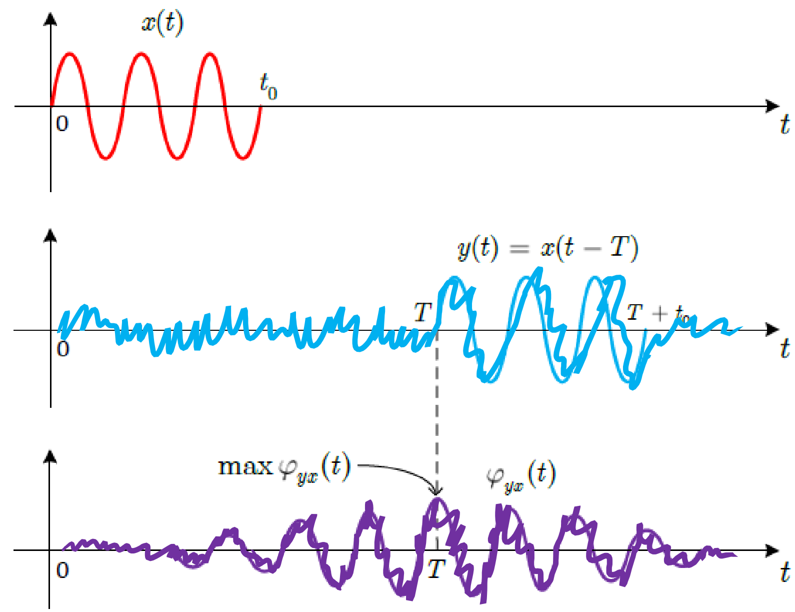
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Ως τώρα μελετήσαμε σήματα και την επίδραση των συστημάτων επάνω τους
  - Μελετήσαμε *μεμονωμένα* σήματα και συστήματα
- Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τις *ομοιότητες* μεταξύ σημάτων

- Παράδειγμα εφαρμογής
  - Ανίχνευση απόστασης στόχου
- Έννοια της ***συσχέτισης***
  - Το ανακλώμενο σήμα πρέπει να συσχετιστεί με το εκπεμφθέν για βρεθεί τόσο η παρουσία ενός στόχου όσο και η απόστασή του από τη θέση αναφοράς
  - Βρίσκει την ***ομοιότητα*** των δυο σημάτων στο πεδίο του χρόνου
- Έννοια της ***φασματικής πυκνότητας***
  - Αποτελεί την εικόνα των συσχετίσεων στο χώρο του Fourier
  - Δείχνει την ***κατανομή της ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος ή την από κοινού κατανομή δυο σημάτων*** ανά συχνότητα



- **Συσχετίσεις**
- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**
- Η αυτοσυσχέτιση συσχετίζει ένα σήμα (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *με τον εαυτό του*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα του σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» (μετατοπίσεις) του εαυτού του
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Η ετεροσυσχέτιση συσχετίζει δυο σήματα (περιοδικά ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *μεταξύ τους*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα ενός σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» (μετατοπίσεις) ενός άλλου σήματος
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Είναι βολικό να μελετήσουμε τις συσχετίσεις ανάλογα με το είδος του σήματος

❑ Περιοδικά σήματα

❑ Σήματα ισχύος

❑ Σήματα ενέργειας

- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Αυτοσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Ας δούμε πως…

- **Συσχετίσεις**

$$* \ (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \text{others}$$

- **Περιοδική Αυτοσυσχέτιση**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)^* \Big(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)}\Big) dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}\Big) \Big(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau}\Big) dt$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k\neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi (l-k) f_0 t}\Big) dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau}\int_{T_0} dt + \sum_{k\neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau}\int_{T_0} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} dt\Big)$$

$$= \frac{1}{\cancel{T_0}}\Big(\cancel{T_0}\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}} + \sum_{k\neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau}\underbrace{\int_{T_0} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} dt\Big)}_{0, \quad k \neq l}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- «Τυφλή» ως προς την αρχική φάση του περιοδικού σήματος

- **Συσχετίσεις**

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

Ένας τρόπος είναι: $\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, A\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta)\, dt$

$= \ldots$

Ένας άλλος τρόπος είναι:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\theta}}_{X_1} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\theta}}_{X_{-1} = X_1^*} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t}, \quad X_1 = \frac{A}{2}e^{j\theta}$$

Άρα

$$\phi_x(\tau) = |X_1|^2 e^{j2\pi f_0 \tau} + |X_1^*|^2 e^{-j2\pi f_0 \tau} = \frac{A^2}{4}e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4}e^{-j2\pi f_0 \tau}$$

$$= (A^2/2)\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- **Συσχετίσεις**

$$x(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

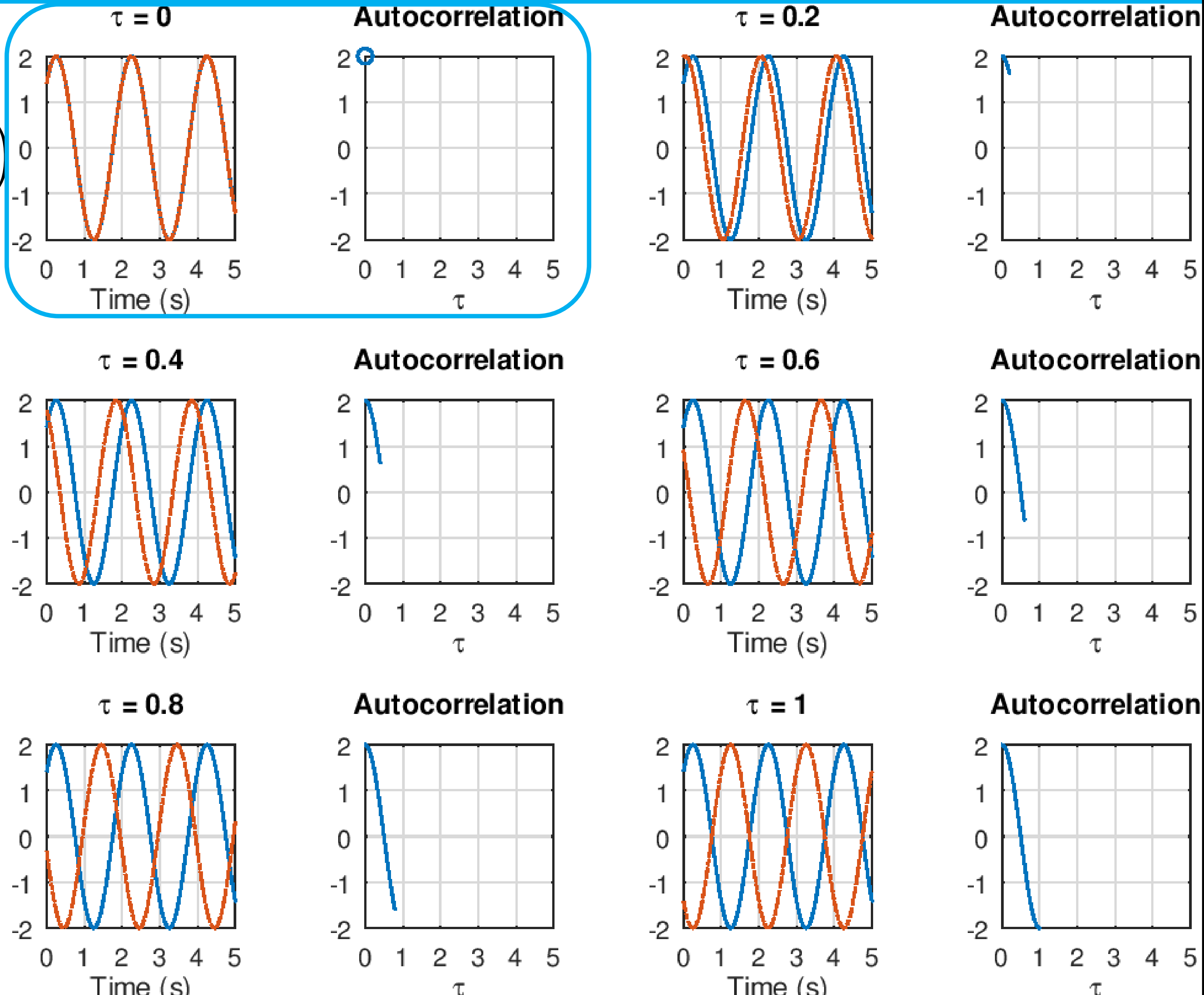
$T_0 = 2\ s$

$f_0 = \frac{1}{2}\ Hz$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

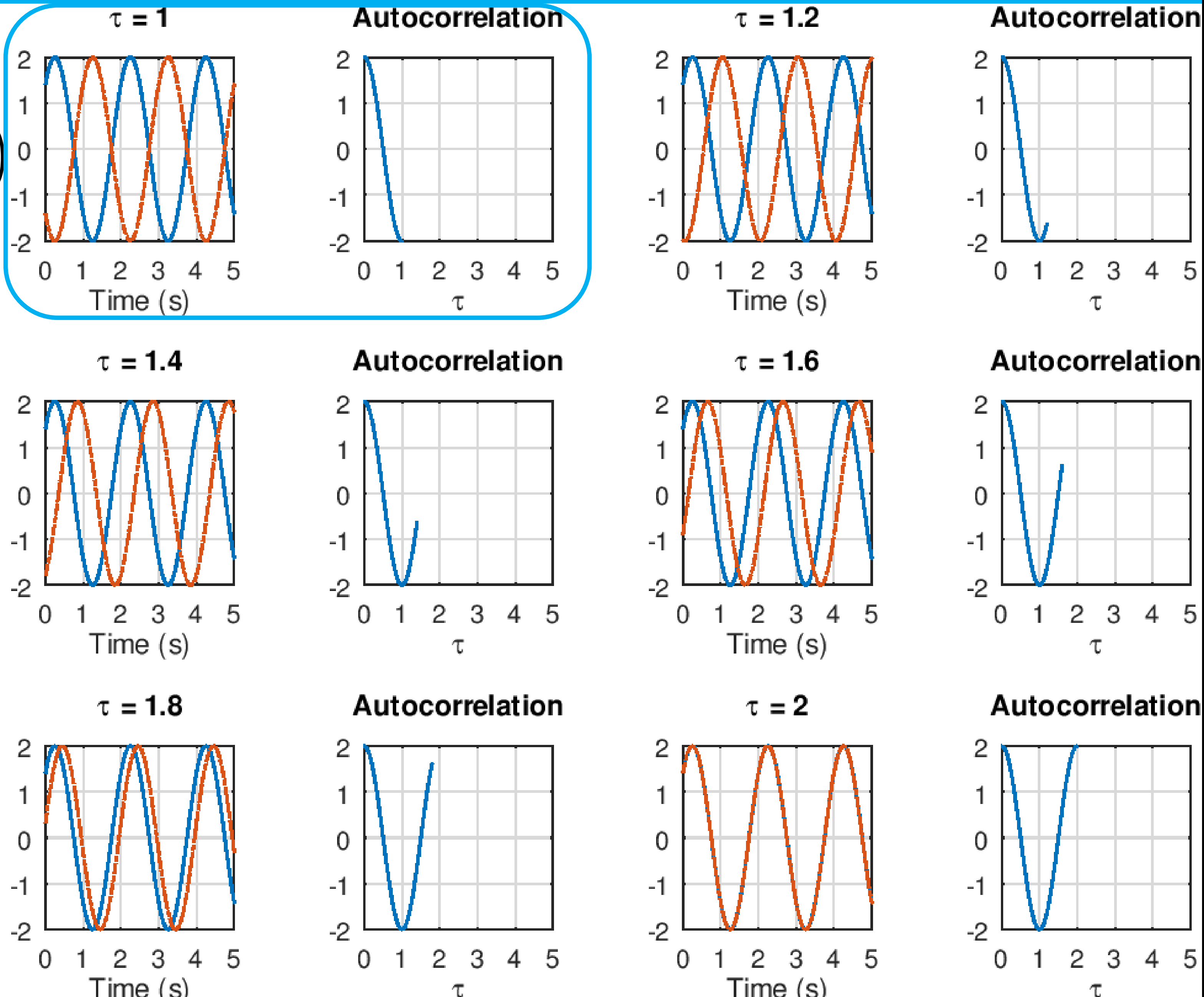
$A = 2$

$\varphi_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\pi\tau)$



- **Συσχετίσεις**

$$x(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$



- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Ετεροσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad , \qquad y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- Προφανώς αν $y(t) = x(t)$ παίρνουμε τις σχέσεις της αυτοσυσχέτισης

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Είναι εμφανές ότι ο ορισμός της συσχέτισης για σήματα ενέργειας μοιάζει πολύ με τον ορισμό της συνέλιξης:

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t)dt = x(\tau) * y(\tau)$$

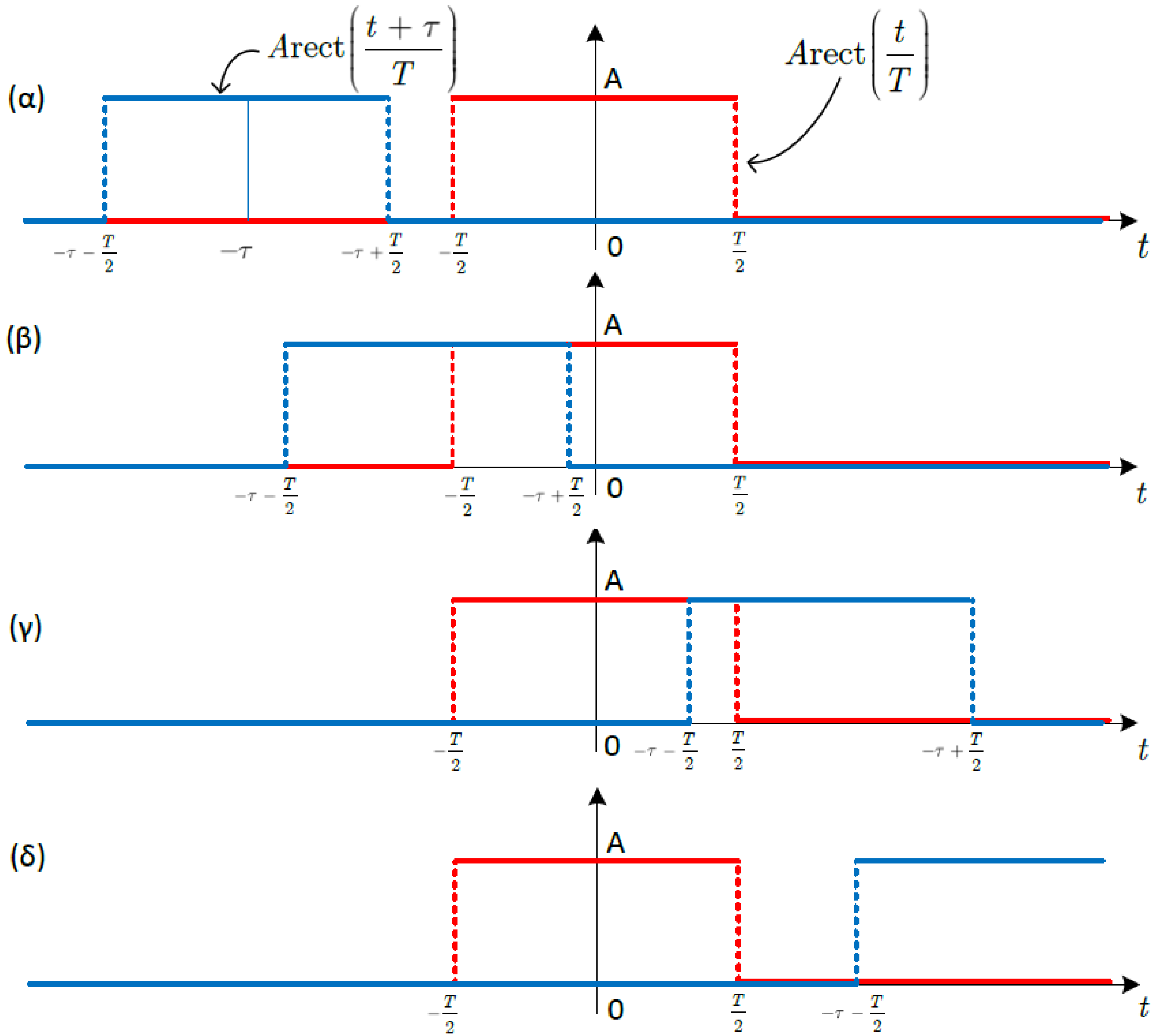
- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} \phi_x(\tau) &= x^*(-\tau) * x(\tau) \\ \phi_{xy}(\tau) &= x^*(-\tau) * y(\tau) \\ \phi_{yx}(\tau) &= y^*(-\tau) * x(\tau) \end{aligned}\right\}$$

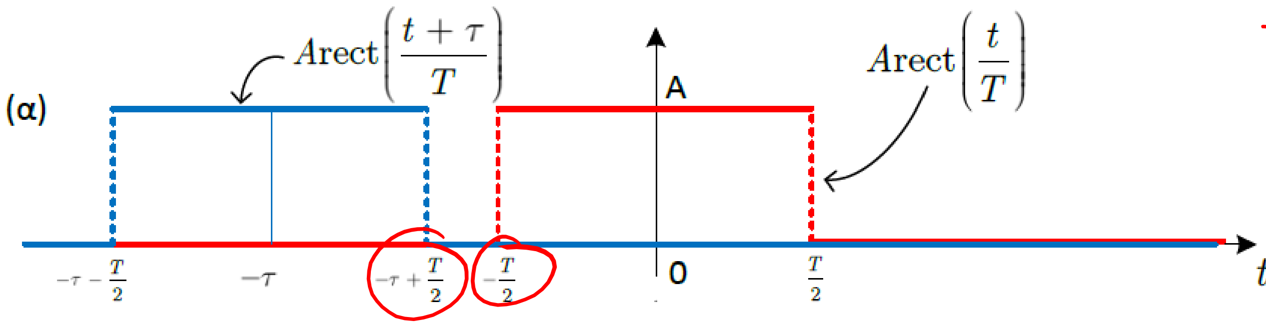
Η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη **χωρίς** τη χρονική αντιστροφή στην προεργασία των πράξεων

- Προφανώς αν τα σήματα είναι πραγματικά, $x^*(\tau) = x(\tau)$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



$$\varphi_x(\tau) = 0, \text{ για}$$

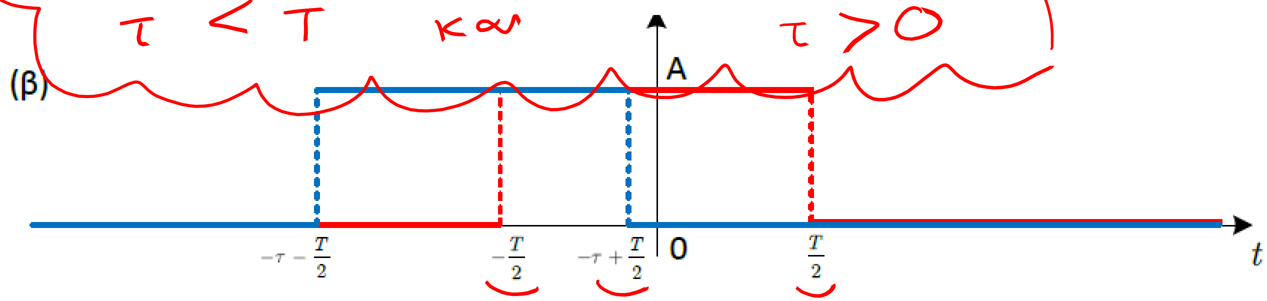
$$-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\tau < -T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau > T}$$

$$-\tau + \frac{T}{2} > -\frac{T}{2} \text{ και } -\tau + \frac{T}{2} < \frac{T}{2}$$

$$\tau < T \text{ και } \tau > 0$$



$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A\, A \cdot dt$$

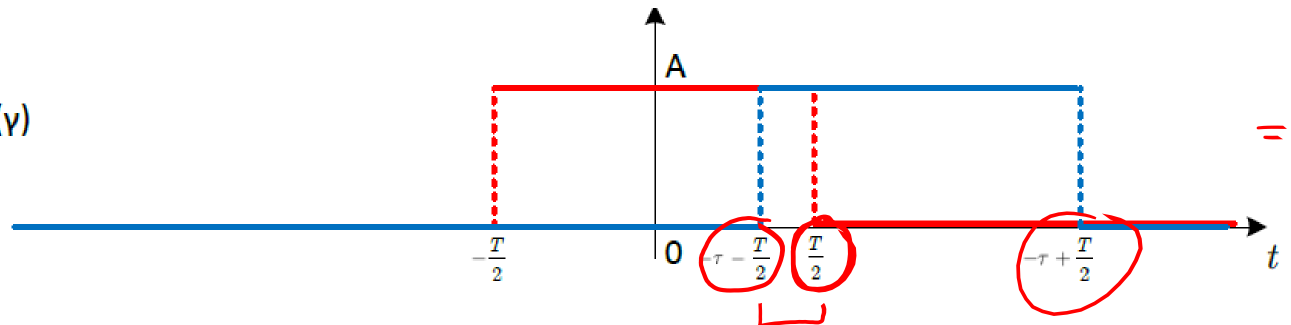
$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A^2\, dt$$

$$= A^2 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} = A^2\left(-\tau+\frac{T}{2}-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) = A^2(T-\tau), \quad 0<\tau<T$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cdot A\, dt = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

(γ)

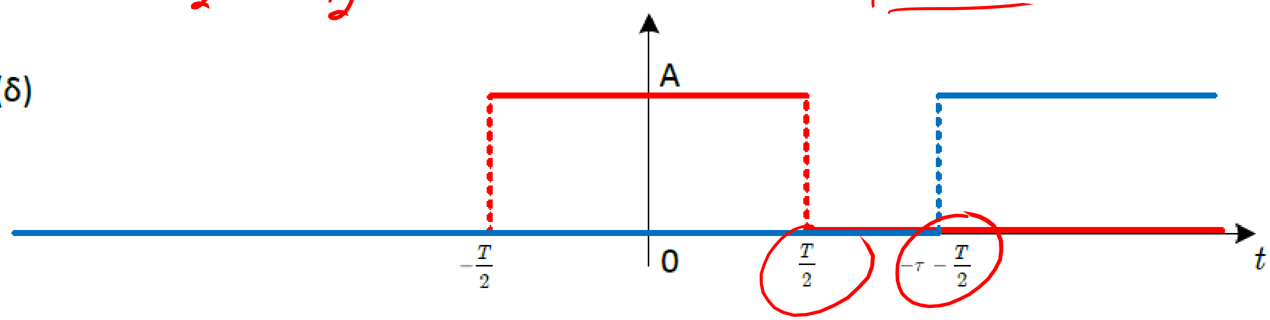


$$= A^2\left(\frac{T}{2} - \left(-\tau - \frac{T}{2}\right)\right) = A^2(T+\tau), \text{ για } \underbrace{-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2}}_{\boxed{\tau > -T}} \text{ και}$$

$$-\tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow -\tau > 0 \Rightarrow \boxed{\tau < 0}$$

άρα για $\boxed{-T < \tau < 0}$

(δ)

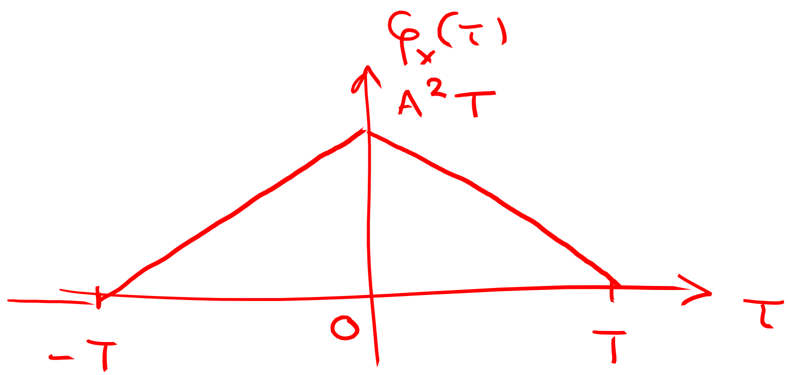


$$\varphi_x(\tau) = \emptyset, \text{ για } -\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow -\tau > T \Rightarrow \boxed{\tau < -T}$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

Άρα τελικά

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2(T-\tau), & 0 < \tau < T \\ A^2(T+\tau), & -T < \tau < 0 \end{cases}$$



$$\rightarrow \varphi_x(\tau) = A^2 T \cdot tri\left(\frac{\tau}{T}\right).$$

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

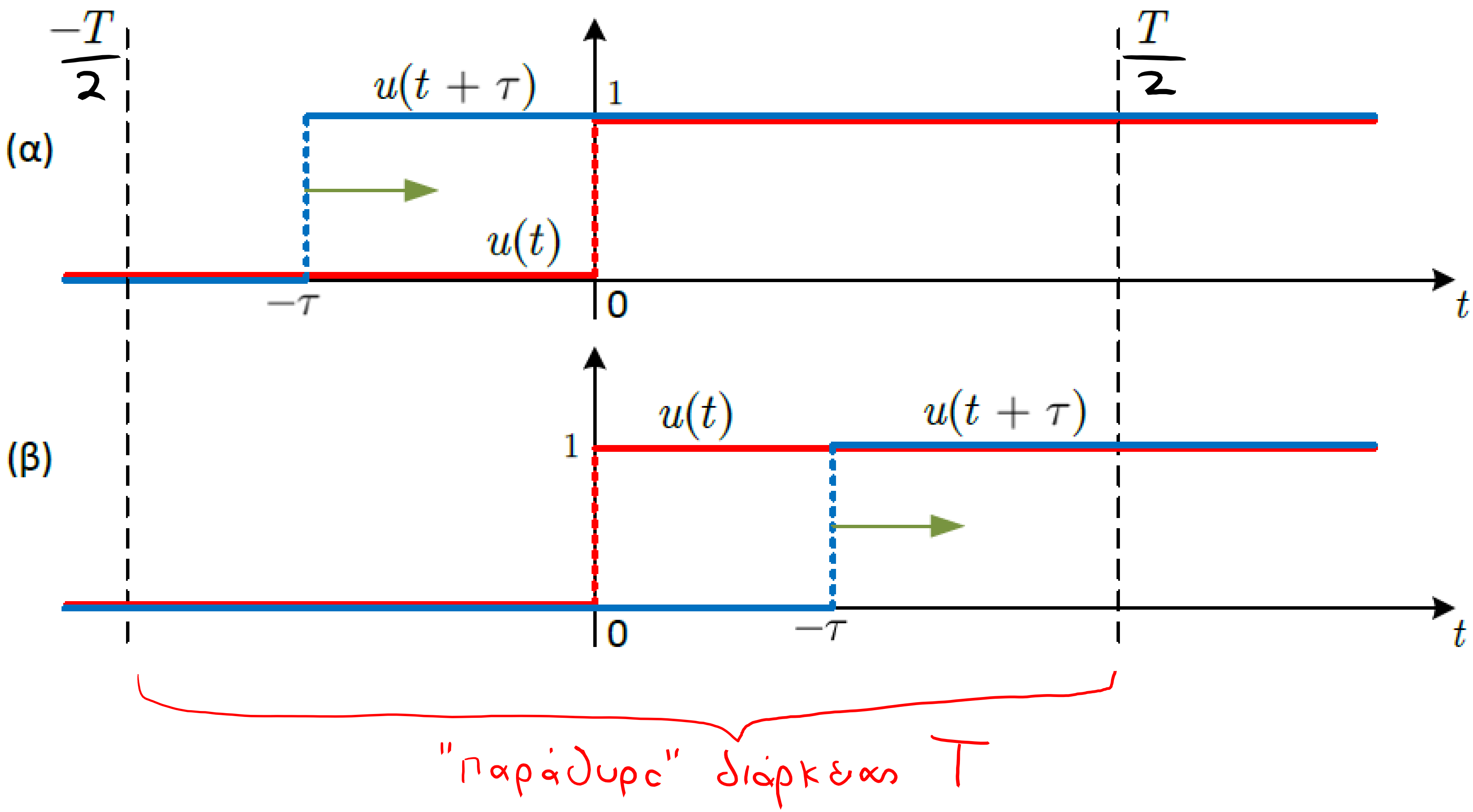
- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

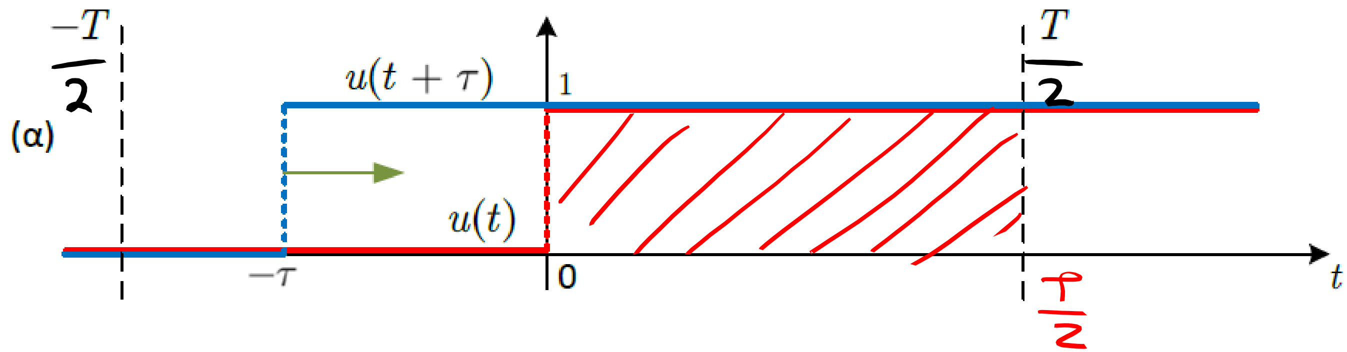
$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Προφανώς το T εδώ είναι μια οποιαδήποτε διάρκεια
- Ξανά η συζυγία παραλείπεται όταν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά σήματα

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



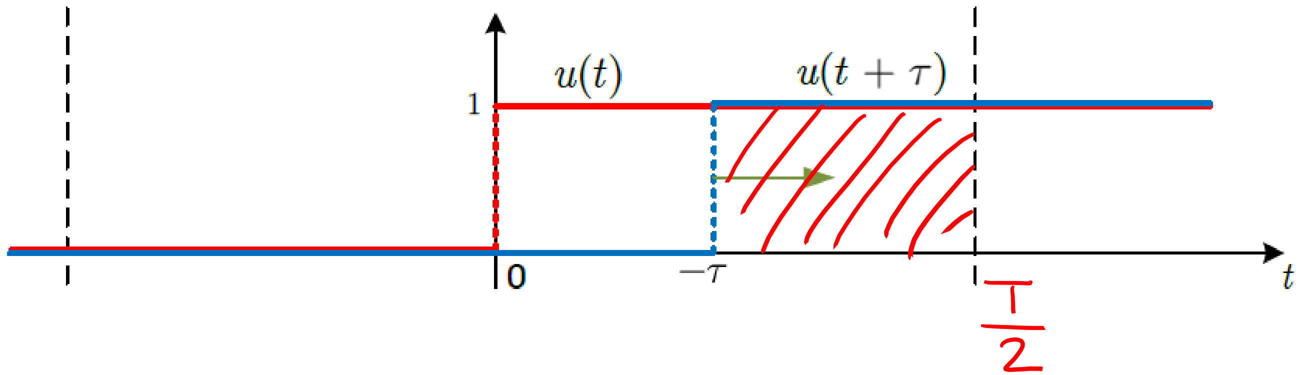
Είναι $\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$

$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\cdot 1\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\, t\Big|_0^{\frac{T}{2}} =$

$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-0\right) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\,\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$

για $-\tau < 0 \Rightarrow \boxed{\tau > 0}$.

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:** (β)



Είναι $\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{\frac{T}{2}} 1\cdot 1\, dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\, t\Big|_{-\tau}^{\frac{T}{2}} =$

$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - (-\tau)\right) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}+\tau\right)$

Άρα $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$ και $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\tau = 0$

Οπότε

$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad -\tau > 0 \Rightarrow \boxed{\tau < 0}$, και συνολικά

$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \ \forall\ \tau.$

- **Συσχετίσεις**
- **Ιδιότητες**

$\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+0)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = E_x$

1) Ισχύει ότι

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau)$$

2) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = E_x$$

για σήματα ενέργειας

Περιοδικα : $|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(kT_0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = P_x$$

για σήματα ισχύος

4) Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, το ίδιο είναι και η αυτοσυσχέτισή του (με την ίδια περίοδο)

5) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση του σήματος

6) Ισχύει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

7) Αν η ετεροσυσχέτιση είναι μηδενική για κάθε $\tau \in \Re$, τα σήματα λέγονται ασυσχέτιστα

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ