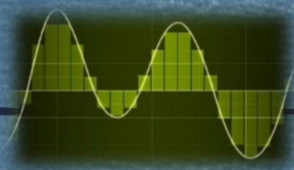
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

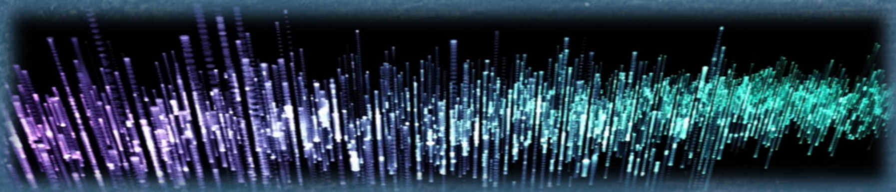
- Συστήματα στο χώρο του Laplace

Τι περιέχει το ΗΥ215?



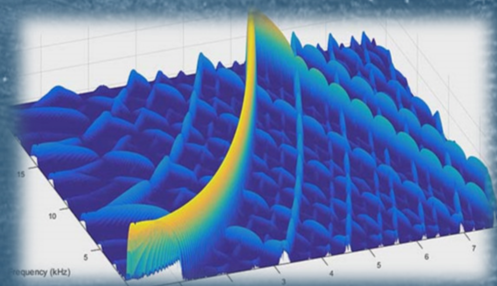
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

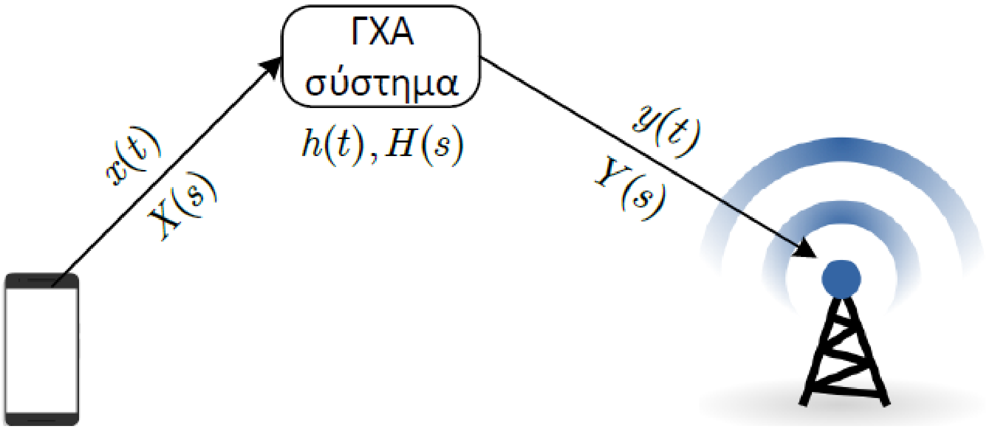


2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**



- Με ιδανικό κανάλι επικοινωνίας, θα είχαμε

$$Y(s) = X(s)$$

- Στην πράξη

$$Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow Y'(s) = \overbrace{\boxed{\frac{1}{\cancel{H(s)}}}}^{H_{inv}(s)}\cancel{H(s)}X(s) = X(s)$$

έτσι ώστε $Y(f) = X(f)$

- Πολλές φορές το $H_{inv}(s)$ δεν είναι πραγματοποιήσιμο, γιατί δεν είναι ευσταθές η/και αιτιατό
- Πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες καταστάσεις?
- Μπορούμε έστω να έχουμε $Y(s) \approx X(s) \Rightarrow Y(f) \approx X(f)$?

- **Η συνάρτηση μεταφοράς**

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f_0)t}$$

$\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s_0(t-\tau)}\, d\tau = e^{s_0 t} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s_0 \tau}\, d\tau}_{H(s_0)} = H(s_0) \cdot e^{s_0 t}$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

$\forall s$ $\boxed{\text{Κρουστική απόκριση } h(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \text{Συνάρτηση μεταφοράς } H(s)}$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**
- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$

- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - …και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)}$$

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμα του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i}, \qquad R_H$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

$\rightarrow \dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^n X(s) \leftarrow$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

$\sigma > 2$

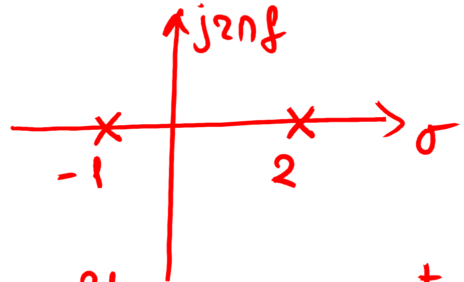
$h(t) = 0, \quad t < 0$

Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι αιτιατό.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} - 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \Rightarrow Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)} =$$



$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

- $\sigma > 2$, $\sigma < 2$
- $\sigma > -1$, $\sigma < -1$

$$A = \frac{1}{\cancel{(s-2)}(s+1)} \cdot \cancel{(s-2)}\Big|_{s=2} = 1/3$$

$$B = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -1/3$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

○ Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$

$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \quad \sigma > 2$

$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad \sigma > -2$

$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)}$

$\{\sigma > 2\} \cap \{\sigma > -2\} = \sigma > 2$

$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = A e^{2t}u(t) + B e^{-t}u(t) + \Gamma e^{-2t}u(t)$

- $\sigma > 2$, $\sigma < 2$
- $\sigma > -1$, $\sigma < -1$
- $\sigma > -2$, $\sigma < -2$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \dots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big|_{t=0^-}}$$

○ Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$(1) \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2,\ y'(0^-) = 1$ και είσοδο $\boxed{x(t) = e^{-4t}u(t)}$ $\rightarrow \frac{1}{s+4}$ ← δεξιόπλευρο αιτιατό

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{2-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t)\Big|_{t=0^-} = s^2Y(s) - s\,y(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 1$$

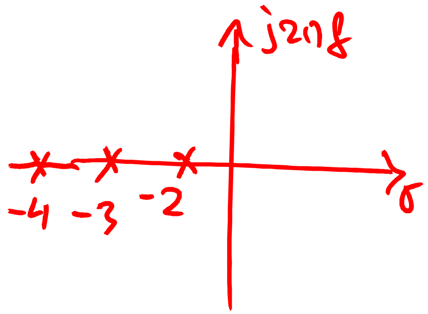
$$\frac{d}{dt}y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - \sum_{i=1}^{1} s^{1-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t)\Big|_{t=0^-} = sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$$

Άρα $(1) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = X(s) + sX(s)$

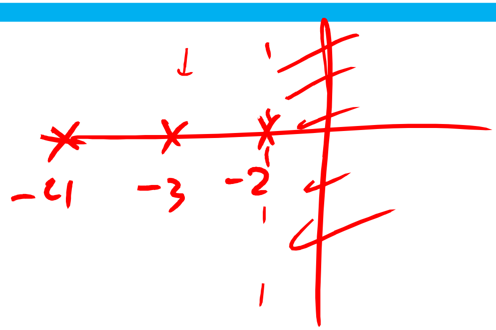
$\Rightarrow Y(s)[s^2 + 5s + 6] - 2s - 11 = X(s)(1+s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{\Gamma}{s+4}$$



❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος



- Παράδειγμα:

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{\Gamma}{s+4}$$

∘ $\sigma > -2 \Rightarrow y(t) = A e^{-2t}u(t) + B e^{-3t}u(t) + \Gamma e^{-4t}u(t)$

Αν

∘ $-4 < \sigma < -3 \Rightarrow y(t) = -A e^{-2t}u(-t) - B e^{-3t}u(-t) + \Gamma e^{-4t}u(t)$

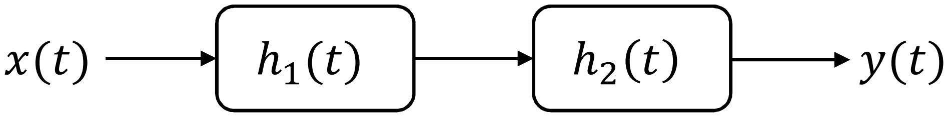
- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**
- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \Re_+$
- Ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος
- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα
- Άρα**: ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του**

- **Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων**

- Διάταξη σε σειρά

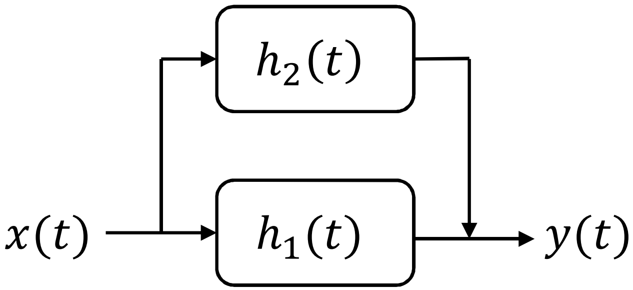


$$y(t) = \underbrace{\boxed{h_1(t) * h_2(t)}}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{H_1(s)H_2(s)}}_{H_{total}(s)} X(s)$$

- Διάταξη σε παραλληλία

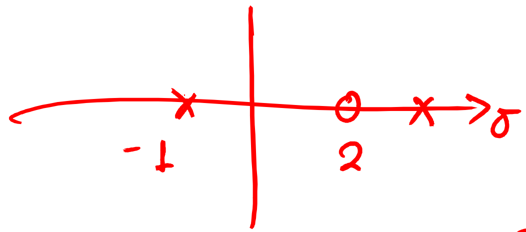


$$\begin{aligned} y(t) &= (h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)) \\ &= \underbrace{\boxed{\big(h_1(t) + h_2(t)\big)}}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{\boxed{\big(H_1(s) + H_2(s)\big)}}_{H_{total}(s)} X(s) \end{aligned}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς** $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$
- Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) \to \infty$
- Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν πόλους και μηδενικά του συστήματος
  - Είναι μόνο αυτά??
- Για παράδειγμα, έστω $H(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \sigma > 3$



- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$

1 μηδ + 1 μηδ (∞) = 2
2 πόλους = 2

- Προσέξτε όμως ότι

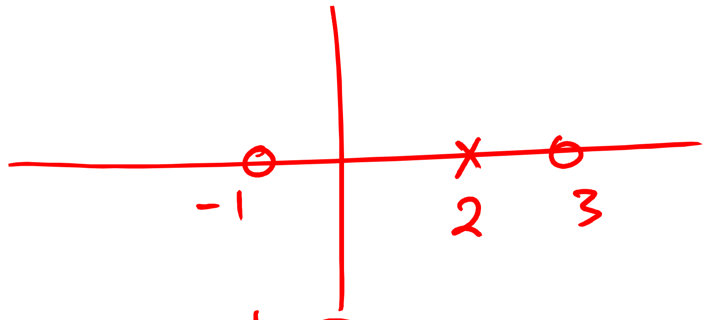
$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s}\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\left(1-\cancel{\frac{2}{s}}\right)}{s\left(1-\cancel{\frac{3}{s}}\right)\left(1+\cancel{\frac{1}{s}}\right)} = 0$$

$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} = 0$

- Άρα υπάρχει **ένα** "έξτρα" μηδενικό στο άπειρο!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους και 2 μηδενικά**!

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**
- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{(s-3)(s+1)}{(s-2)}$$



2 μηδ.

1 πόλο + 1 πόλος (∞)

$$H(s) = \frac{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)}{\cancel{s}\left(1-\frac{2}{s}\right)}$$

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{\left(1-\underbrace{\tfrac{3}{s}}_{\to 0}\right)\left(1+\underbrace{\tfrac{1}{s}}_{\to 0}\right)}{\left(1-\underbrace{\tfrac{2}{s}}_{\to 0}\right)} = \infty$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- Γενικότερα

M μηδ.

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} = A\frac{s^M\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{s^N\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)} = As^{M-N}\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)}$$

N πόλοι

- Αν $M > N \Leftrightarrow M - N > 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M - N$ πόλοι
- Αν $M < N \Leftrightarrow M - N < 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N - M$ μηδενικά
- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο

- Άρα :

- **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**

$$\boxed{\textbf{\# πόλων} = \textbf{\# μηδενικών}}$$

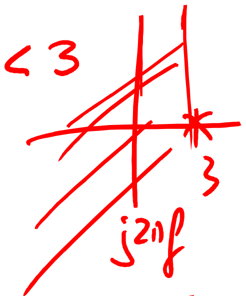
- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- **Παράδειγμα:**

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $\boxed{s = 3}$

a) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας? ΟΧΙ

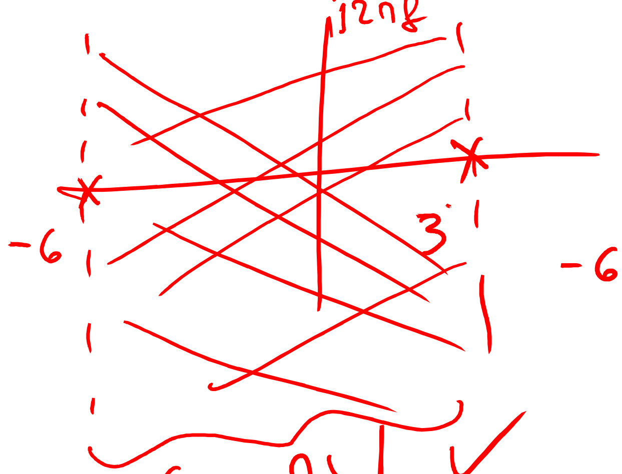
b) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα? ΝΑΙ $\sigma < 3$



c) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα? ΟΧΙ

d) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα? ΝΑΙ

Διότι έχω ένα πόλο $\sigma < 0$



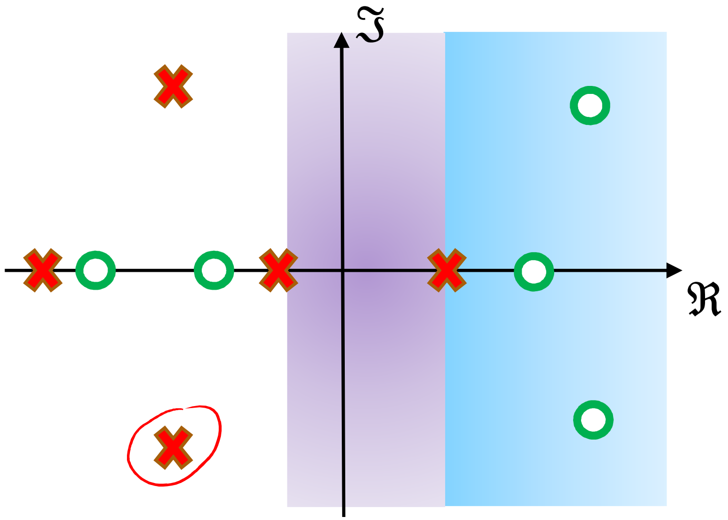
$-6 < \sigma < 3$

Ευσταθές	✓
Αιτιατό	✗

- **Ευστάθεια και Αιτιατότητα**

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια ***ρητή*** συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε αιτιατό, αντι-αιτιατό, ή μη αιτιατό σύστημα (κρουστική απόκριση)
  - Ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης

- Έστω το ακόλουθο διάγραμμα πόλων-μηδενικών που αντιστοιχεί σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς



- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα αιτιατό?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι **και** αιτιατό **και** ευσταθές? ☹

- Για να είναι ένα σύστημα **ευσταθές και αιτιατό, πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου**

- Εναλλακτικά, **όλοι οι πόλοι θα πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος**

- **Αντίστροφο Σύστημα**

- Το αντίστροφο σύστημα ενός δοθέντος ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:

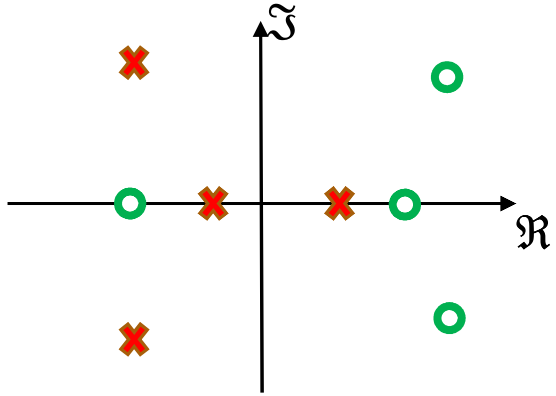
$$h(t) * h_{inv}(t) = \delta(t)$$

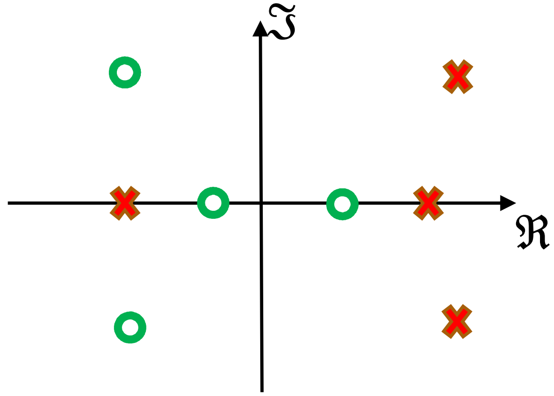
- Στο χώρο του Laplace:

$$H(s)H_{inv}(s) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset$$

- Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται μηδενικά και πόλοι του αντιστρόφου συστήματος, αντίστοιχα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \rightarrow H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}$$





- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s - \frac{4}{5}}, \qquad \boxed{\sigma > \frac{4}{5}}$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

$H(s)\cdot H_{inv}(s) = 1$

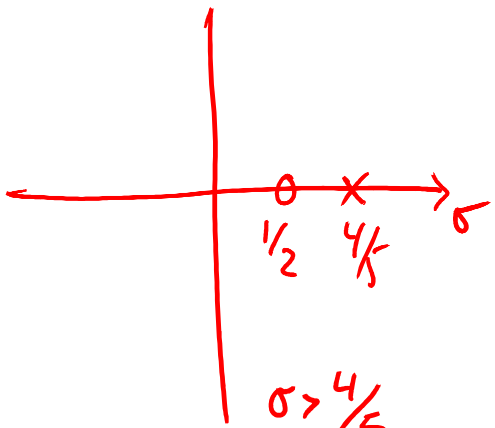
$R \cap R_{inv} \neq \emptyset$

$x(t) \to X(s)$

$\frac{dx(t)}{dt} \to sX(s)$

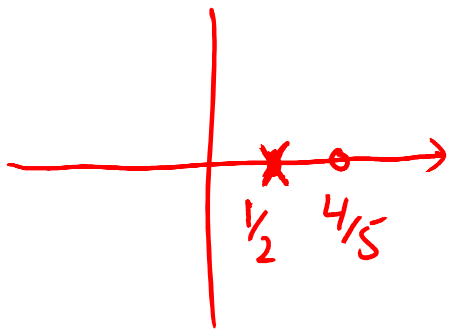
$H_{inv}(s) = \frac{s - 4/5}{s - 1/2}$

$H(s)$



$\sigma > 4/5$

R



$\sigma < 1/2$

$\sigma > 1/2$

R_{inv}

$$H_{inv}(s) = \frac{s}{s-1/2} - \frac{4}{5}\frac{1}{s-1/2} = s\underbrace{\frac{1}{s-1/2}}_{X(s)} - \frac{4}{5}\frac{1}{s-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\{\underbrace{e^{\frac{1}{2}t}u(t)}_{x(t)}\} - \frac{4}{5}e^{\frac{1}{2}t}u(t) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}u(t) + e^{\frac{1}{2}t}\underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\delta(t)} - \frac{4}{5}e^{\frac{1}{2}t}u(t)$$

$$= -\frac{3}{10}e^{\frac{1}{2}t}u(t) + \delta(t)$$

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**

$H(s) \cdot H_{inv}(s) = 1$

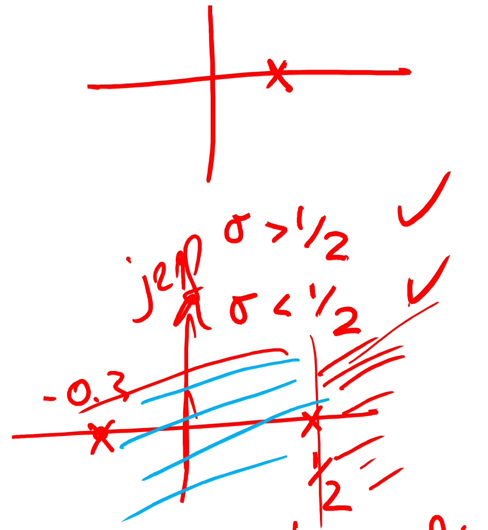
$R \cap R_i \neq \{\emptyset\}$

$H_{inv}(s) = \dfrac{s+3/10}{s-1/2} = 1 + \dfrac{8}{10}\dfrac{1}{s-1/2}$

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{3}{10}}, \quad \sigma > -\frac{3}{10}$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.



$$\begin{array}{r|l} s + 3/10 & s - 1/2 \\ \hline -s + 1/2 & 1 \\ \hline 8/10 & \end{array}$$

- $\sigma > 1/2$: $h_{inv}(t) = \delta(t) + \dfrac{8}{10} e^{1/2\, t} u(t)$

- $\sigma < 1/2$: $h_{inv}(t) = \delta(t) - \dfrac{8}{10} e^{1/2\, t} u(-t)$

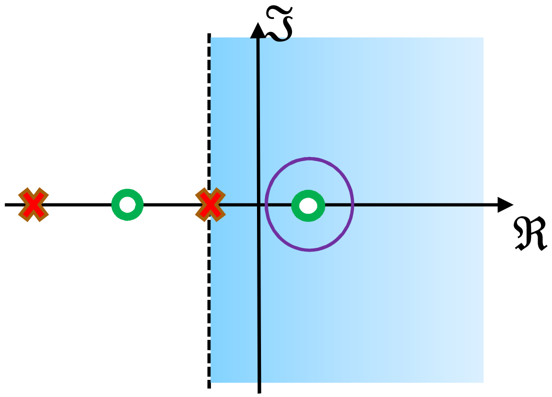
	Αιτιατό	Ευσταθές
$\sigma > 1/2$	✓	✗
$\sigma < 1/2$	✗	✓

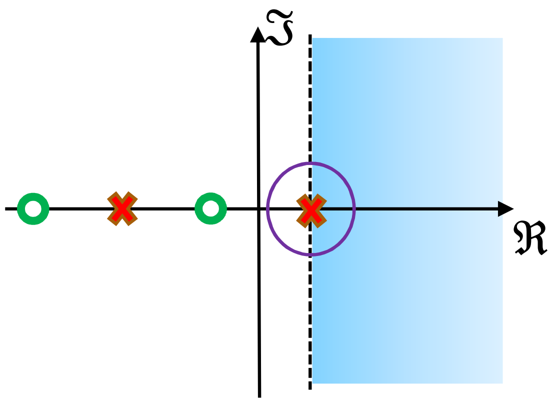
- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Από το προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι μπορεί να μην μπορούμε να έχουμε ευσταθές **και** αιτιατό *αντίστροφο* σύστημα (ταυτόχρονα), ακόμα κι αν το σύστημά μας είναι ευσταθές **και** αιτιατό!

- **Ερώτηση**: *τι πρέπει να ισχύει για ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έτσι ώστε αν αυτό είναι ευσταθές και αιτιατό, να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα?*

- Ας το δούμε με ένα παράδειγμα





- **Ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα μόνον όταν όλοι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!**

- Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ελάχιστης φάσης (minimum phase)**
  - …για λόγους που δεν είναι εμφανείς ☺

- **Συστήματα All-pass**

- Μια επίσης σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα all-pass
  - Ολοπερατά (in Greek ☺), δηλ. αφήνουν να περάσουν **όλες** οι συχνότητες στην έξοδο

- Η απόκριση πλάτους τους δίνεται ως

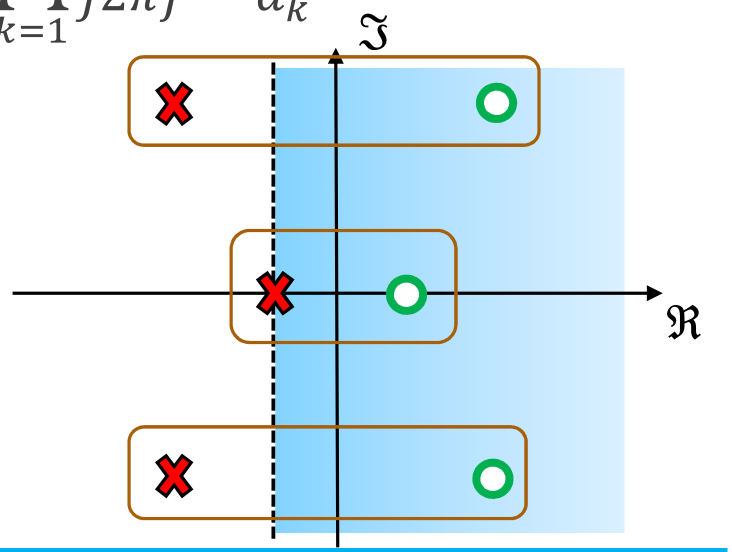
$$\left|H_{ap}(f)\right| = 1, \qquad \forall \ f$$

- Προφανώς η απόκριση φάσης τους είναι μη σταθερή

- Στο χώρο του Laplace:

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^{M} \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \Rightarrow H_{ap}(f) = \prod_{k=1}^{M} \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k}$$

- Οι πόλοι και τα μηδενικά ενός all-pass συστήματος βρίσκονται σε ζεύγη $(a_k, -a_k^*)$, δηλ. εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα
  - Με ίδιο φανταστικό αλλά αντίθετο πραγματικό μέρος



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση x All-pass**
- Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κάθε ΓΧΑ σύστημα σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass:

$$H(s) = H_{ap}(s)H_{min}(s)$$

- Γιατί είναι χρήσιμη μια τέτοια παραγοντοποίηση?
- Απόκριση πλάτους:

$$|H(s)|\Big|_{s=j2\pi f} = \left|H_{ap}(s)\right||H_{min}(s)|\Big|_{s=j2\pi f}$$

δηλ:

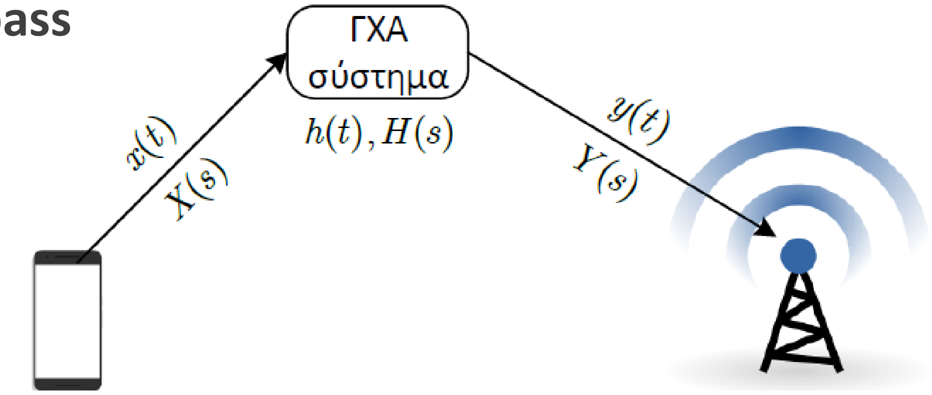
$$|H(f)| = \left|H_{ap}(f)\right||H_{min}(f)| = 1 \cdot |H_{min}(f)| = |H_{min}(f)|$$

- Το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει **την ίδια απόκριση πλάτους** με το ΓΧΑ σύστημα!
  - Προφανώς όμως δε θα έχει την ίδια απόκριση φάσης

- Απόκριση φάσης:

$$\angle H(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle H_{min}(f)$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**



- Επιστρέφοντας στο πρόβλημα…
- Αν το σύστημα $\frac{1}{H(s)}$ δεν είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε δεν μπορούμε να το υλοποιή-σουμε
- Μπορούμε όμως να υλοποιήσουμε το $\frac{1}{H_{min}(s)}$!!
- Εγγυημένα, το σύστημα αυτό θα είναι ευσταθές και αιτιατό! ☺

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{H_{min}(s)}} \longrightarrow y'(t)$$

- Τι συμβαίνει στην έξοδο της παραπάνω διάταξης?

$$Y(s)' = Y(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = H(s)X(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = \left[H(s)\frac{1}{H_{min}(s)}\right]X(s)$$

- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|}\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|}\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Πλήρης** ακύρωση της απόκρισης πλάτους του καναλιού!
- Το λαμβανόμενο σήμα έχει **ακριβώς το ίδιο φάσμα πλάτους** με αυτό που έφυγε από τον πομπό! ☺
- Προφανώς, η φάση του ληφθέντος σήματος θα διαφέρει από αυτή του πομπού
- Ας δούμε πόσο:

$$\angle Y'(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f)$$

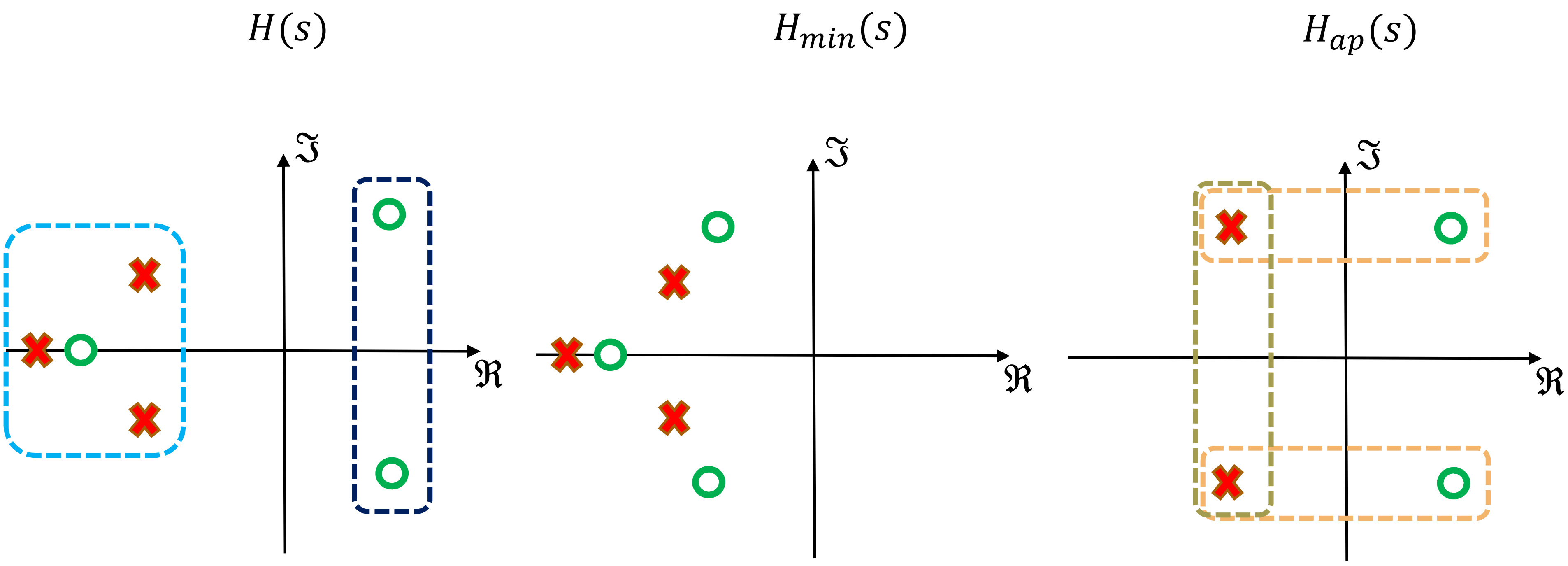
- Ανάλογα με την εφαρμογή, η διαταραχή στη φάση μπορεί να είναι ανεπαίσθητη ή αρκετά σοβαρή
- Σε επικοινωνίες φωνής, δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα…

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:

Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης και all-pass

1. Οι πόλοι και τα μηδενικά του αριστερού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης.
2. Τα μηδενικά του δεξιού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα all-pass. Για να είναι αυτό έγκυρο all-pass σύστημα, προσθέτουμε πόλους σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.
3. Οι πόλοι που προστέθηκαν στο all-pass σύστημα πρέπει να ακυρωθούν στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης. Έτσι, προσθέτουμε μηδενικά στο τελευταίο σύστημα, στις ίδιες ακριβώς θέσεις με τους πόλους του all-pass συστήματος.

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

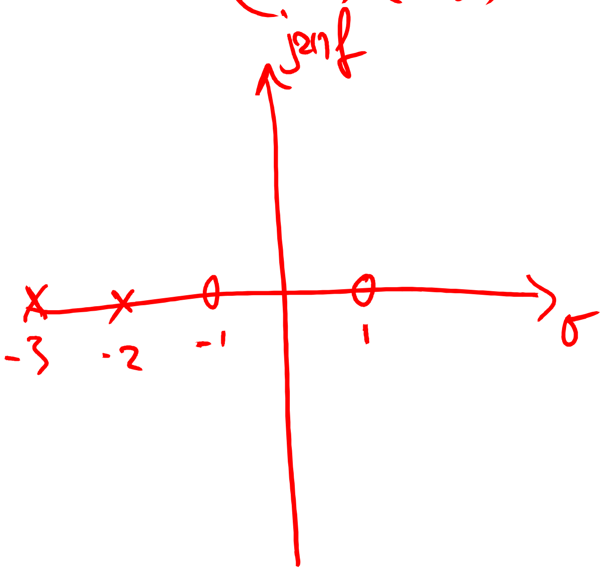
$$H(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+3)}, \qquad \sigma > -2$$

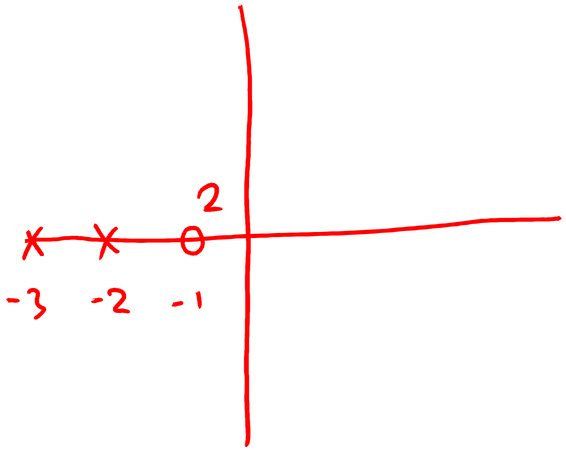
Παραγοντοποιήστε το σε ελάχιστης φάσης και all-pass.

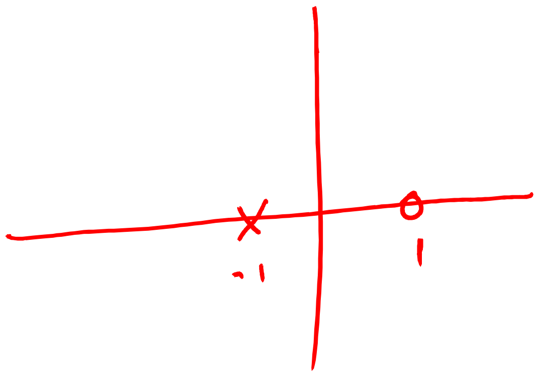
$$H(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+2)(s+3)}$$

$$H_{min}(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)\cdot(s+3)}$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$







ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ