ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η

- Μετασχηματισμός Fourier

- **Προς το μετασχ. Fourier…**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

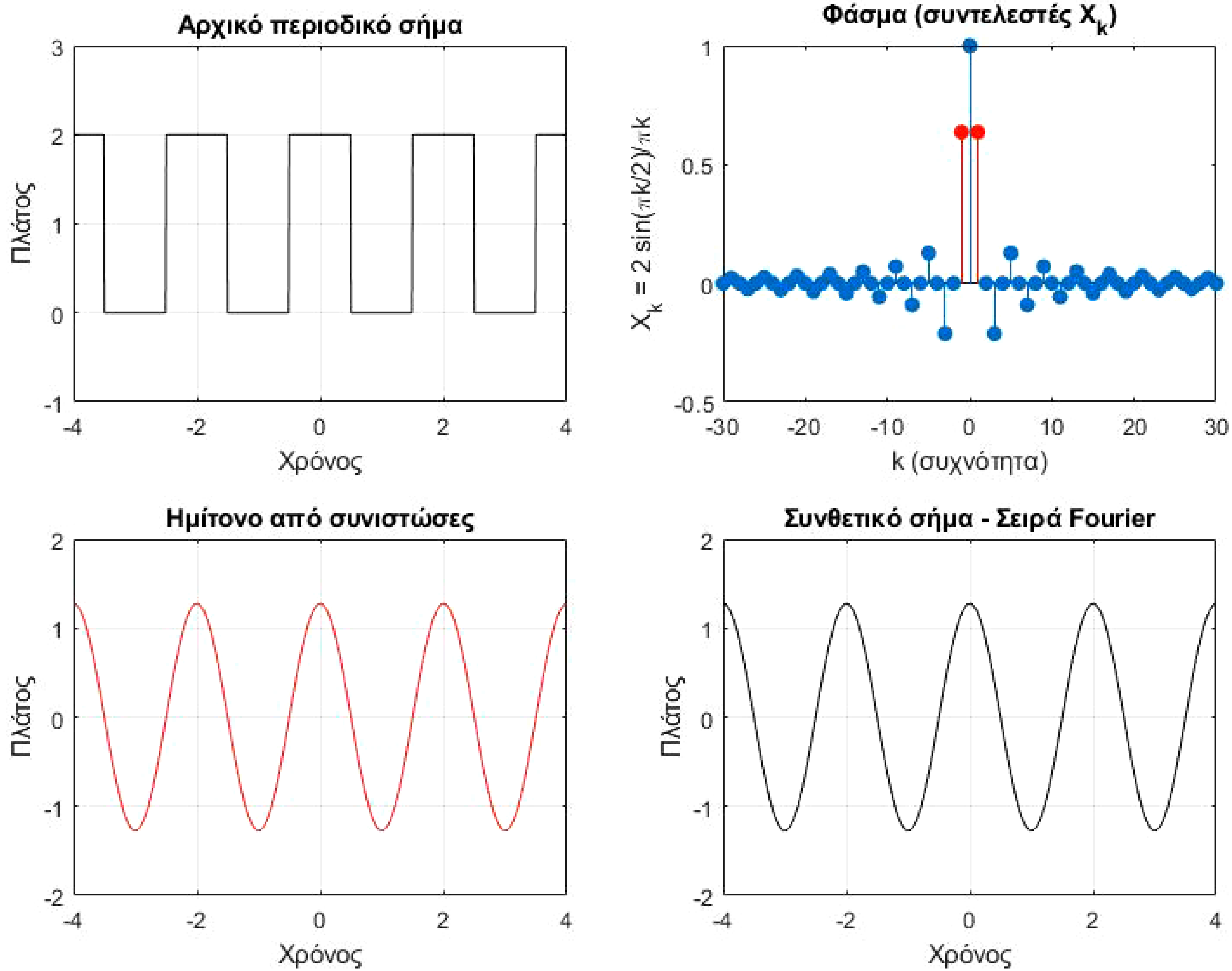
η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \rightarrow +\infty$?

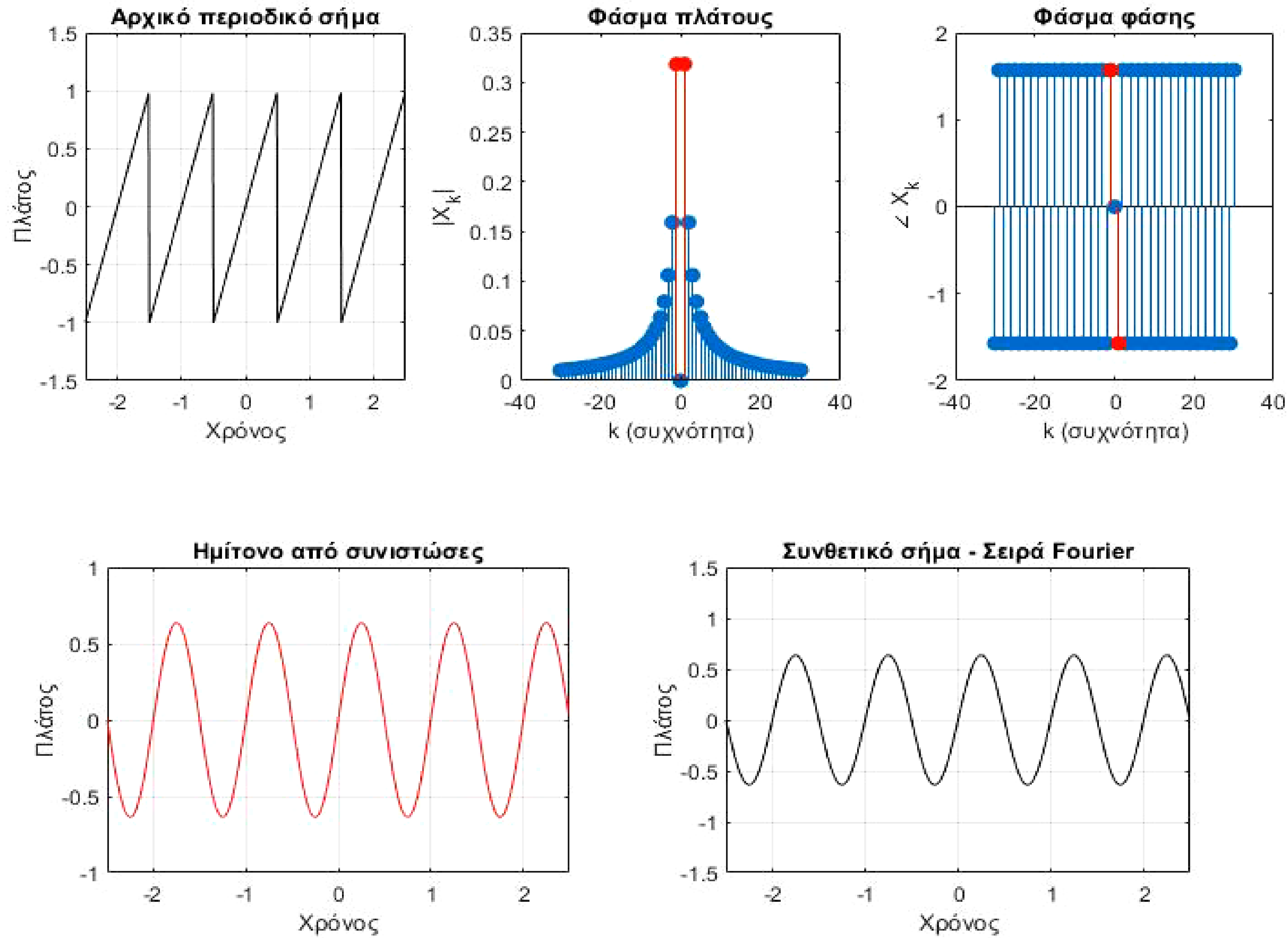
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό

- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

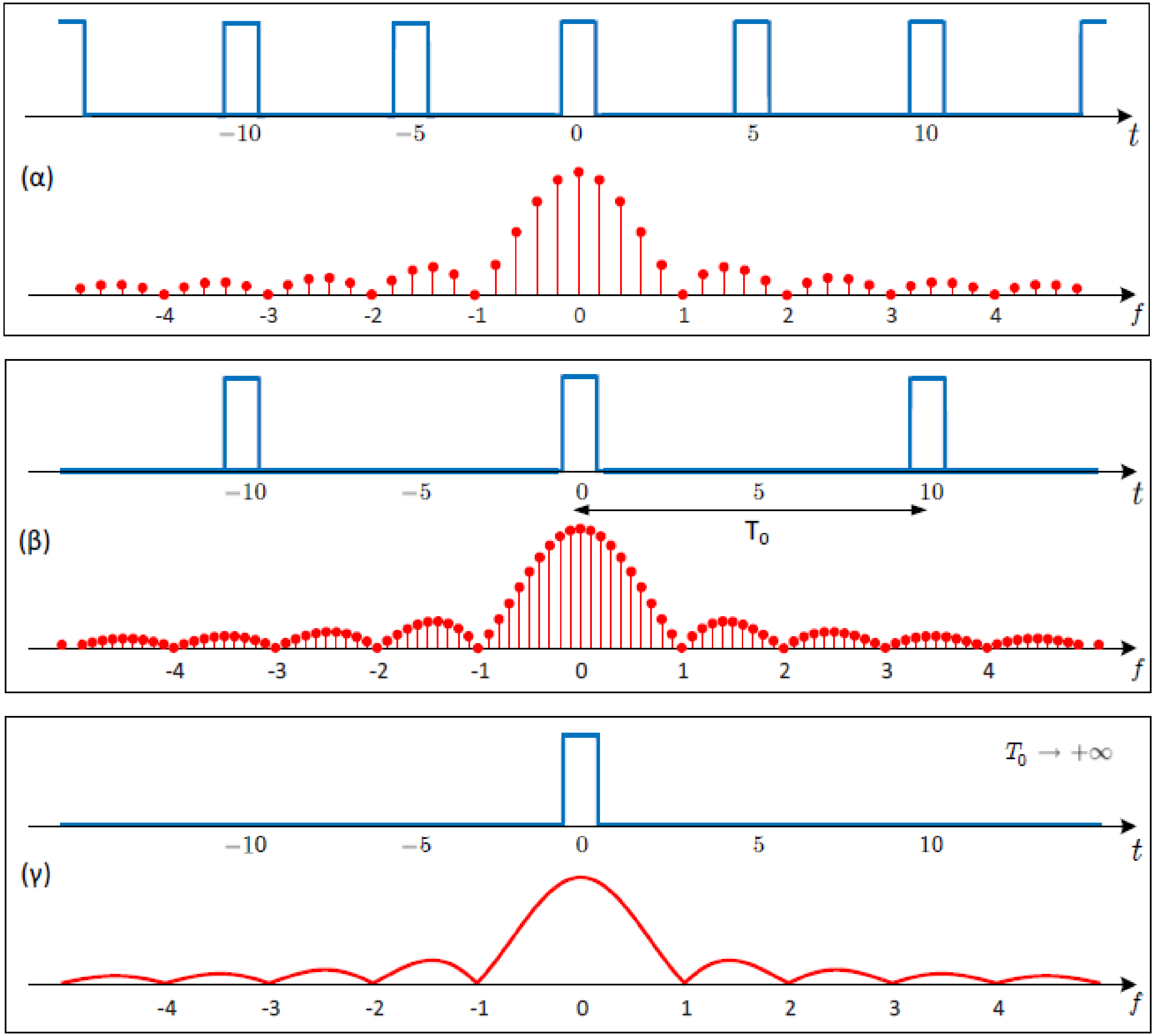
- **Προς το μετασχ. Fourier…** (video – check webpage)



- **Προς το μετασχ. Fourier…** (video – check webpage)



- **Προς το μετασχ. Fourier…**



- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)}^{X_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Όταν $T_0 \to +\infty$, τότε $\frac{1}{T_0} \to df$ και $k f_0 \to f$

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Συντελεστές Fourier:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
  - Έχει μέτρο και φάση
  - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Είναι (λόγω Euler):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

Άρτιο πραγματικό μέρος

Περιττό φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

Συντ. Fourier:
$$X_k = X_{-k}^*$$

- Μέτρο:

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση:

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι για **πραγματικά** σήματα

$$X(f) = X(-f)^*$$

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι **άρτια** συνάρτηση του f, ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι **περιττή** συνάρτηση του f

- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**

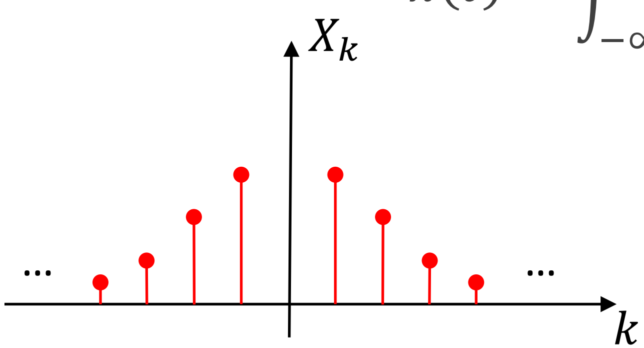
- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα

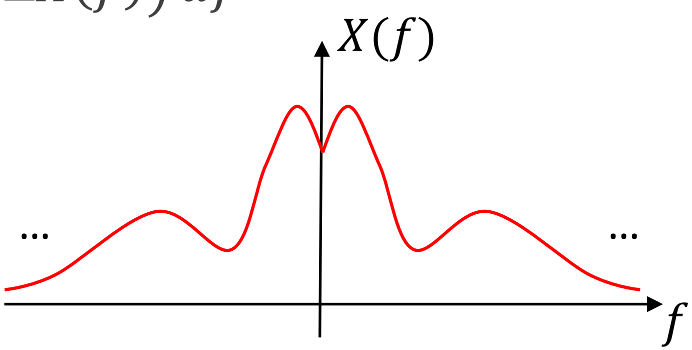
- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα (πραγματικό) **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα *μετρήσιμων* διακριτών συχνοτήτων kf_0, με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις φ_k:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Ο μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα (πραγματικό) **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* άθροισμα ***κάθε*** συχνότητας f, με πλάτη $2|X(f)|df$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|X(f)| \cos\big(2\pi f t + \angle X(f)\big)\, df$$





- **Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη**
- Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

  - Το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
  - Δεν είναι αναγκαία συνθήκη

- Επίσης αν

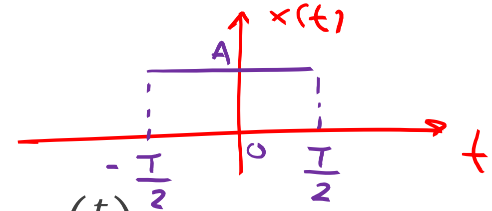
$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετασχ. Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$



- **Παράδειγμα:**

  ○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j2\pi f t} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f}\left(e^{-j\cancel{2}\pi f \frac{T}{\cancel{2}}} - e^{+j\cancel{2}\pi f \frac{T}{\cancel{2}}} \right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

$$= A\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$\mathrm{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

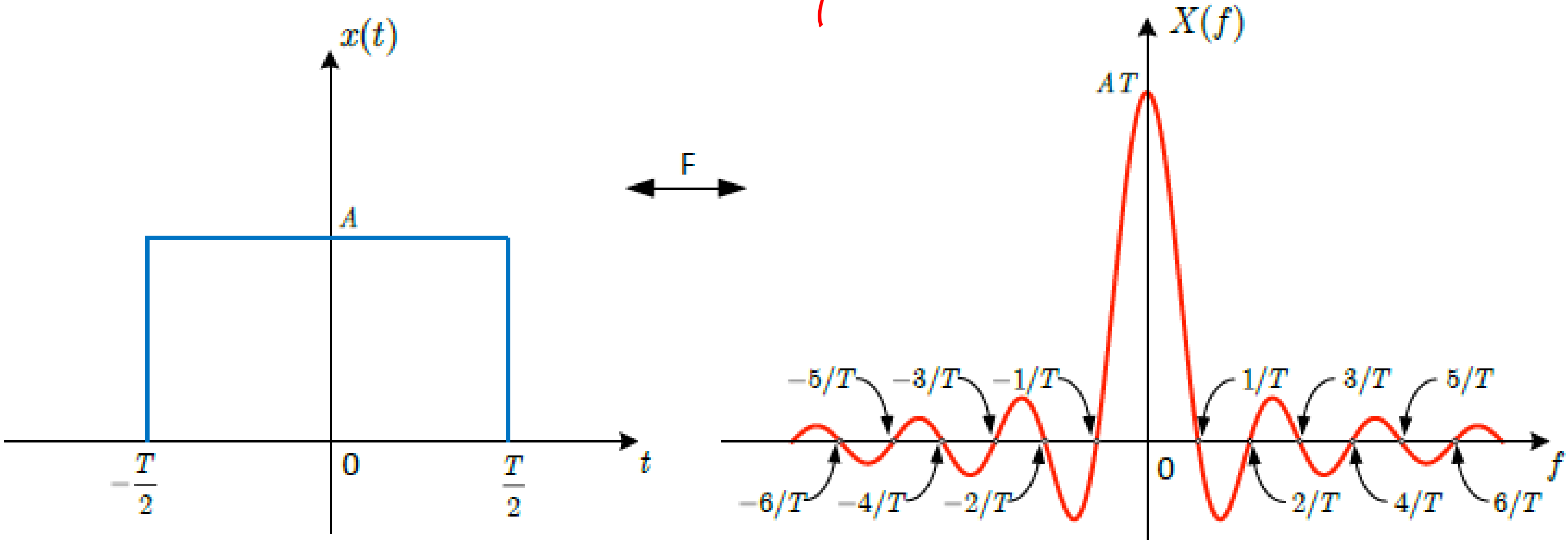
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Άρα

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Σημεία μηδενισμού: $\sin(\pi f T) = 0 \iff \cancel{\pi} f T = k\cancel{\pi}, \; k \in \mathbb{Z}$

άρα $f_k = \frac{k}{T}, \; k \in \mathbb{Z} - \{0\}$



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Μέτρο $|X(f)|$. $|X(f)| = |AT\,\mathrm{sinc}(fT)| = |AT|\,|\mathrm{sinc}(fT)|$

Φάση $\measuredangle X(f)$ ή $\varphi(f)$. $\varphi(f) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\dfrac{0}{X_R(f)}$

$= k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \begin{cases} -\pi, & k=-1 \\ 0, & k=0 \\ \pi, & k=1 \end{cases} \Leftarrow$

Σύμβαση: αν $X(f) > 0,\ \varphi(f) = 0$

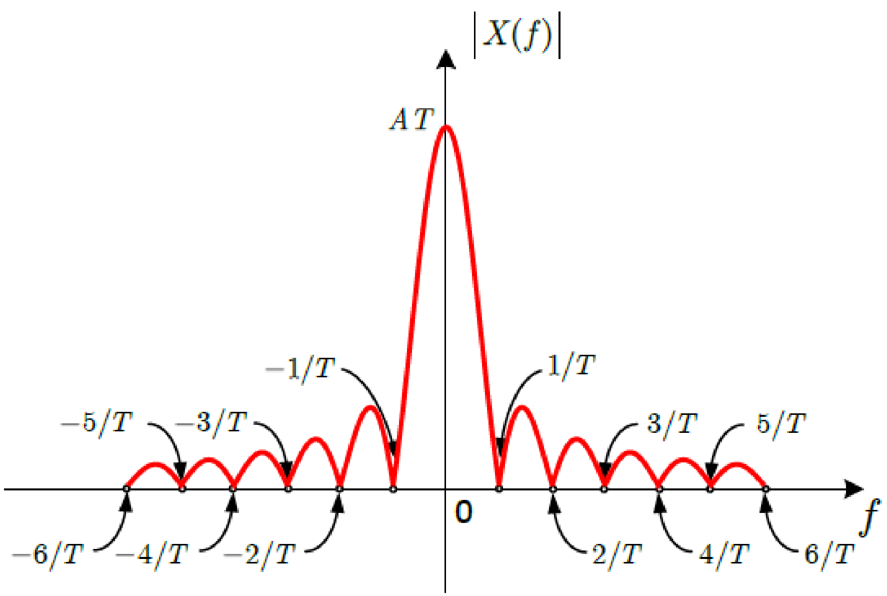
$X(f) < 0,\ f > 0 \Rightarrow \varphi(f) = \pi$

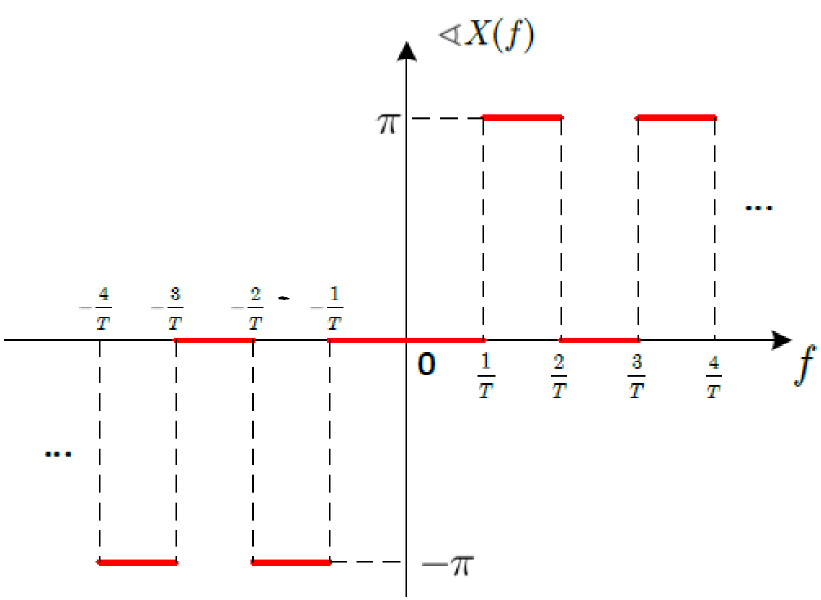
$X(f) < 0,\ f < 0 \Rightarrow \varphi(f) = -\pi$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$|X(f)| = AT\left|\mathrm{sinc}(fT)\right|$$

$$\sphericalangle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$

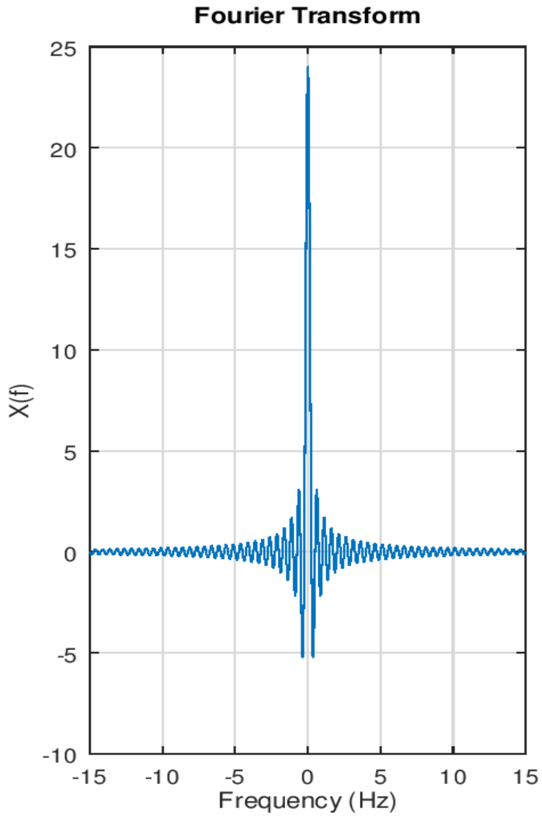


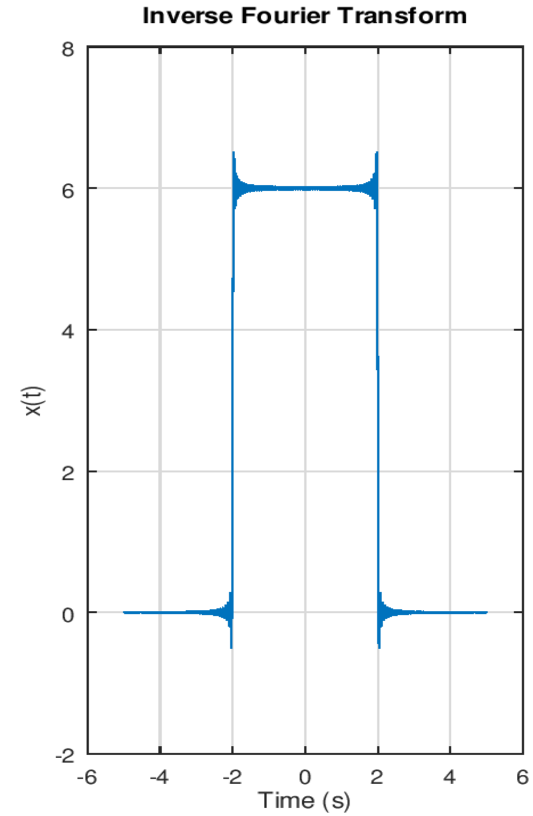


- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```
% Πλάτος παλμού
A = 6;
% Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4;
% Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01;
% Άξονας του χρόνου
t = -5:dt:5;
% Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01;
% Άξονας συχνοτήτων (από -15 ως 15 Hz)
f = -15:df:15;
% Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*sinc(f*T);
% Αρχικοποίηση
x = zeros(size(t));
% Βρόχος επανάληψης
for i = 1:length(f)
  % Αντίστροφος μετασχ. Fourier
  x = x + X(i) .* exp(j*2*pi*f(i)*t);
end
% Κλιμάκωση (για λόγους που θα δείτε στη σειρά ασκήσεων :) )
x = df*x;
```

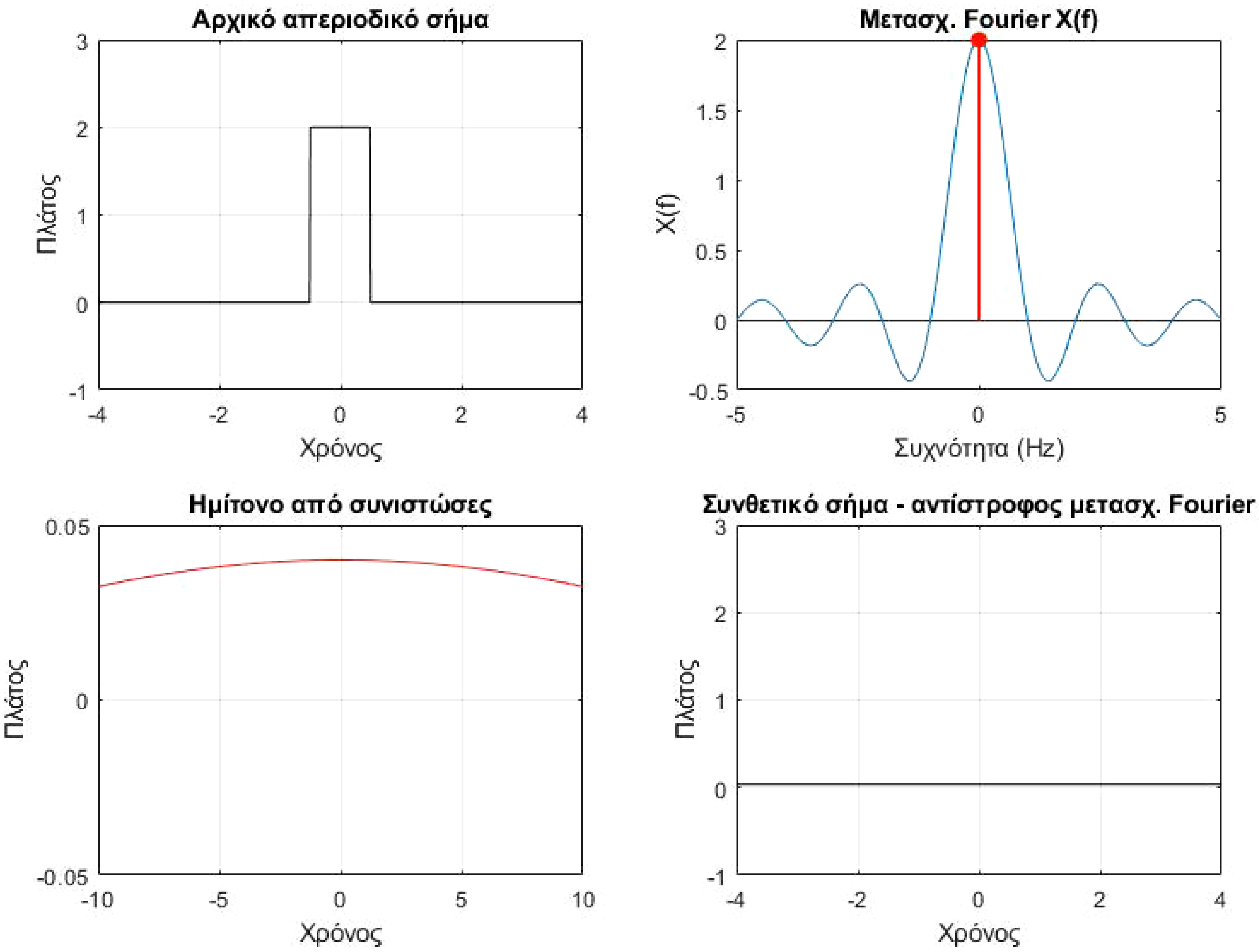
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$





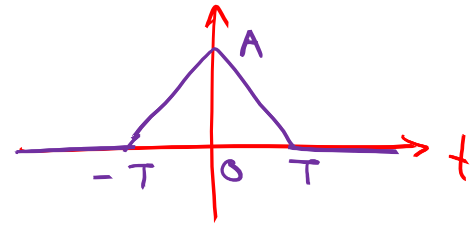

```
% Γράφημα
subplot(121);
plot(f, X);
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('X(f)');
title('Fourier Transform');
subplot(122);
plot(t, x);
xlabel('Time (s)');
ylabel('x(t)');
title('Inverse Fourier Transform');
```

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα – video (check webpage)



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



$$= \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t|<T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-T}^{T} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = \ldots$$

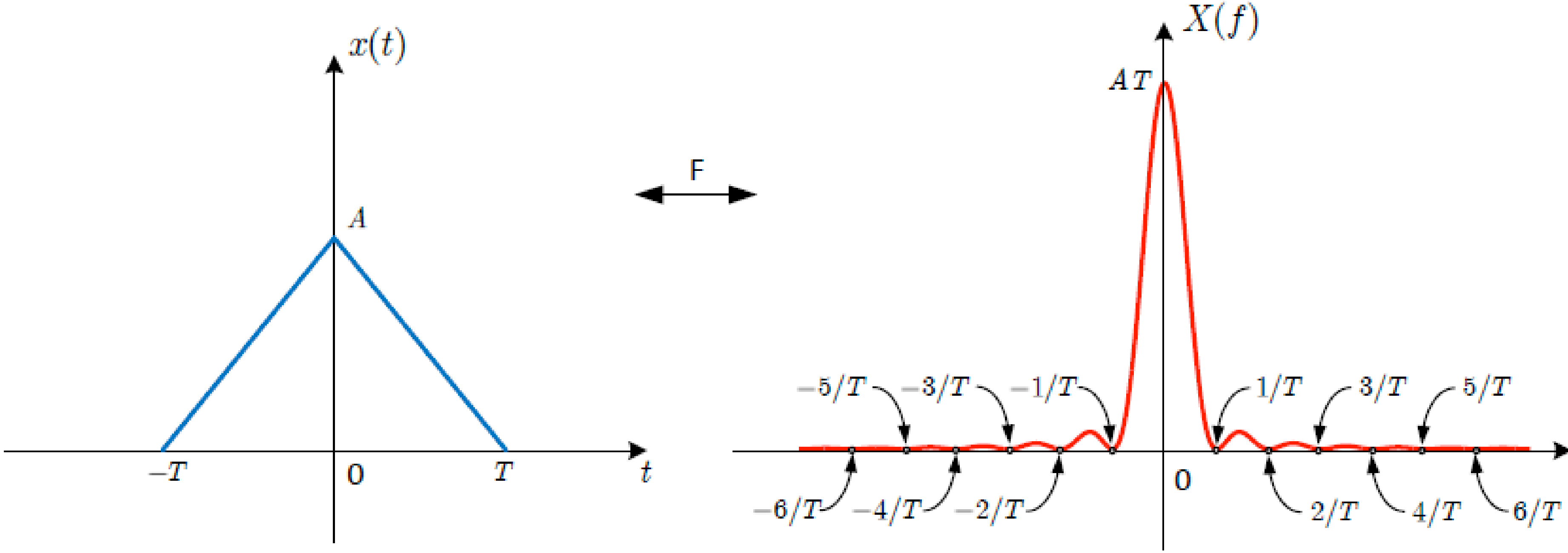
$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

$$A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

Σημεία μηδενισμού: $f_k = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$



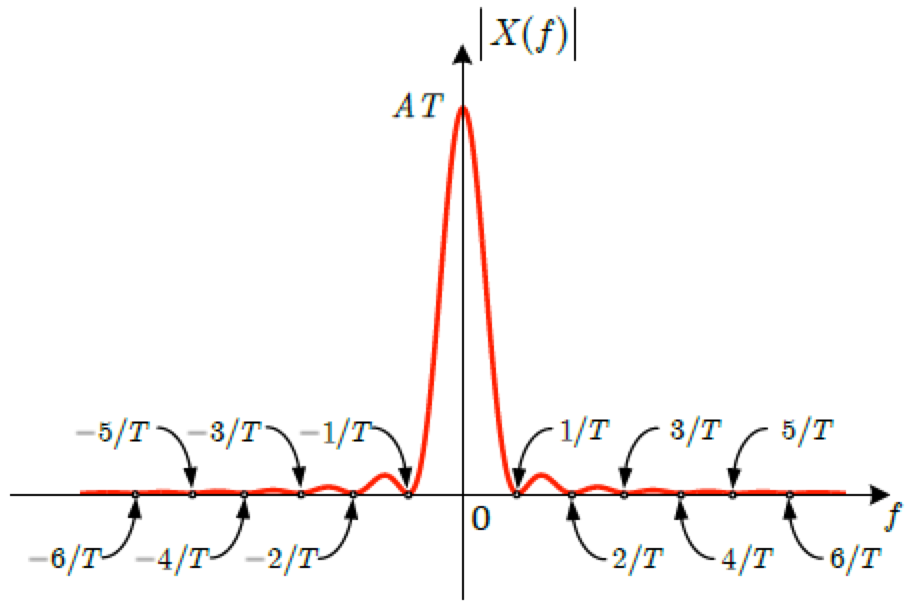
- **Μετασχηματισμός Fourier**

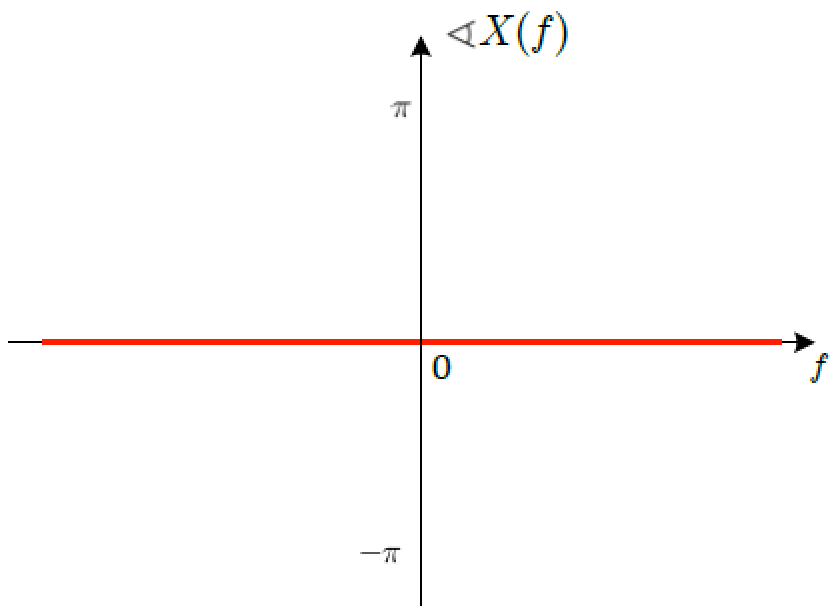
ΕΒΑ

- Παράδειγμα:

$$|X(f)| = X(f) = AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$\measuredangle X(f) = 0 \quad \forall f$$



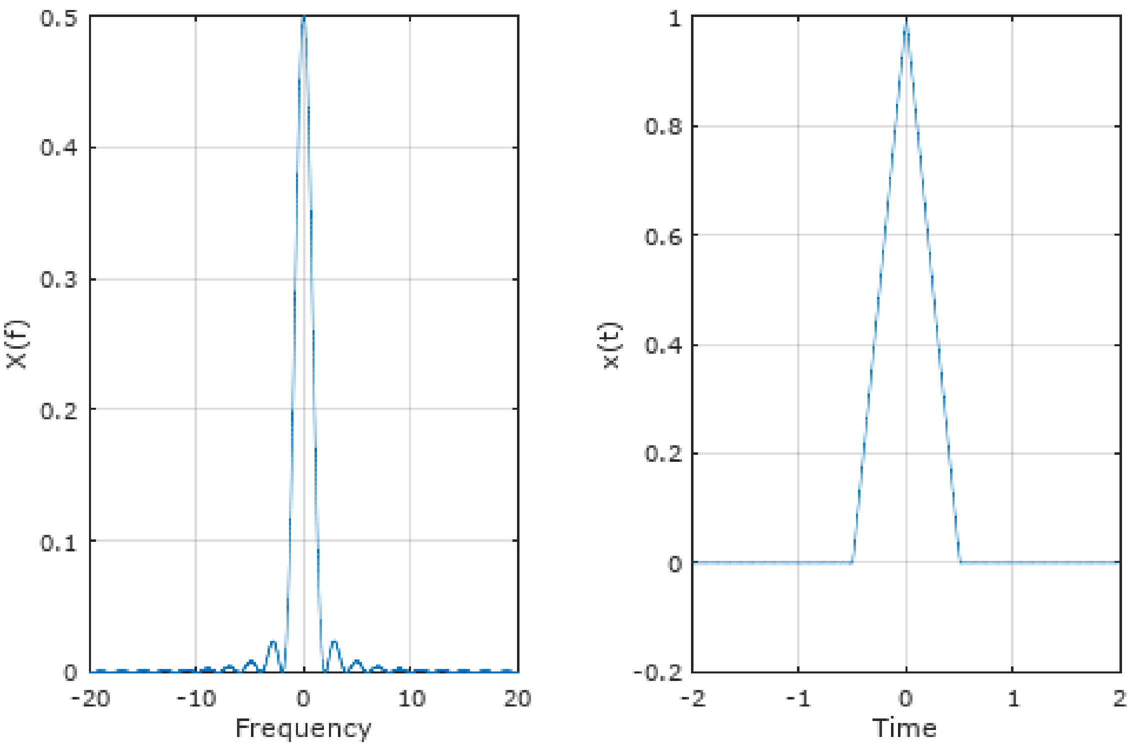


- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

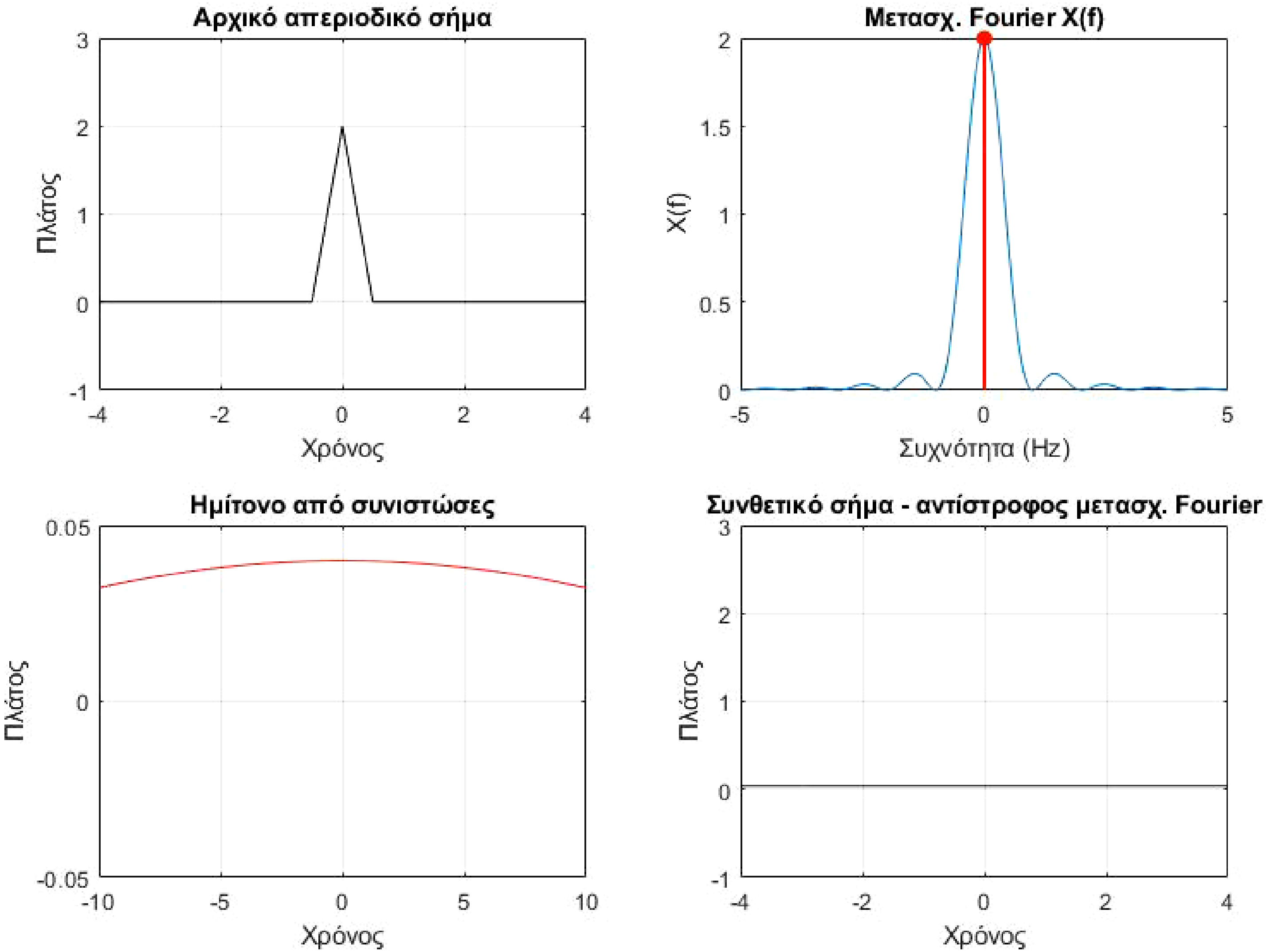
```
% Fourier Transform
% Triangular pulse

% Time axis
dt = 0.01;
t = -2:dt:2;
% Frequency axis
df = 0.01;
f = -20:df:20;
% Parameters
A = 1;
T = 0.5;
% Fourier Transform
X = A*T*sinc(f*T).^2;
subplot(121); plot(f, X); grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('X(f)');
% Initialization
x = zeros(size(t));
% Synthesis of x(t) from X(f)
for i=1:length(f)
  x = x + X(i)*exp(j*2*pi*f(i)*t);
end
% Normalization
x = df*x;
% Plots
subplot(122); plot(t, x);
grid; xlabel('Time');
ylabel('x(t)');
```

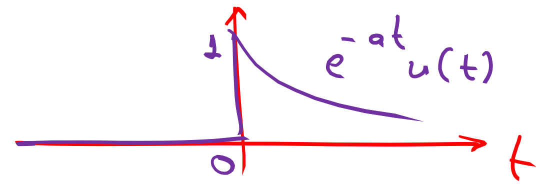


- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – video (check webpage)



- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t), \;\; a > 0$

Είναι $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt$ $\qquad u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big]_{0}^{+\infty}$

$= -\frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right)$

Με τι ισούται το $\lim_{t \to +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}$?

- **Μετασχηματισμός Fourier**

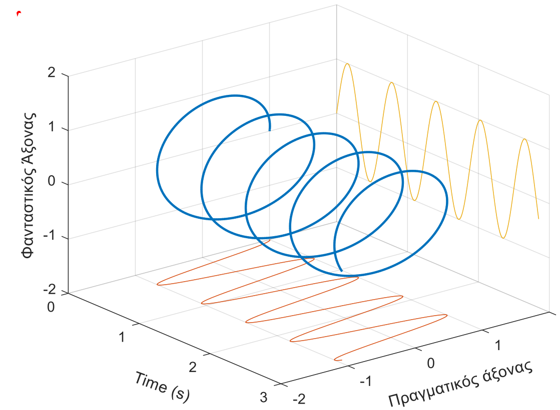
- Παράδειγμα:

Δεν μπορούμε να πούμε ότι $\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$ αφού $\underline{a+j2\pi f}>0$

γιατί οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη!

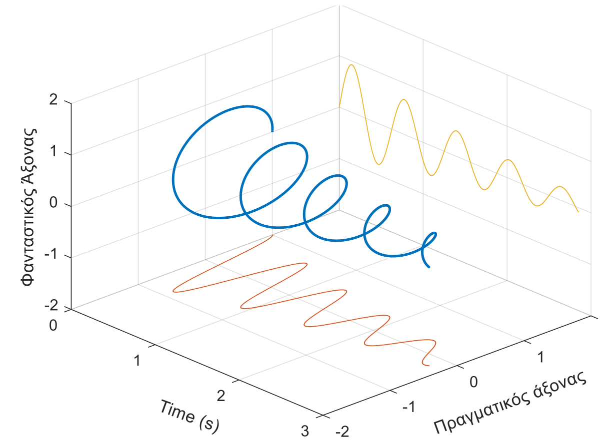
Όμως ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{-j2\pi ft}$

έχει τη μορφή:



Αν πολλαπλασιάζαμε κάθε τιμή της με

e^{-at}, $a>0$, τότε θα πάρουμε:



Ξεκάθαρα, το όριο της στο $+\infty$ παίρνει

την τιμή 0.

Οπότε $$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$$zz^* = |z|^2$$

- Παράδειγμα:

Οπότε,

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{(a+j2\pi f)^*}{(a+j2\pi f)(a+j2\pi f)^*} = \frac{a-j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} = \frac{a-j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2}$$

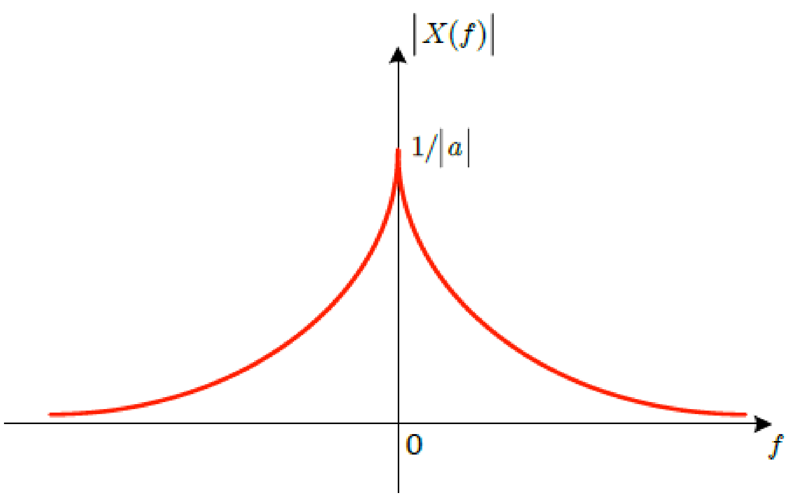
$$= \underbrace{\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{Re\{X(f)\}} + j\underbrace{\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{Im\{X(f)\}} = Re\{X(f)\} + j\,Im\{X(f)\}$$

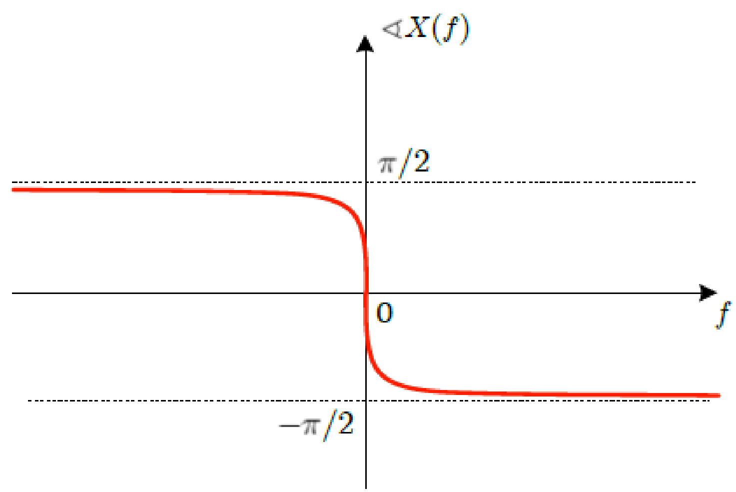
- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα: Μέτρο $|X(f)|$: $|X(f)| = \left|\dfrac{1}{a+j2\pi f}\right| = \dfrac{1}{|a+j2\pi f|}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}.$$

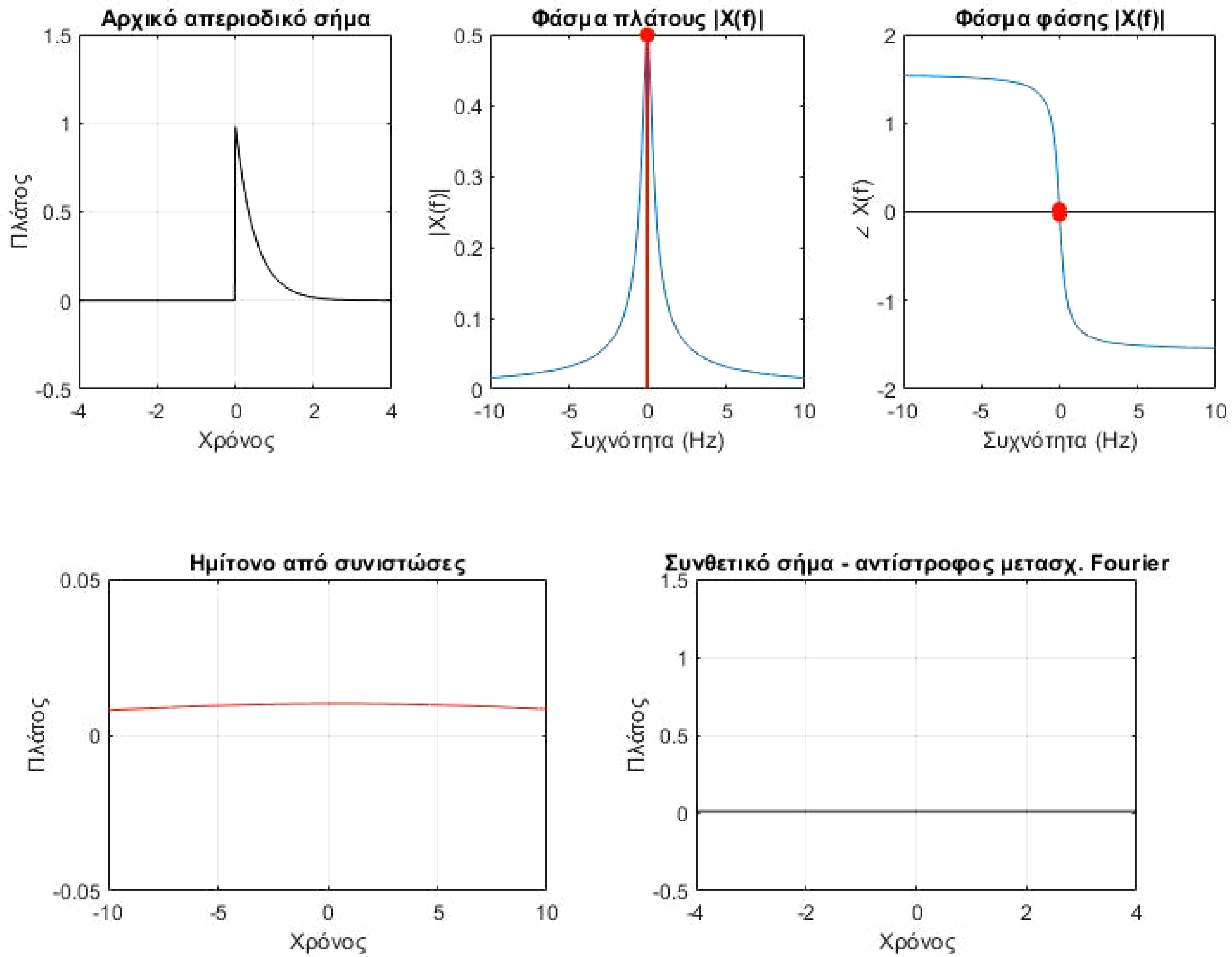
Φάση $\sphericalangle X(f) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{-2\pi f}{\cancel{a^2+4\pi^2 f^2}}}{\dfrac{a}{\cancel{a^2+4\pi^2 f^2}}} =$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-2\pi f}{a}\right).$$





- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα - video (check webpage)



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

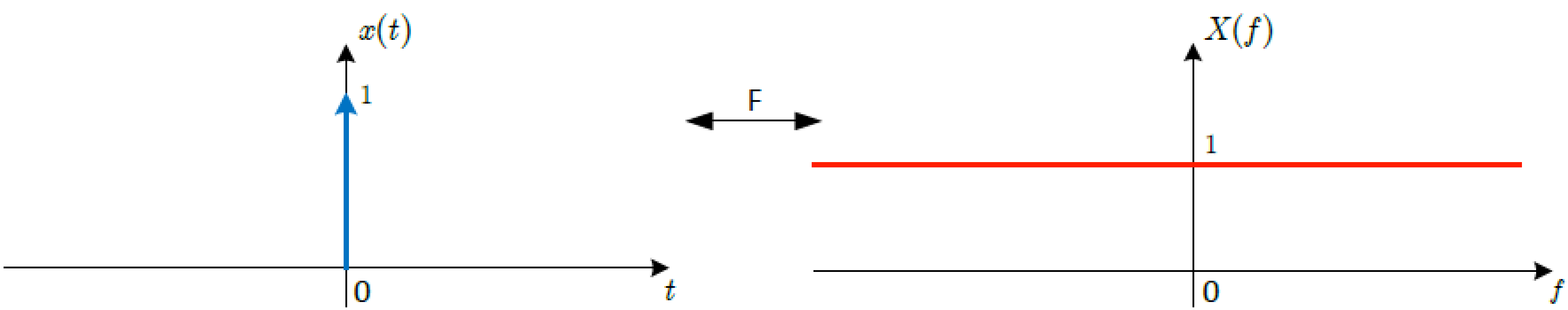
  - Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underline{e^{-j2\pi ft}}\Big|_{t=0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot 1 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \iff X(f) = 1 \quad \forall f$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

Ε.ΒΑ

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$

Είναι

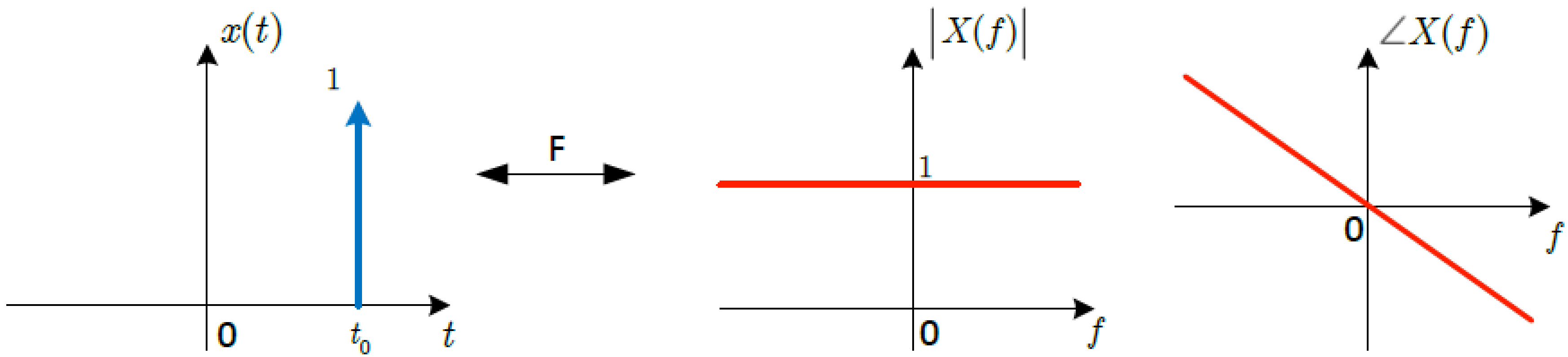
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t_0}\, dt$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t-t_0)\, dt}_{1} = e^{-j2\pi f t_0}$$

Άρα $\delta(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0}$

$$|X(f)| = |e^{-j2\pi f t_0}| = 1$$

$$\measuredangle X(f) = -2\pi t_0 f$$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ