HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού
- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση** (frequency response)
- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

○ **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$

○ **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου*
- Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου*

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

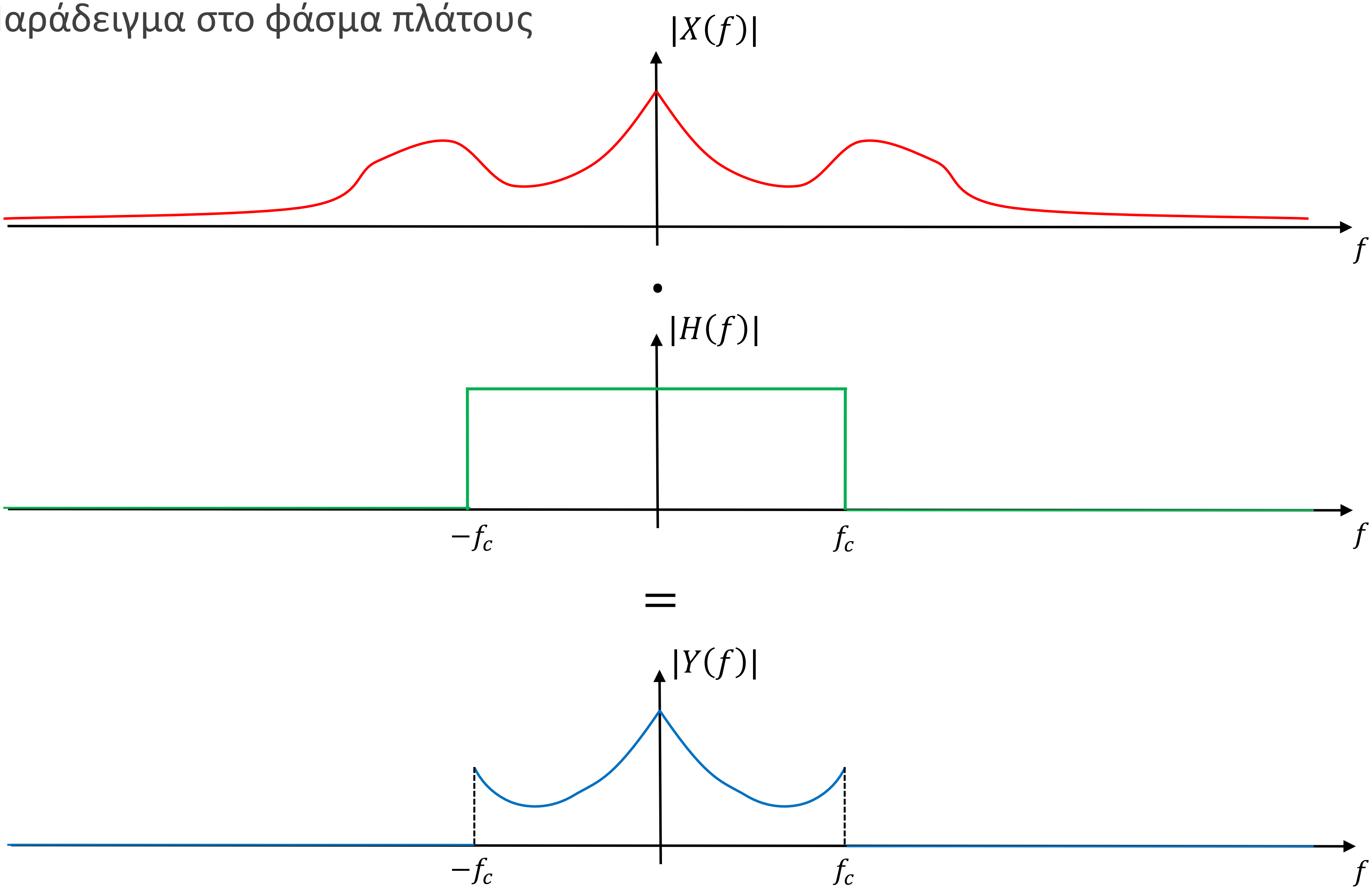
- Προφανώς

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

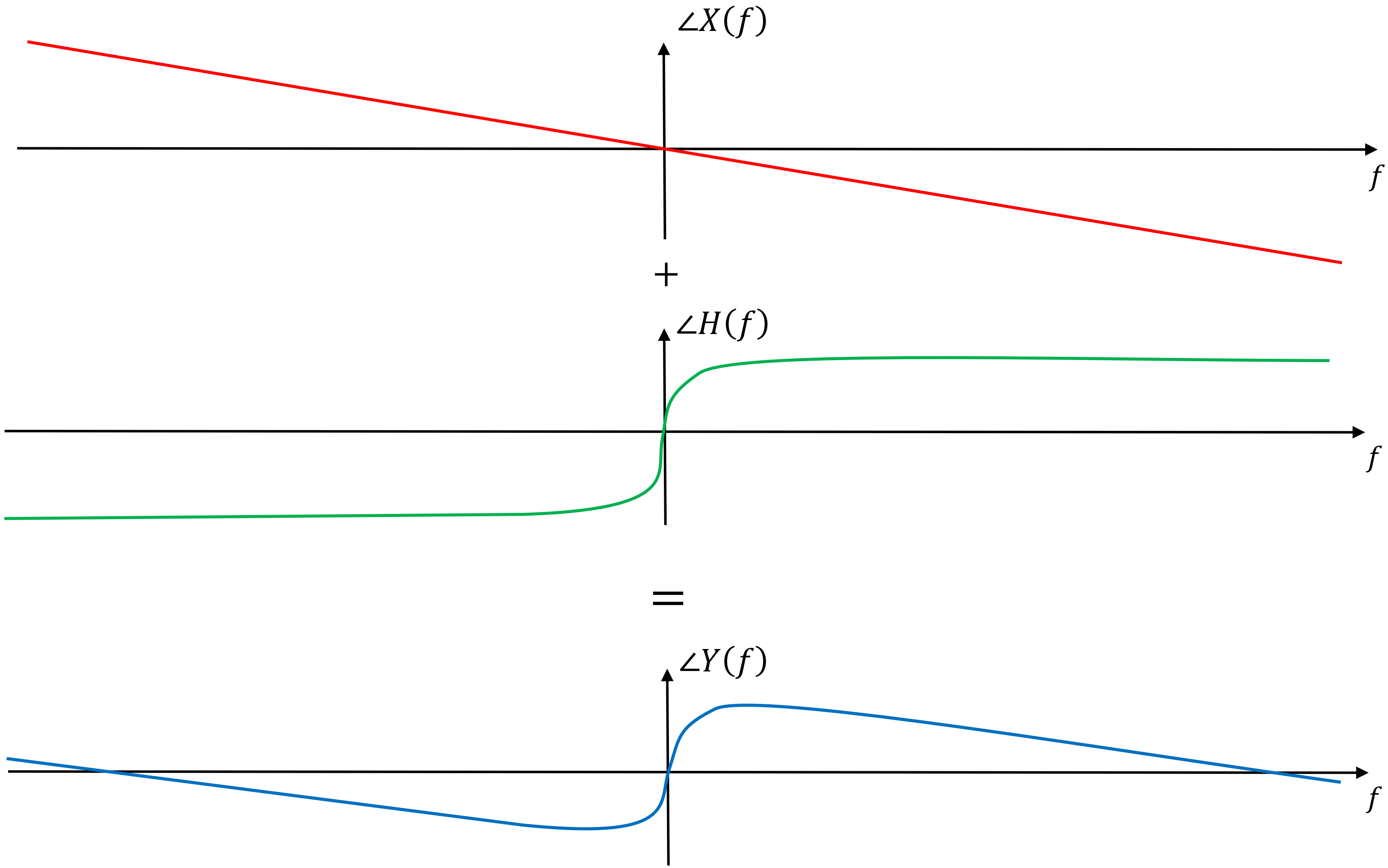
$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

1ος τρόπος : γνωστός (πεδίο του χρόνου)

2ος τρόπος : εφαρμόζοντας ιδιότητα παραγώγισης Μ. Fourier :

$$j2\pi f\, Y(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6j2\pi f\, X(f)$$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$\underbrace{x'(t) \xleftrightarrow{F} j\underline{2\pi f}\, X(f)}$$

- Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $H(f) = \frac{3}{2+j2\pi f} - 6j2\pi f \underbrace{\frac{1}{2+j2\pi f}}$

$$\frac{3}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} 3e^{-2t}u(t) \qquad 6j2\pi f\frac{1}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} -6\frac{d}{dt}e^{-2t}u(t)$$

Άρα $h(t) = 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}e^{-2t}u(t)$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\left(\left(e^{-2t}\right)'u(t) + e^{-2t}u'(t)\right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6(-2)e^{-2t}u(t) - \underbrace{6e^{-2t}\delta(t)}$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\cdot 1\cdot \delta(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

2ος τρόπος: Βρήκαμε ότι $H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$

Έστω $u = j2\pi f$ και διαιρούμε:

$$\begin{array}{r|l} -6u + 3 & u + 2 \\ \cline{2-2} -(-6u - 12) & -6 \\ \cline{1-1} 0u + 15 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow -6 + \frac{15}{2+u} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow -6 + \frac{15}{2+j2\pi f} = H(f)$$

Άρα αφού $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$, $e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j2\pi f}$, $a > 0$

τότε

$$h(t) = -6\delta(t) + 15e^{-2t}u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό **περιοδικό** σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
  - Υπάρχει πιο εύκολος τρόπος για την κατηγορία αυτή?

- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του ΓΧΑ συστήματος! ☺

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0)|X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}$$

και αν η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι πραγματική τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(kf_0)||X_k| \cos\left(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0)\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

$f_0 = \frac{2}{\pi}$ Hz

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y(t) = 3 \cdot H(0) + 2 \cdot \left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| \cdot \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} + \measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$$

Άρα χρειαζόμαστε την συχνοτική απόκριση $H(f)$.

$$y'(t) + 3y(t) = x(t) \xleftrightarrow{F} j2\pi f\,Y(f) + 3Y(f) = X(f)$$

$$Y(f)(3 + j2\pi f) = X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Η συχνότητα εισόδου είναι $f_0 = \frac{2}{\pi}$ Hz.

Άρα $H(f)\Big|_{f=\frac{2}{\pi}} = H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{3+j2\cancel{\pi}\cdot\frac{2}{\cancel{\pi}}} = \frac{1}{3+j4}$

$$\left\{ H(0) = \frac{1}{3} \right.$$

$$\left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| = \frac{1}{|3+j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \measuredangle \frac{1}{3+j4} = \measuredangle \frac{3-j4}{|3+j4|^2} = \measuredangle \frac{3-j4}{25}$$

$$= \measuredangle\left(\frac{3}{25} + j\frac{-4}{25}\right) = \tan^{-1}\frac{-\frac{4}{\cancel{25}}}{\frac{3}{\cancel{25}}} = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \simeq -0.927$$

Τέλος,

$$y(t) = 3\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{5}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.927\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα – με μετασχ. Fourier:

$$x(t) = \sum X_k e^{j2\pi k f_c t} \xleftrightarrow{F}$$

$$\longleftrightarrow X(f) = \sum X_k \delta(f - kf_c)$$

Είναι

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

$2\pi \frac{2}{\pi} t$

$$X(f) = F\left\{3 + e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j4t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j4t}\right\}$$

$$= 3\delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

Άρα

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

$$= \frac{1}{3 + j2\pi f}\left(3\delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)\right)$$

$$= \left.\frac{3}{3 + j2\pi f}\right|_{f=0} \delta(f) + \left.\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{3 + j2\pi f}\right|_{f=\frac{2}{\pi}} \delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + \left.\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{3 + j2\pi f}\right|_{f=-\frac{2}{\pi}} \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα – με μετασχ. Fourier:

ΕΒΔ

$$= 1\cdot\delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+j4}\delta\left(f-\frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3-j4}\delta\left(f+\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\frac{1}{3+j4} \downarrow \frac{1}{5}e^{-j0.927} \qquad \frac{1}{3-j4} \downarrow \frac{1}{5}e^{j0.927}$$

$$= 1\cdot\delta(f) + e^{j\left(\frac{\pi}{3}-0.927\right)}\frac{1}{5}\delta\left(f-\frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\left(\frac{\pi}{3}-0.927\right)}\frac{1}{5}\delta\left(f+\frac{2}{\pi}\right)$$

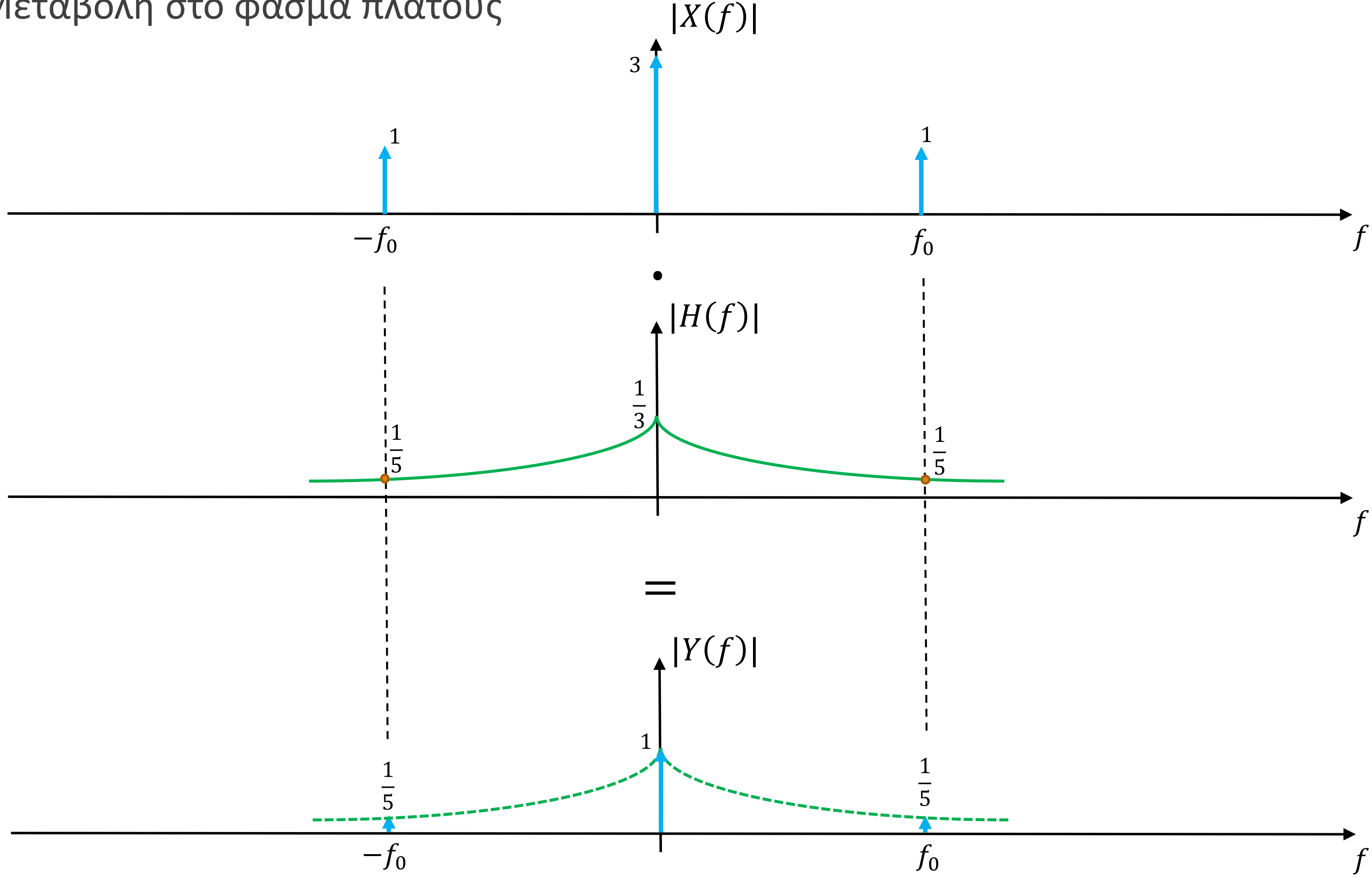
Άρα (από πίνακες γνωστών ζευγών Μ.F.)

$$y(t) = 1\, e^{j2\pi 0 t} + \underbrace{e^{j\left(\frac{\pi}{3}-0.927\right)}\frac{1}{5}e^{j4t} + e^{-j\left(\frac{\pi}{3}-0.927\right)}\frac{1}{5}e^{-j4t}}$$

$$= 1 + \frac{2}{5}\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}-0.927\right).$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Μεταβολή στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό **απεριοδικό** σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?

- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο $\leftrightarrow$ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

  ○ Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Είναι

$$H(f) = F\{h(t)\} = \frac{1}{3+j2\pi f}$$

$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$$

Άρα

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{\Gamma}{3+j2\pi f}, \text{ οπότε}$$

$$A = Y(f)(1+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5+3j2\pi f}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{2}{2} = 1$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$B = Y(f)(2+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-2} = \frac{5+3j2\pi f}{\underbrace{(1+j2\pi f)}_{-1}\underbrace{(3+j2\pi f)}_{1}}\Bigg|_{j2\pi f=-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\Gamma = Y(f)(3+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{5+3j2\pi f}{\underbrace{(1+j2\pi f)}_{-2}\underbrace{(2+j2\pi f)}_{-1}}\Bigg|_{j2\pi f=-3} = \frac{-4}{2} = -2$$

Οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{2}{3+j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

  - Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, το οποίο παράγει την έξοδο $y(t) = (e^{-t} + e^{-4t})u(t)$. Βρείτε την είσοδο $x(t)$.

Είναι $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \dfrac{2}{2+j2\pi f}$

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f}$$

$$= \frac{5+2j2\pi f}{(1+j2\pi f)(4+j2\pi f)}$$

Είναι $Y(f) = X(f)H(f) \Longrightarrow X(f) = \dfrac{Y(f)}{H(f)}$

$$= \frac{\dfrac{5+2j2\pi f}{(1+j2\pi f)(4+j2\pi f)}}{\dfrac{2}{2+j2\pi f}} = \frac{(5+2j2\pi f)(2+j2\pi f)}{2(1+j2\pi f)(4+j2\pi f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Θέτω $u = j2\pi f$, $X(u) = \frac{1}{2}\,\frac{(5+2u)(2+u)}{(1+u)(4+u)} = \frac{1}{2}\left[\frac{10+9u+2u^2}{u^2+5u+4}\right]$

Βαθμός (αριθμητή) = Βαθμός (παρονομαστή), άρα δεν μπορώ να κάνω ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Πρέπει να διαιρέσω τα πολυώνυμα

$$
\begin{array}{r|l}
2u^2 + 9u + 10 & u^2 + 5u + 4 \\ \cline{2-2}
-(2u^2 + 10u + 8) & 2 \\ \hline
0u^2 - u + 2 &
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad 2 + \frac{2-u}{(1+u)(4+u)}, \text{ άρα}
$$

$$X(u) = \frac{1}{2}\left(2 + \underbrace{\frac{2-u}{(1+u)(4+u)}}_{G(u)}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + G(u)\right)$$

ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα σε αυτόν τον όρο

$$G(u) = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{4+u}, \text{ με } A = G(u)(1+u)\Big|_{u=-1} = \frac{2-u}{4+u}\Big|_{u=-1} = 1$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

και $B = G(u)(4+u)\Big|_{u=-4} = \frac{2-u}{1+u}\Big|_{u=-4} = -2$

άρα $G(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{2}{4+u} \rightsquigarrow G(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{2}{4+j2\pi f}$

Οπότε συνολικά

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{2}{4+j2\pi f}\right)$$

και από πίνακες

$$x(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι το παραπάνω $x(t)$ δίνει το δοθέν $y(t)$ ως έξοδο από το σύστημα $h(t)$? :)

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για να επιτύχουμε όλα τα ωραία αποτελέσματα που βρήκαμε πριν, υποθέσαμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(f)$ ορίζεται

- Ισχύουν όλες οι γνωστές απαιτήσεις για την ύπαρξη της, όπως τις γνωρίσαμε στη μελέτη του Μετασχ. Fourier

  - Η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (μη αναγκαία συνθήκη)

  - Η κρουστική απόκριση να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη

- Αν δε γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση τότε μπορούμε να ξέρουμε αν το σύστημα που **εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις** έχει μετασχ. Fourier?

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Θυμηθείτε ότι, για ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα, μια τέτοια κρουστική απόκριση αποτελείται από όρους της μορφής

$$\delta^{(n)}(t), \qquad c_i e^{\lambda_i t} u(t), \qquad c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη μόνον όταν δεν υπάρχουν παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα και όταν

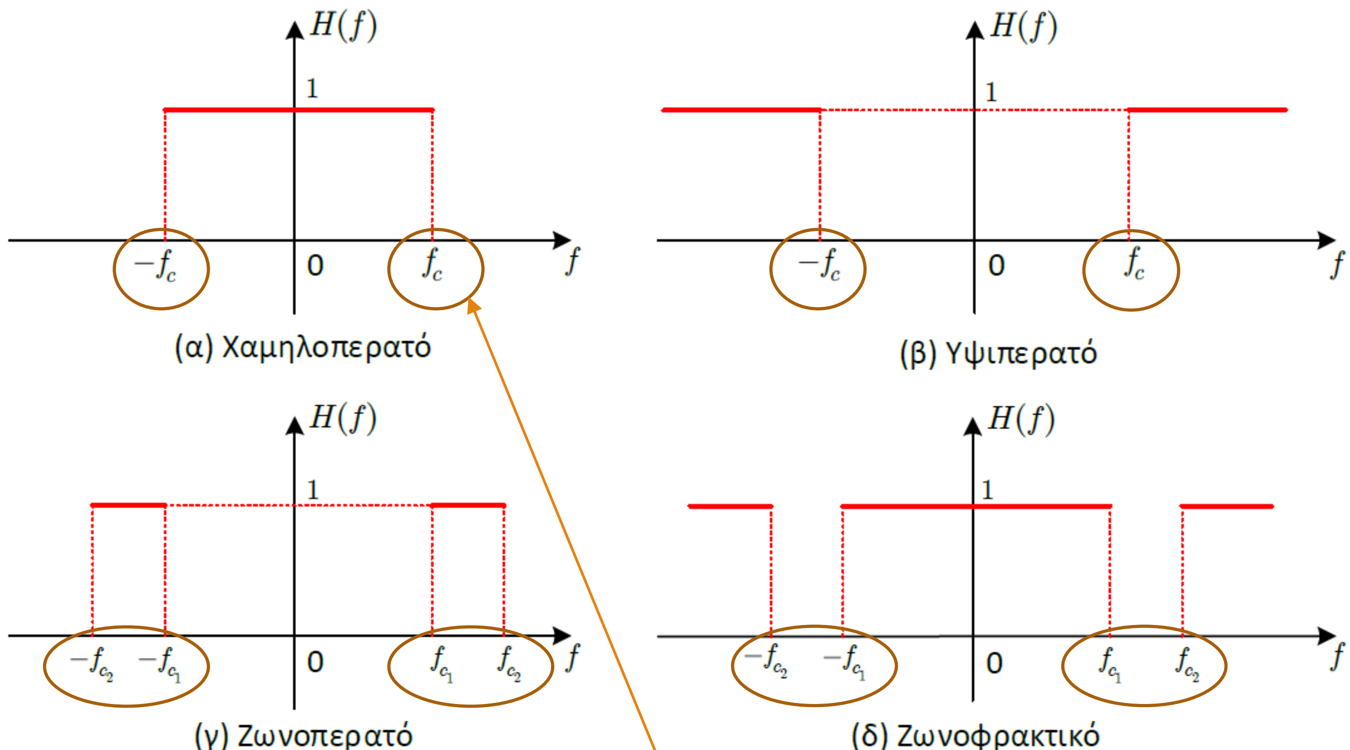
$$\lambda_i < 0 \ \text{, αν } \lambda_i \in \Re$$

- Άρα όταν το ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές!

- Όμως αυτό θα σημαίνει ότι **υπάρχει** (μέσω του ορισμού) και ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης! ☺

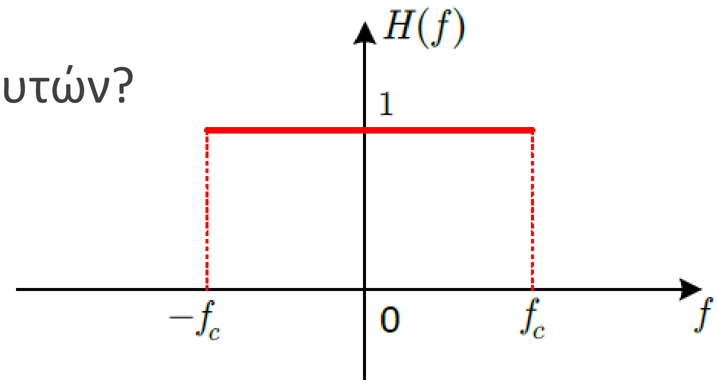
- Συνοψίζοντας: ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις μπορεί να γραφεί στο χώρο του Μετασχ. Fourier αν και μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές!
  - Θα εξετάσουμε μη αιτιατά συστήματα αργότερα

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
- Θα μελετήσουμε τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (μηδενικής φάσης)
  - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)
- Τέσσερις κατηγορίες
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο**
- **Υψιπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο**



Συχνότητα αποκοπής

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο



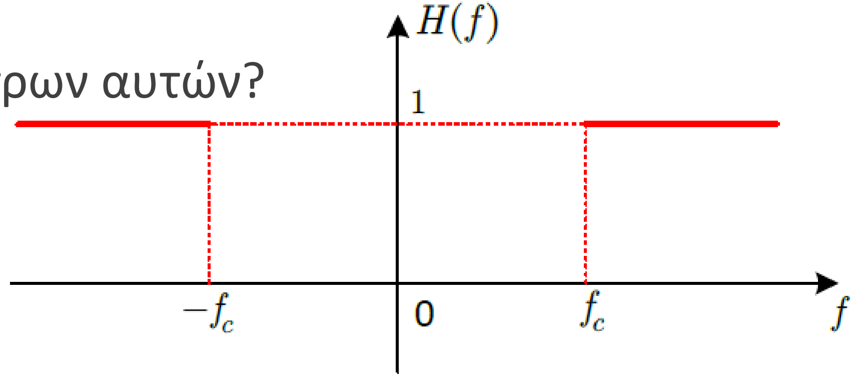
(α) Χαμηλοπερατό

$$h_{lp}(t) = F^{-1}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)\right\} = 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t)$$

Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το υψιπερατό φίλτρο



(β) Υψιπερατό

$$H_{hp}(f) = 1 - H_{lp}(f)$$

$$h_{hp}(t) = \delta(t) - h_{lp}(t) = \delta(t) - 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t)$$

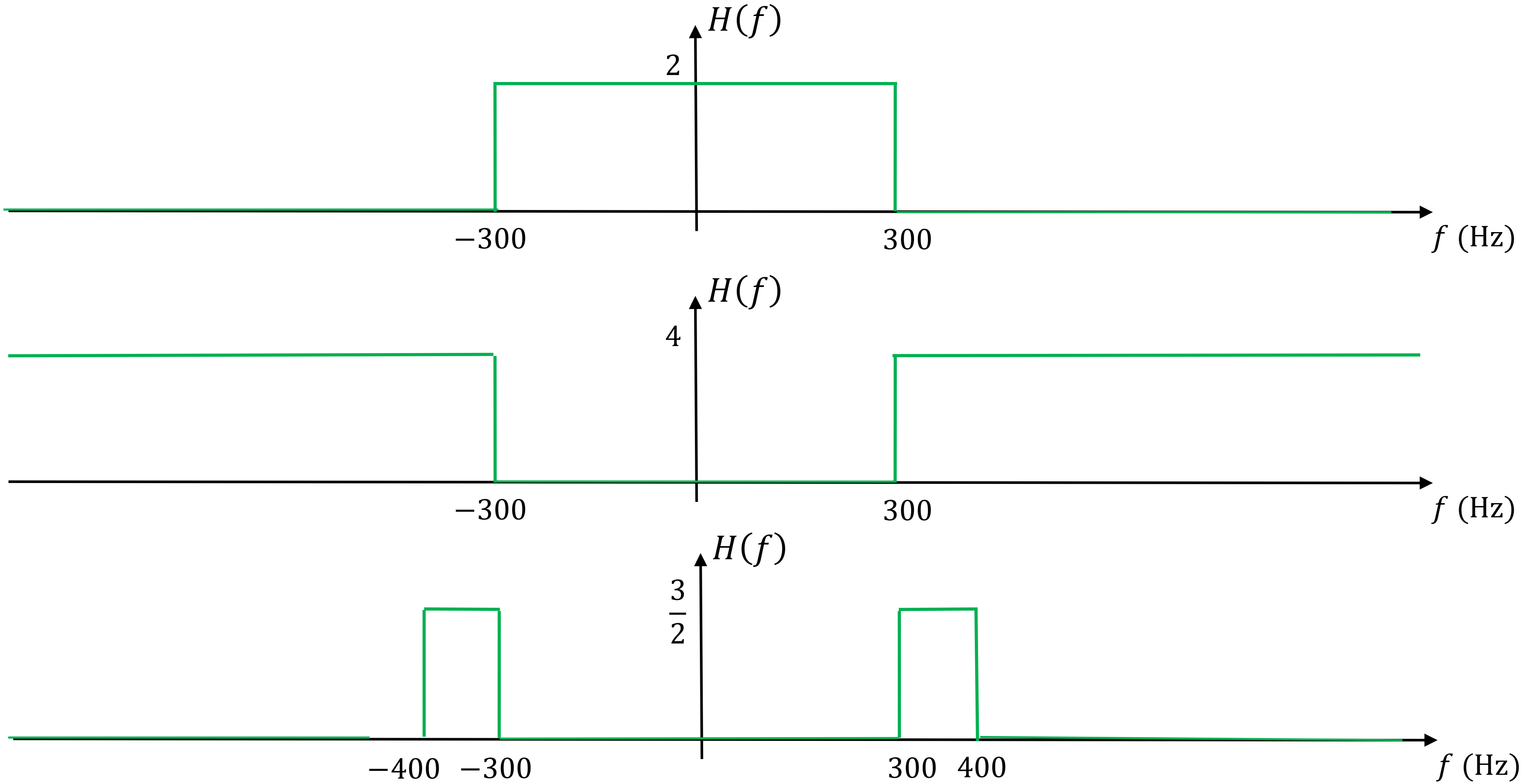
Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**:

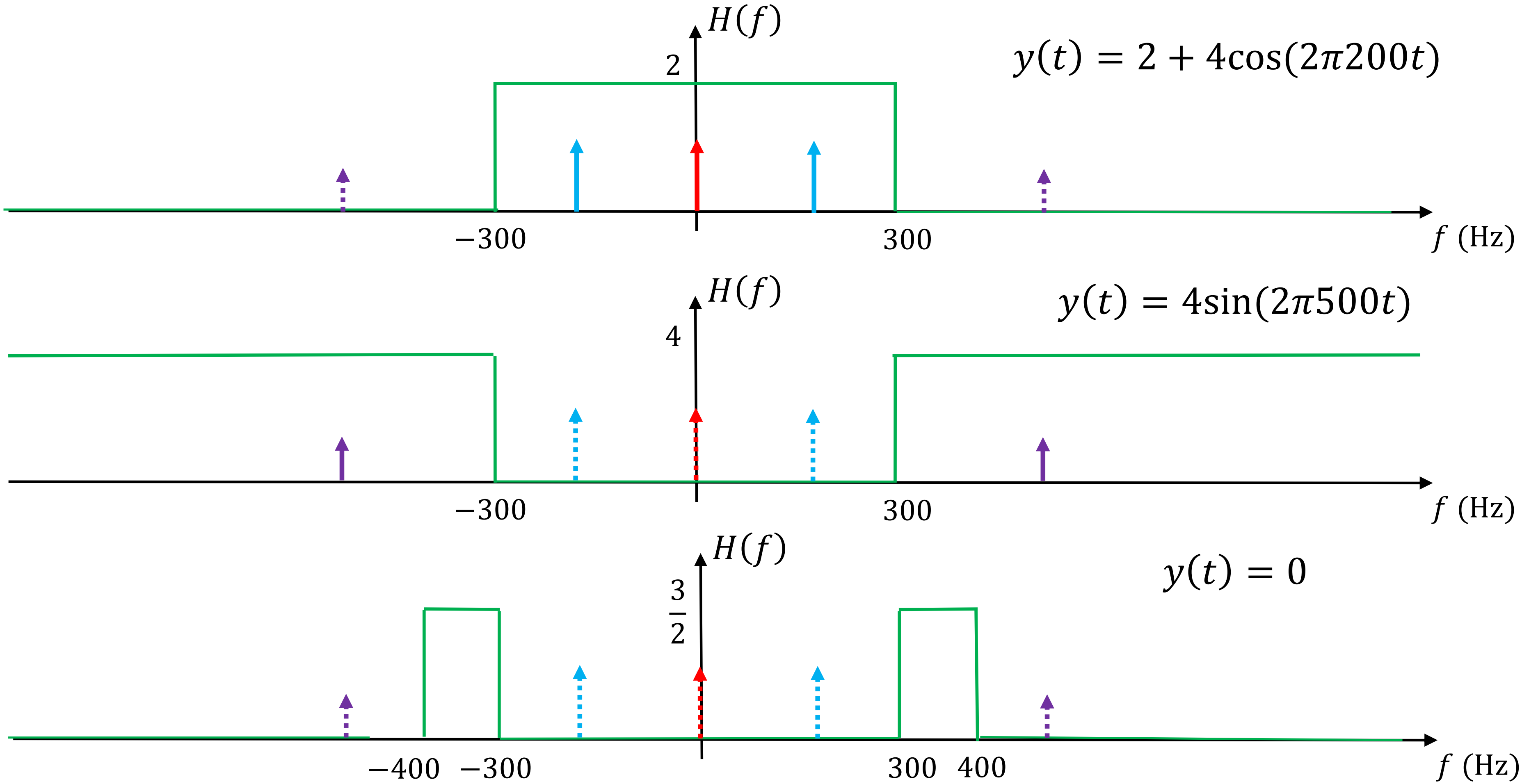
○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας?



• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Παράδειγμα:

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$



• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Παράδειγμα – 1ος τρόπος:

Παρ' όλο που το πρόβλημα λύνεται "γραφικά" πολύ εύκολα, ας δώσουμε μια μαθηματική προσέγγιση. Πρώτα, αναγνωρίζουμε ότι το σήμα εισόδου είναι <u>περιοδικό</u> και γράφουμε τα τρία φίλτρα ως:

$$H_1(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 300 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$H_2(f) = \begin{cases} 4, & |f| > 300 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$H_3(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 300 < |f| < 400 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\measuredangle H_i(f) = 0$

Όλα είναι μηδενικής φάσης, άρα δεν "πειράζουμε" τη φάση της εισόδου

Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

- Παράδειγμα – 1ος τρόπος:

- Η έξοδος θα είναι $y_1(t) = 1 \cdot H_1(0) + 2|H_1(200)| \cdot \cos(2\pi 200t) + |H_1(500)| \cdot \sin(2\pi 500t)$

και $H_1(0) = 2$, $H_1(200) = 2$, $H_1(500) = 0$, άρα

$$y_1(t) = 2 + 4\cos(2\pi 200t)$$

- Η έξοδος θα είναι $y_2(t) = 1 \cdot H_2(0) + 2|H_2(200)| \cdot \cos(2\pi 200t) + |H_2(500)| \cdot \sin(2\pi 500t)$

και $H_2(0) = 0$, $H_2(200) = 0$, $H_2(500) = 4$, άρα

$$y_2(t) = 4\sin(2\pi 500t)$$

- Όμοια, για το $H_3(f)$, $H_3(0) = H_3(200) = H_3(500) = 0$, άρα

$$y_3(t) = 0$$

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Παράδειγμα – 2ος τρόπος:

Το πρόβλημα λύνεται και με Μετασχ. Fourier, μέσω του θεωρήματος της συνέλιξης: $Y(f) = H(f)X(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} y(t)$

Είναι

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$

και $H_i(f)$ τα φίλτρα όπως περιγράψαμε πριν. Ας δούμε το 1ο μόνο.

• $Y_1(f) = X(f)H_1(f)$

$$= \cancel{H_1(0)}^{\,2}\,\delta(f) + \cancel{H_1(200)}^{\,2}\,\delta(f-200) + \cancel{H_1(-200)}^{\,2}\,\delta(f+200)$$

$$+ \cancel{H_1(500)}^{\,0}\,\frac{1}{2j}\delta(f-500) - \cancel{H_1(-500)}^{\,0}\,\frac{1}{2j}\delta(f+500)$$

$$= 2\delta(f) + 2\delta(f-200) + 2\delta(f+200) \quad \text{και άρα}$$

$$y_1(t) = 2 + 2e^{j2\pi 200t} + 2e^{-j2\pi 200t} = 2 + 4\cos(2\pi 200t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ