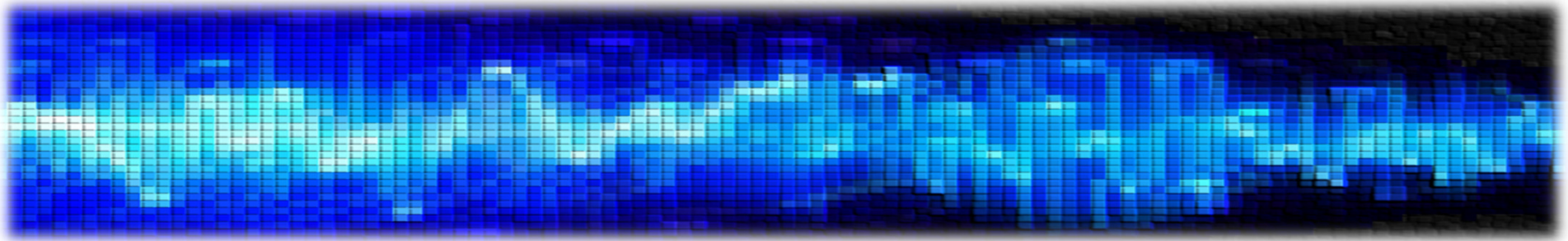

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η



- Μετασχηματισμός Laplace



Τι περιέχει το ΗΥ215?



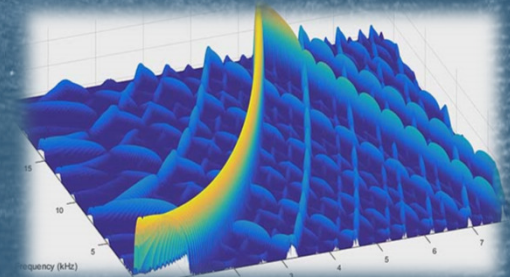
1^ο Κομμάτι

- ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier



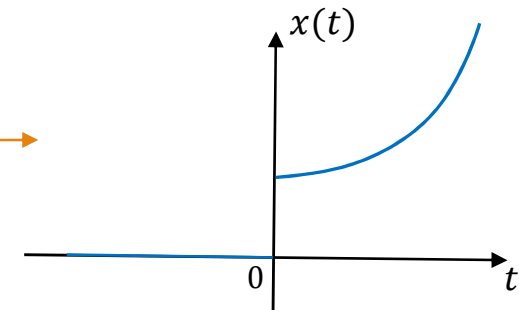
2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ▶ Τυχαία Σήματα
- ▶ Δειγματοληψία
- ▶ Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



• **Προς το μετασχ. Laplace**

- Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (?) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων
- Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)
 - Κάποια σήματα ισχύος
 - Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος
- Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$
 - Δεν έχει μετασχ. Fourier
 - Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?



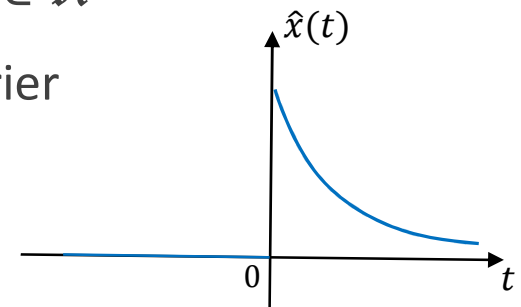
$$a < 0$$

- Ας το κάνουμε να έχει! 😊
- Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = e^{at}e^{-\sigma t}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

- Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{-j2\pi ft} dt$$



- Προς το μετασχ. Laplace

- Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

- Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα

- Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! 😊

- Από την παραπάνω σχέση

$$\hat{X}(f) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-(\sigma + j2\pi f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{e^{at} u(t)} e^{-st} dt = X(s)$$

$x(t)$
↓

- Οπότε βρήκαμε έναν άλλο μετασχηματισμό ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}

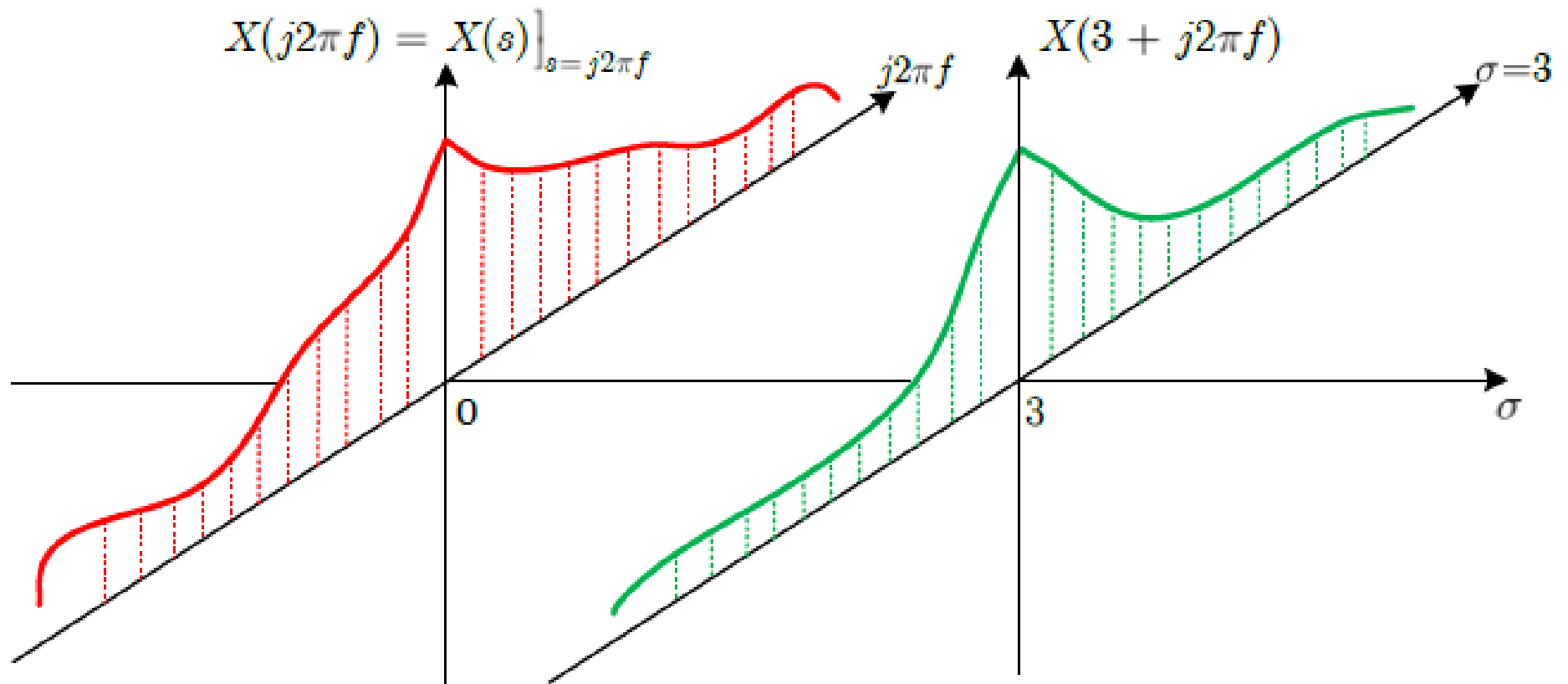
- Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόνταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$

- Μιγαδικές συχνότητες!!!???? 😞😞

- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace**



• Προς το μετασχ. Laplace



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας
 - Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$
- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence)**
 - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής

- Ορισμός Μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

- Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε...

- **Προς το μετασχ. Laplace**

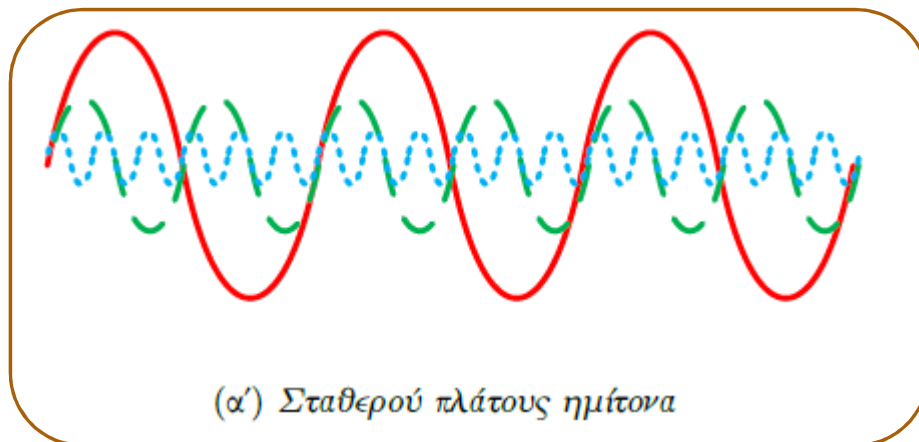
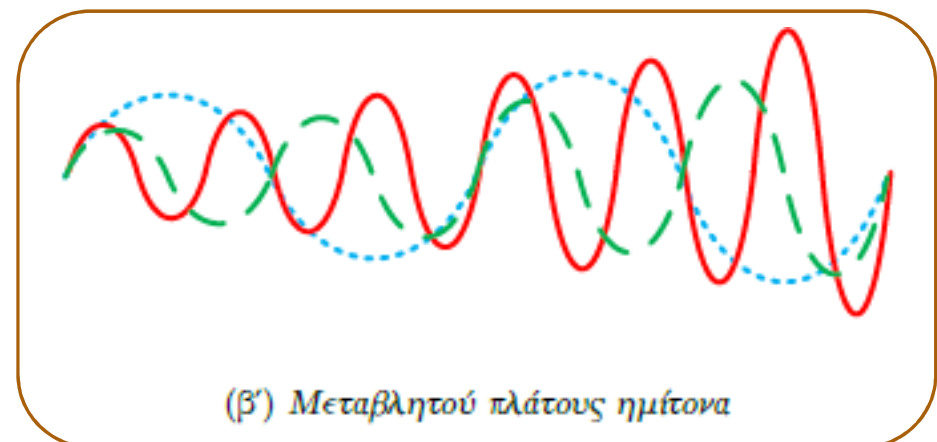
- Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξεκινάει...

- Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{X}(f)e^{\sigma t})e^{j2\pi ft} df$$

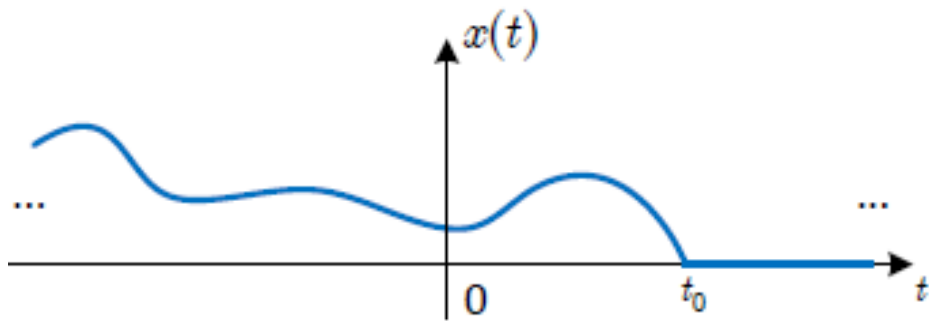
- Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \int_0^{+\infty} 2|\hat{X}(f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi ft + \hat{\phi}(f)) df$$

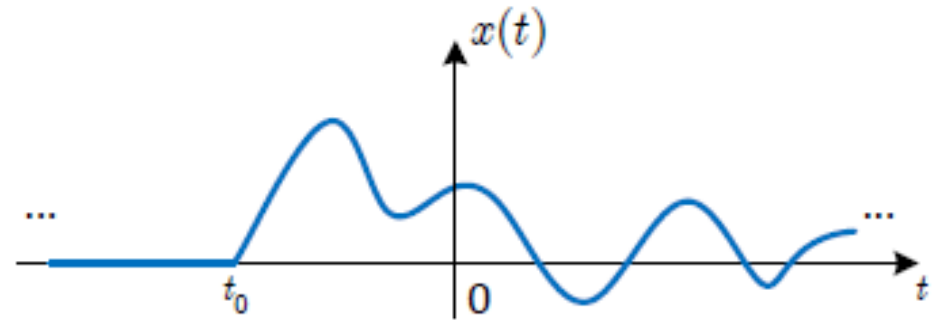
 $\sigma = 0$

 $\sigma \neq 0$


• Πλευρικότητα και Αιτιατότητα

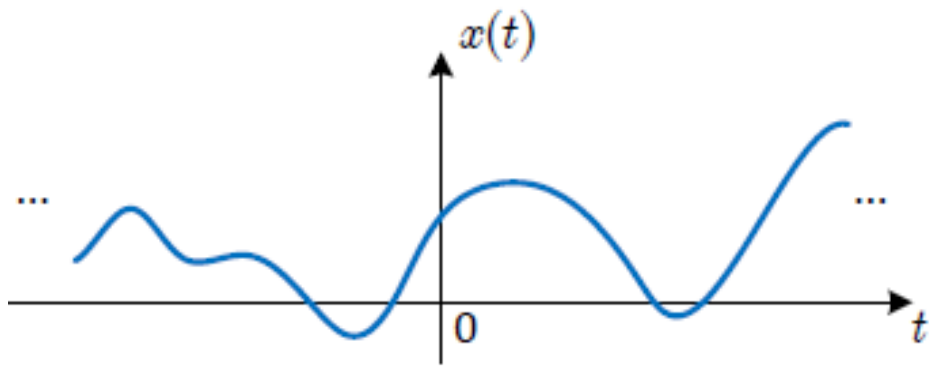
• Πλευρικότητα



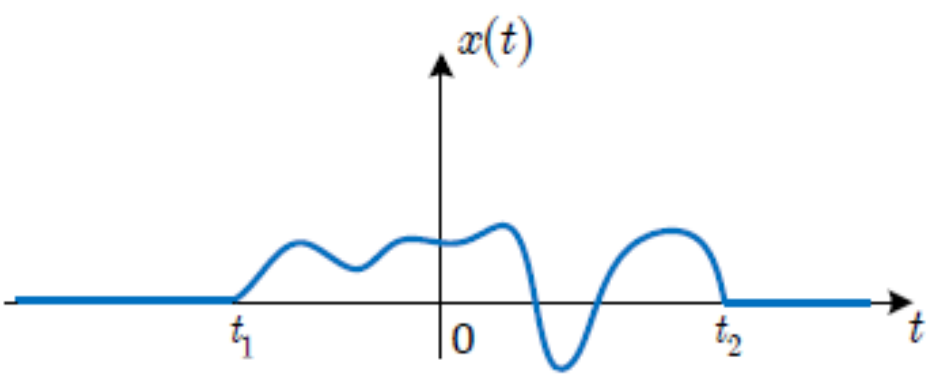
(α') Αριστερόπλευρο σήμα.



(β') Δεξιόπλευρο σήμα.



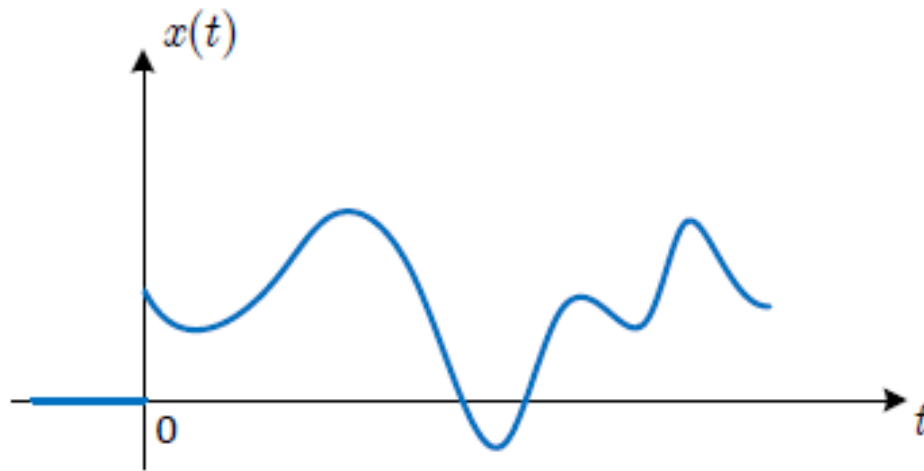
(γ') Αμφίπλευρο σήμα.



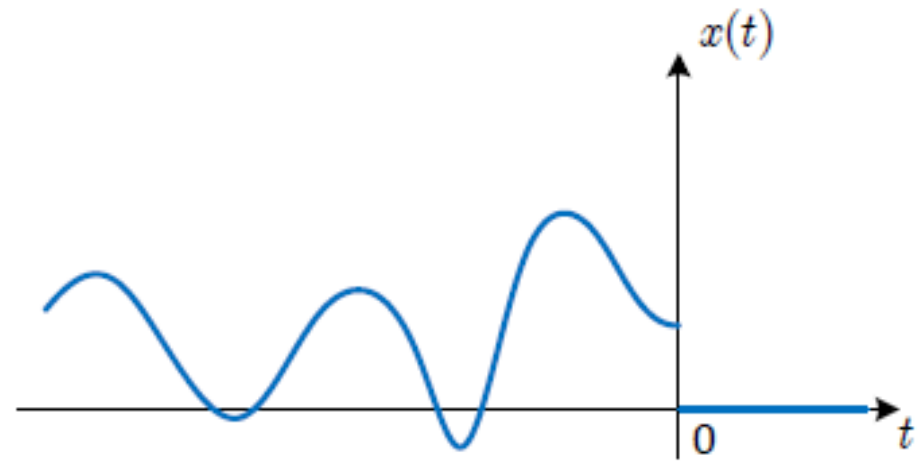
(δ') Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.

- Πλευρικότητα και Αιτιατότητα

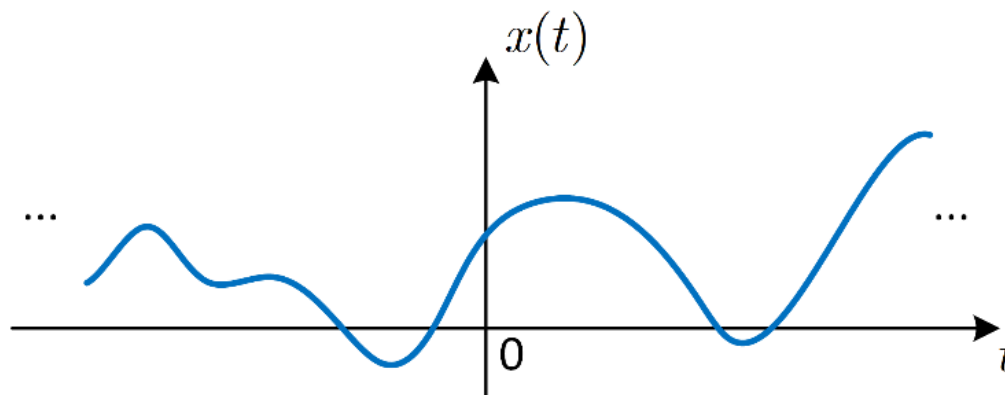
- Αιτιατότητα



(α') Αιτιατό Σήμα.



(β') Αντι-αιτιατό σήμα.



(γ') Μη-αιτιατό σήμα

• Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$

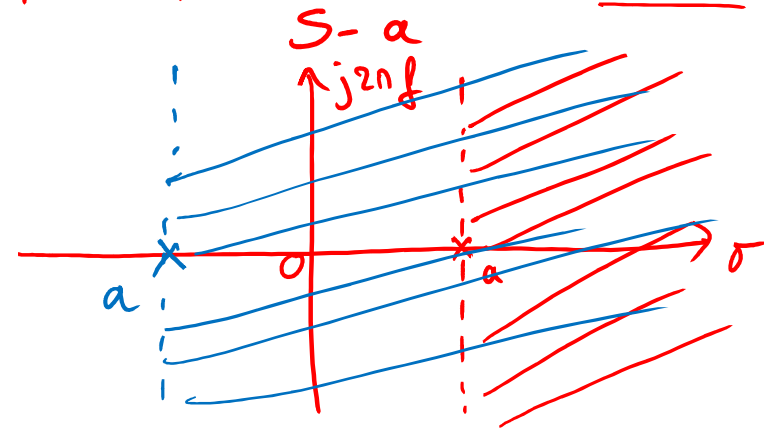
$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi f t} - 1 \right) = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi f t} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{a-s} (-1) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$$

ROC

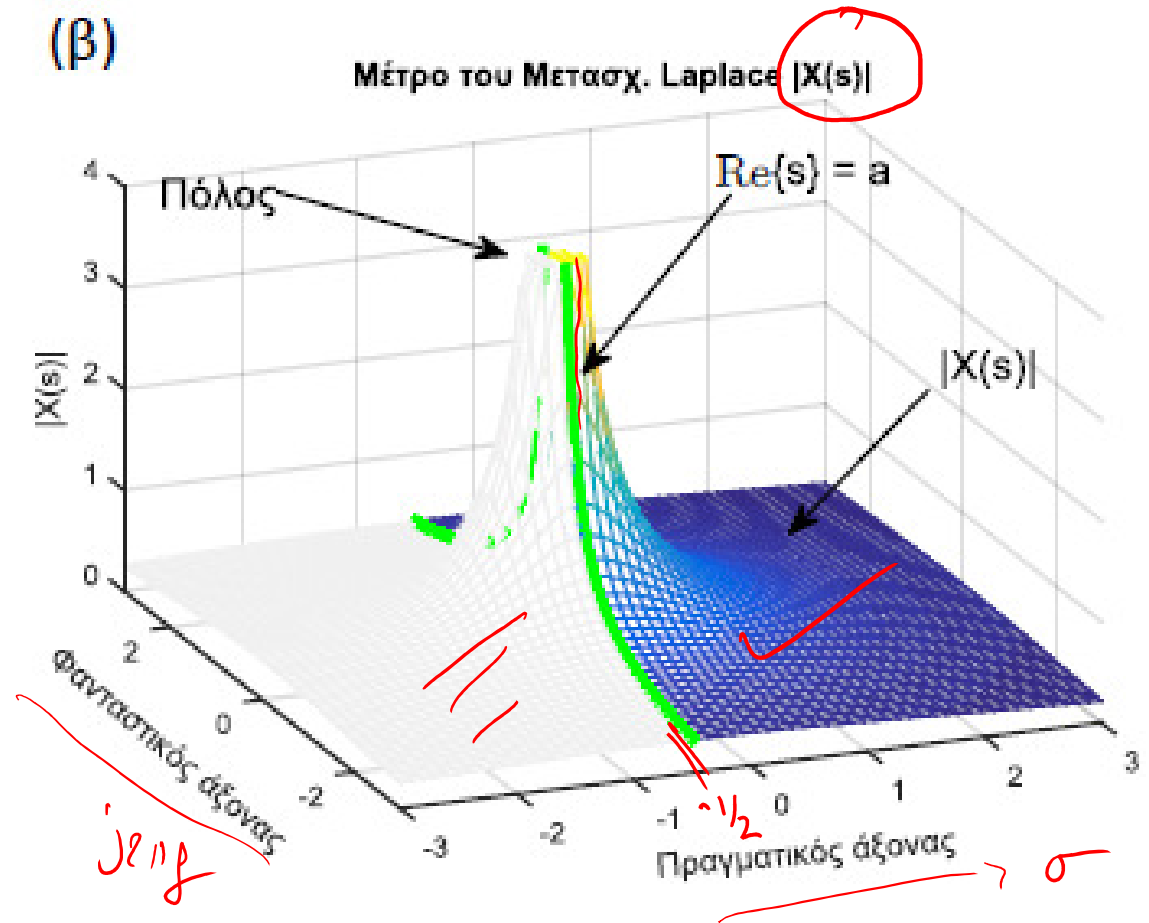
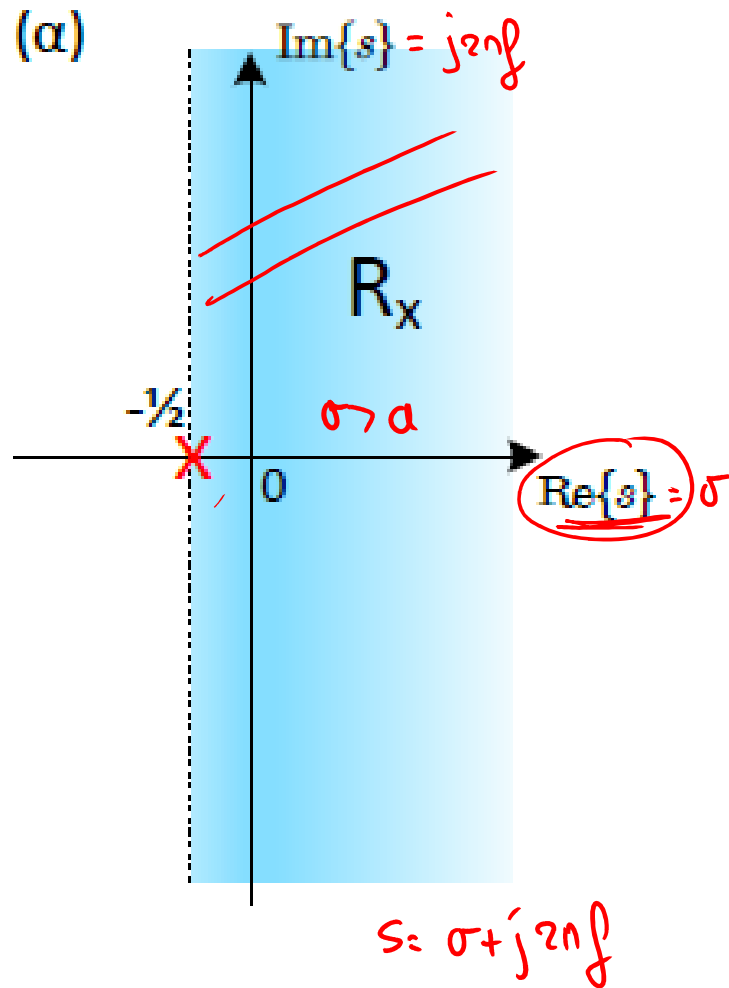
$$\Rightarrow x(t) = e^{at} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s-a} \\
 &\quad \begin{array}{l} \nearrow \text{μυδωικά} \\ \searrow \text{πόσους} \end{array} \\
 &\quad \begin{array}{l} s = a \text{ πόσος} \\ \sigma = a \end{array}
 \end{aligned}$$



• Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα: $a = -\frac{1}{2}$



• Μετασχηματισμός Laplace

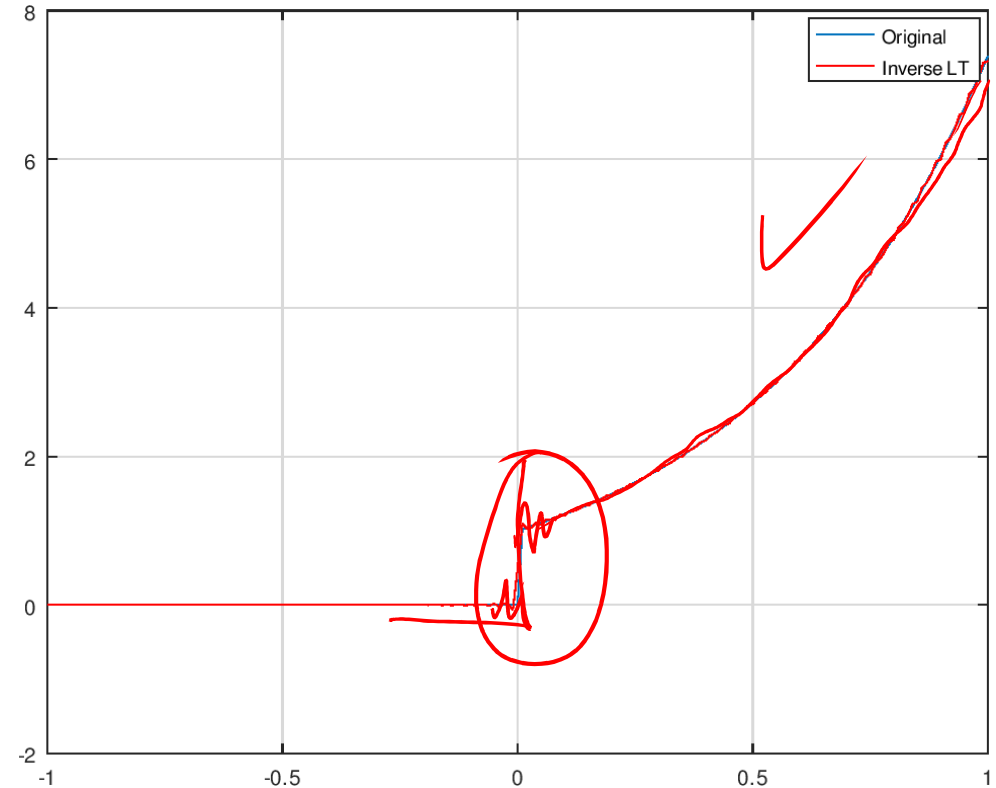
• Κώδικας:

```

1  % alpha parameter (must be > 0)
2  a = 2;
3  % Time step
4  dt = 0.01;
5  % Time axis
6  t = -1:dt:1;
7  % Frequency step
8  df = 0.01;
9  % Frequency axis (the usual one)
10 f = -40:df:40;
11 % Signal (0 for t<0, exp(at) for t > 0)
12 x = [zeros(size(t(t<=0))) exp(a*t(t>0))]; ←
13 % Sigma selection
14 sigma = 4;
15 % Laplace Transform
16 X = 1./(sigma - a + j*2*pi*f); ←
17 % Memory allocaton
18 x_est = zeros(size(x));
19 % Synthesizing x(t) from Laplace Transform
20 for i=1:length(f)
21     x_est = x_est + X(i).*exp((sigma + j*2*pi*f(i))*t);
22 endfor
23 % Normalize
24 x_est = df*x_est;
25 % Plotting
26 plot(t, x); grid; hold on;
27 plot(t, real(x_est), 'r'); hold off;

```

$$X(f) \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j2\pi ft}$$



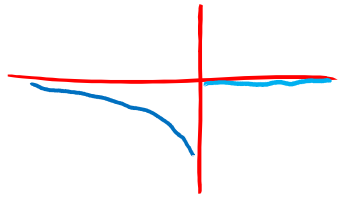
$$\frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

• Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t)$, $a \in \mathbb{R}$

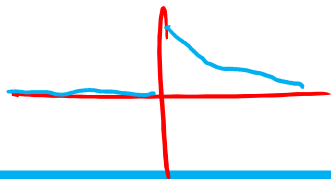
$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = \\
 &= - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s-a} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \cdot e^{-j2\pi f t} \right) \Rightarrow \\
 &\hspace{15em} a-s > 0 \Rightarrow \boxed{\sigma < a}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = -e^{at} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}, \quad \boxed{\sigma < a}$$

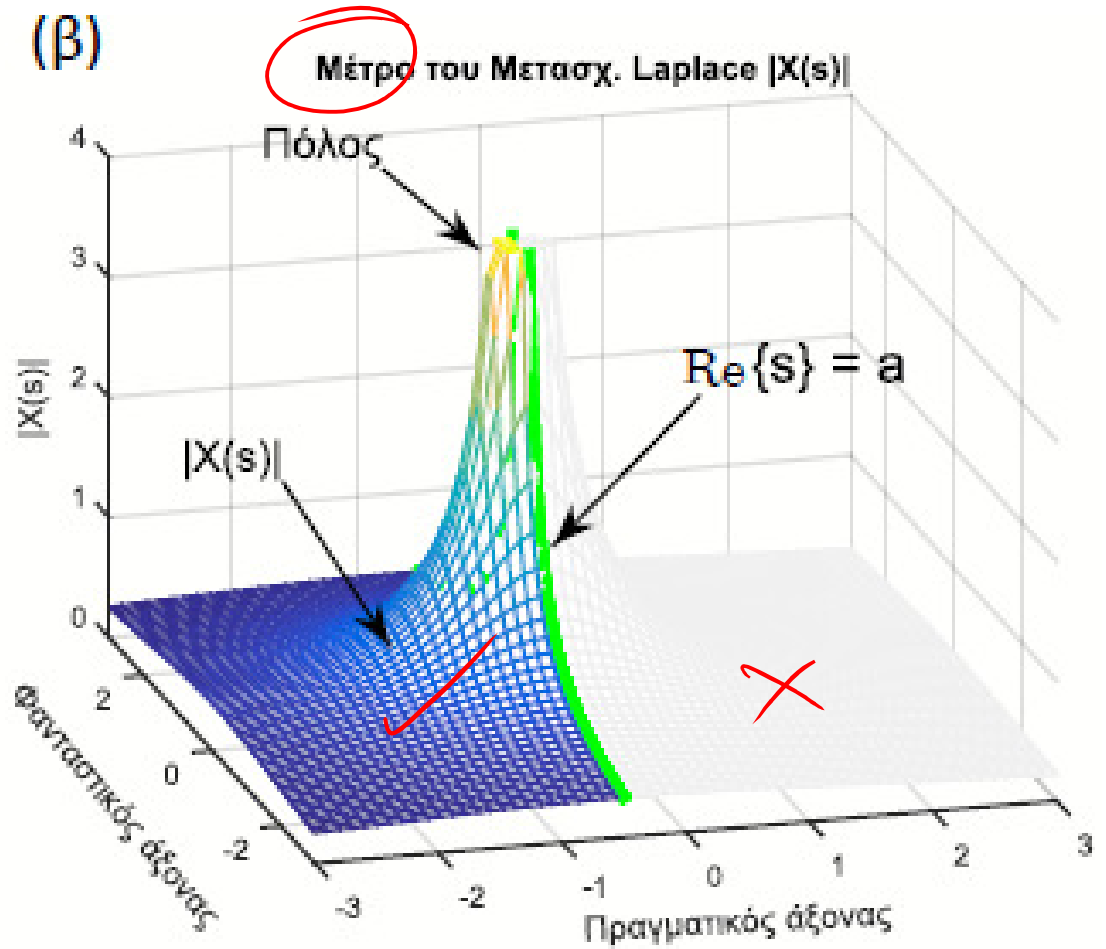
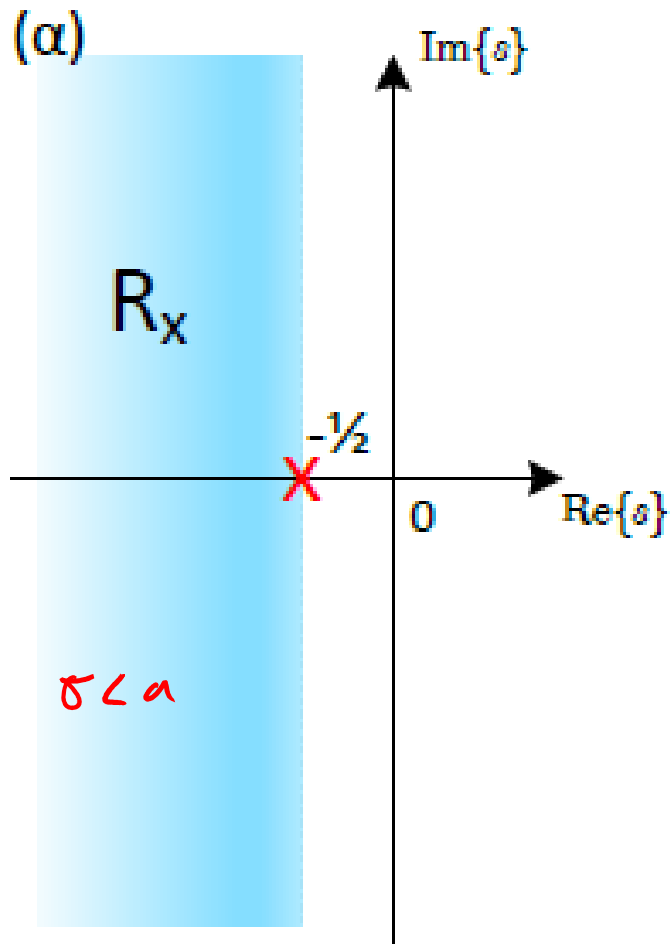


Πριν

$$x(t) = e^{at} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}, \quad \boxed{\sigma > a}$$



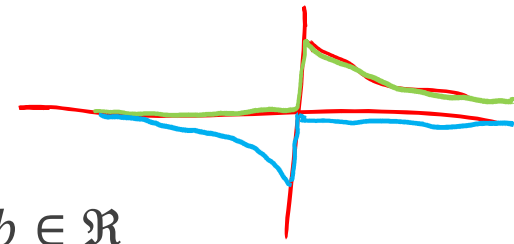
- Μετασχηματισμός Laplace
- Παράδειγμα:



• Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}u(-t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

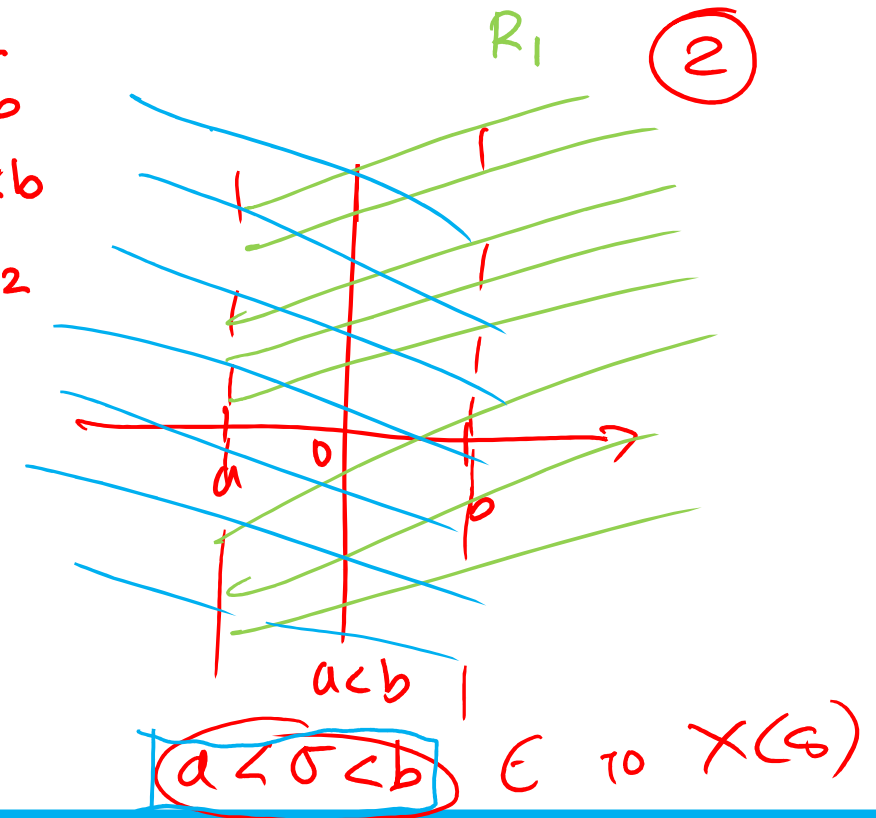
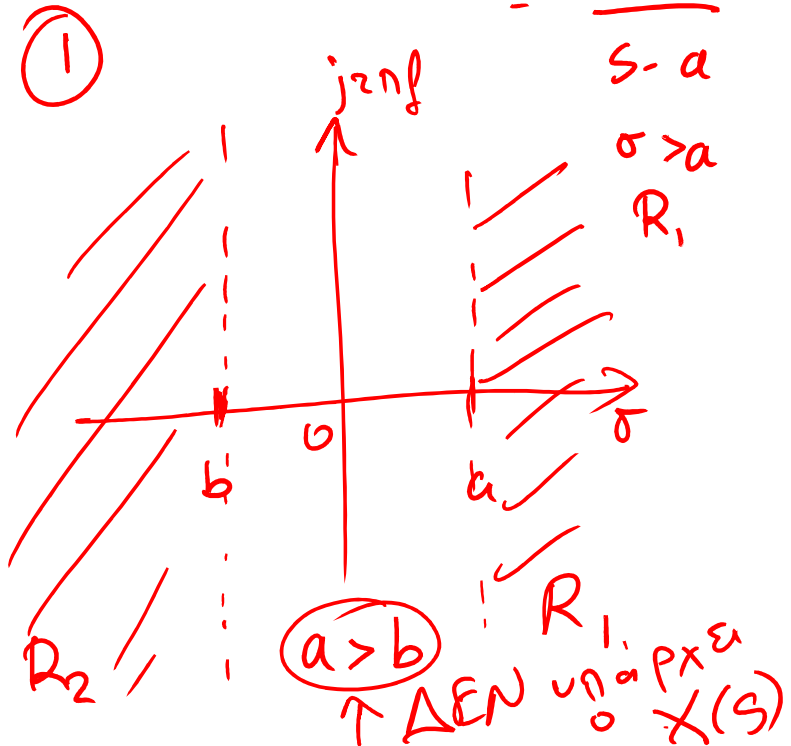


$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} + \mathcal{L}\{-e^{bt}u(-t)\} \leftarrow \begin{matrix} \text{AY} \\ \boxed{a < b} \end{matrix}$

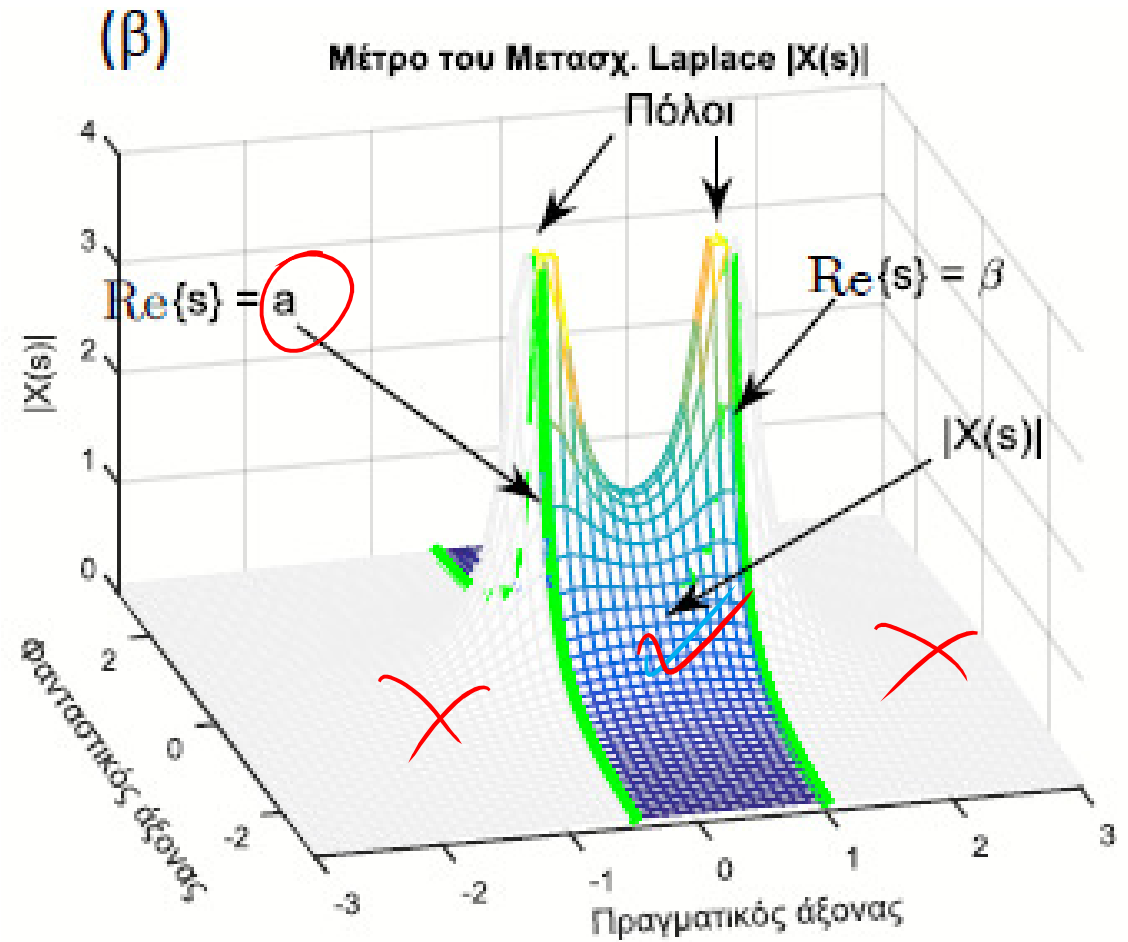
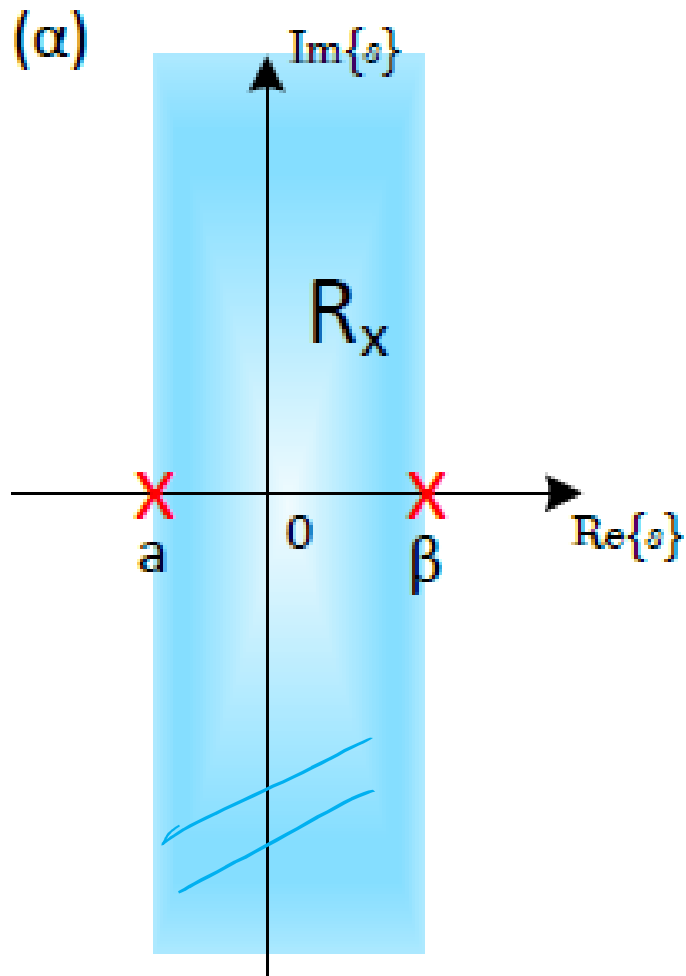
$$= \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}$$

$$\begin{matrix} \sigma > a & R_1 \\ \sigma < b & R_2 \end{matrix}$$

②



- Μετασχηματισμός Laplace
- Παράδειγμα:

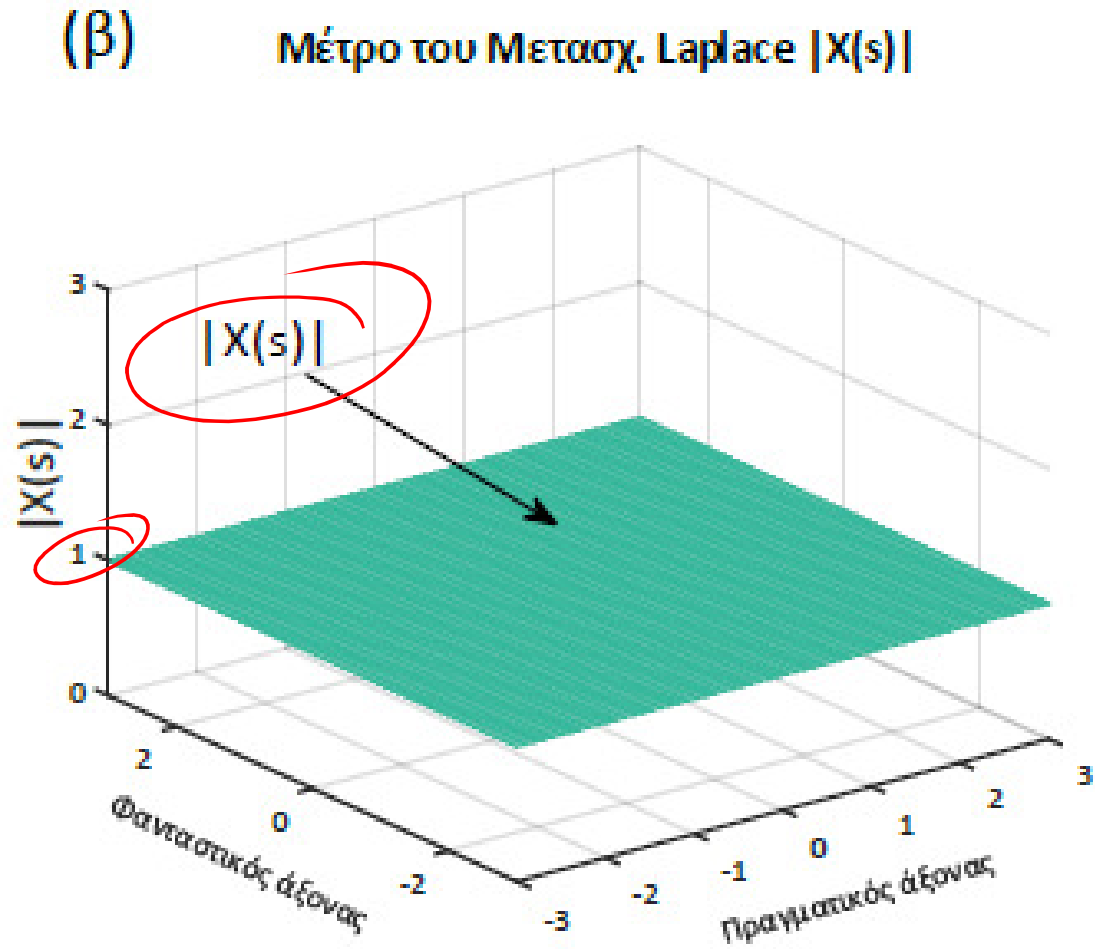
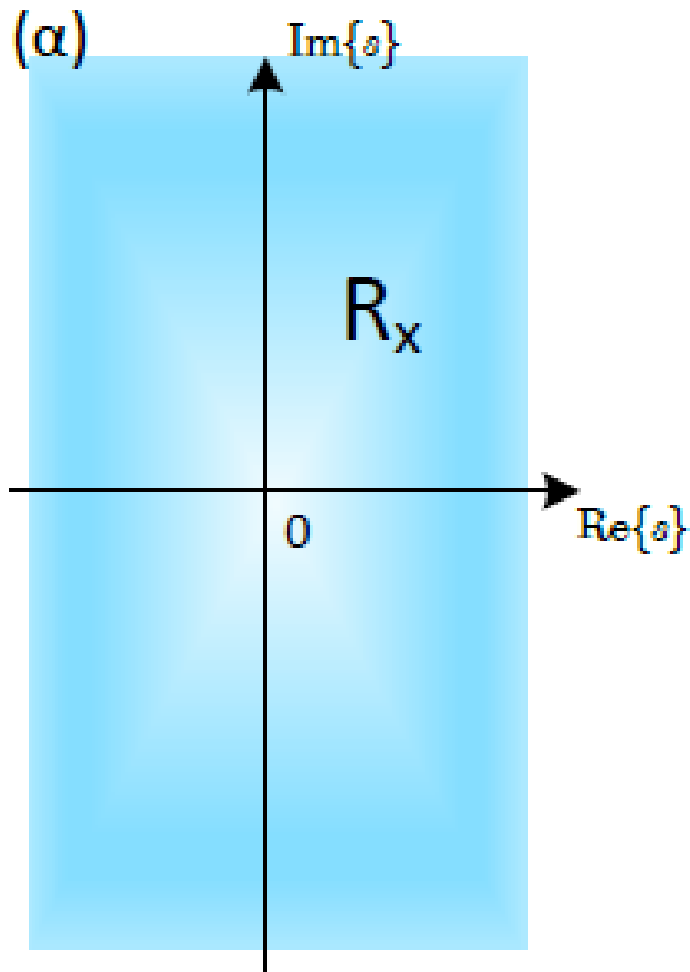


- Μετασχηματισμός Laplace
- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \underbrace{e^{-st}} dt = 1 \quad \forall s$$

- Μετασχηματισμός Laplace
- Παράδειγμα:



- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace
2. Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
 - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s , οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι
3. Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
 - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s , οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά
4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

• Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης

• Ιδιότητες:

1. Ένα πεδίο σύγκλισης δεν περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
 - a) Ένα **ημιεπίπεδο** του μιγαδικού επιπέδου **δεξιά** από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
 - b) Ένα **ημιεπίπεδο** του μιγαδικού επιπέδου **αριστερά** από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
 - c) Μια **λωρίδα** του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
 - d) **Όλο** το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι **δεξιόπλευρο**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι **αριστερόπλευρο**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι **αμφίπλευρο**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι **πεπερασμένης διάρκειας**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

