήν την φασματική πυκνότητα ισχύος?
    - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ισχύος $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
  - Η περιοδική αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
  - Η περιοδική αυτοσυσχέτιση είναι περιοδική με την ίδια περίοδο με το περιοδικό σήμα, και άρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier! Πως?
  - Προφανώς ως

$$\phi_x(\tau) = \sum |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και όπως είπαμε πριν,

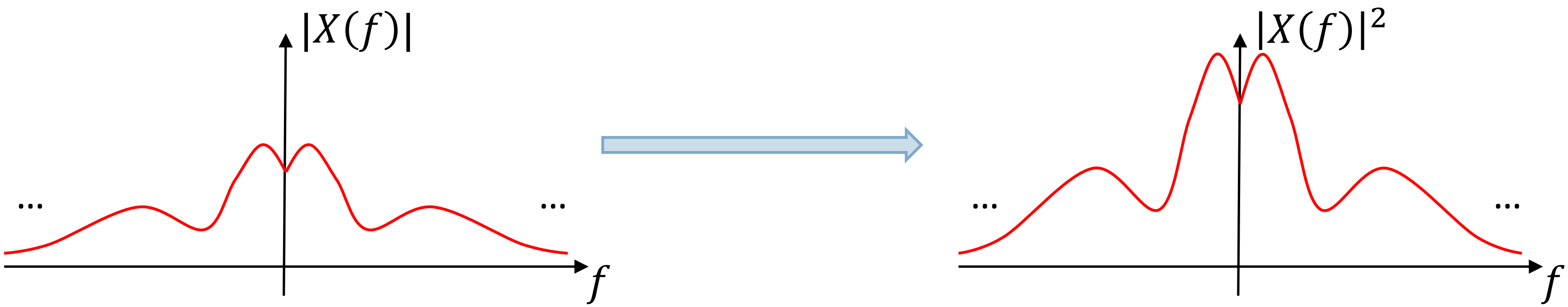
$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- Σήματα ενέργειας:
  - **ΔΕΝ** αναπτύσσονται σε σειρά Fourier αλλά μέσω του Μετασχηματισμού Fourier
  - Περιγράφονται από τον ίδιο το μετασχηματισμό, $X(f)$
  - Ο τελευταίος μας πληροφορεί για το πλάτος $df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi(df)t}$ που «περιέχεται» στο σήμα
  - Αν το σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορεί *επιπλέον* για το πλάτος $2df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του συνημιτόνου συχνότητας df που «περιέχεται» στο πραγματικό σήμα
  - Το σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης του μετασχηματισμού Fourier (ως προς f)
  - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** του μετασχηματισμού Fourier όπως το παρακάτω



<u>Ερώτημα</u>: το διπλανό φάσμα είναι φάσμα πλάτους. Αν θέλω να έχω ένα φάσμα ενέργειας, δηλ. να δω πόση ενέργεια φέρει κάθε συχνότητα kf_0, τι πρέπει να κάνω?

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- Σήματα ενέργειας:
  - Αρκεί να πάρουμε το μέτρο του μετασχ. Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



  - Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται φάσμα ενέργειας ή φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος!
    - Μας πληροφορεί για το πόση από τη συνολική ενέργεια του σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα kf_0
    - Η ενέργεια αυτή είναι απλά $df|X(df)|^2$, για τη συχνότητα df
  - Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ενέργειας** του σήματος!
  - Μαθηματικά, το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$ (προφανές)

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- Σήματα ενέργειας:
  - Ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί σε αυτήν την φασματική πυκνότητα ενέργειας?
    - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ενέργειας $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
  - Η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
- Σήματα ισχύος (απεριοδικά):
  - Τα απεριοδικά σήματα ισχύος δεν μπορούν πάντα να περιγραφούν στο χώρο των φασματικών πυκνοτήτων με όρους του μετασχ. Fourier τους
    - …ακόμα κι αν συμπεριλάβουμε συναρτήσεις Δέλτα ή άλλες «εξωτικές» συναρτήσεις/κατανομές
  - Οπότε η μελέτη τους γίνεται με το μετασχ. Fourier απ'ευθείας της αντίστοιχης συνάρτησης συσχέτισής τους
  - Παρόμοια γενικεύονται οι έννοιες για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- ΓΧΑ συστήματα:
  - Όταν μια φασματική πυκνότητα εισόδου περνά μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα, η φασματική πυκνότητα αυτή επηρεάζεται από το σύστημα
    - Είναι σαν να λέμε ότι η κατανομή ενέργειας/ισχύος ενός σήματος εισόδου επηρεάζεται από το σύστημα όταν περνά μέσα από αυτό
      - …λογικό, αφού ένα σύστημα μεταβάλλει συχνοτικά την είσοδό του (κόβοντας συχνότητες, ενισχύοντας ή καταστέλλοντας άλλες, κλπ) και έτσι αλλάζει την κατανομή ενέργειας/ισχύος της, δίνοντας έτσι ένα διαφορετικό σήμα εξόδου (και μια αντίστοιχα διαφορετική - σε σχέση με την είσοδο - φασματική πυκνότητα)
      - Μην ξεχνάτε: η φασματική πυκνότητα είναι απλά μια συχνοτική περιγραφή ενός σήματος με όρους ενέργειας ή ισχύος ανά συχνότητα! (αντί για πλάτος + φάση ανά συχνότητα)
  - Αν υποθέσουμε ότι τα ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται από κρουστικές αποκρίσεις που είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες (και άρα έχουν μετασχ. Fourier == απόκριση σε συχνότητα), τότε η φασματική πυκνότητα του συστήματος θα είναι

$$\Phi_h(f) = |H(f)|^2$$

  - Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_{\mathrm{h}}(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- ΓΧΑ συστήματα:
  - Η σχέση

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_{\mathrm{h}}(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

  δεν πρέπει να σας εκπλήσσει

  - Γιατί γνωρίζετε ότι

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

  για σήματα ενέργειας, ενώ για περιοδικά σήματα

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

  - Αν υψώσετε τα μέτρα των σχέσεων αυτών στο τετράγωνο, θα πάρετε τα αποτελέσματα των φασματικών πυκνοτήτων που είδαμε σε αυτή τη διάλεξη (sl. 28)

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ