ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Σειρές Fourier

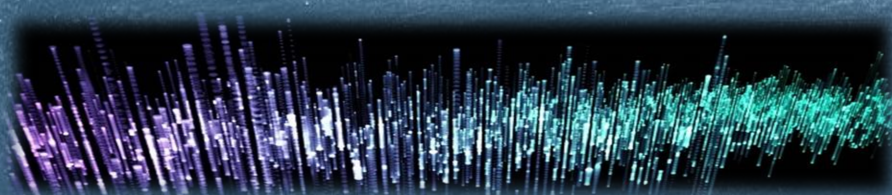
Τι περιέχει το HY215?

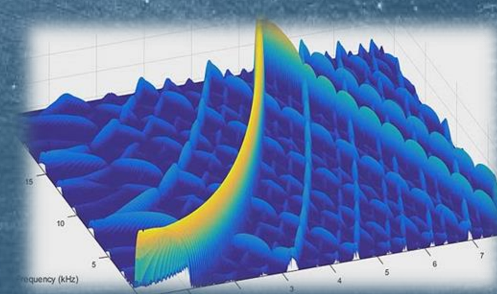
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες





- **Σειρές Fourier**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t+T_0) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt} = \frac{1}{T_0}\underline{\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\rangle}$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει και μιγαδικά περιοδικά σήματα

- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Ας το δείξουμε

$$\boxed{x(t) = \sum_k X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}} \Rightarrow \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi \ell f_0 t} dt = \int_{T_0} \sum_k X_k \cdot e^{j2\pi (k-\ell) f_0 t} dt$$

$$\Rightarrow \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi \ell f_0 t} dt = \sum_k X_k \underbrace{\int_{T_0} e^{j2\pi (k-\ell) f_0 t} dt}_{\begin{cases} T_0 & k=\ell \\ 0 & k\neq \ell \end{cases}} = T_0 \cdot X_\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{\cancel{\ell}\,k} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi \cancel{\ell}\,k f_0 t} dt}$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \underbrace{\frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^*}_{X_{-k}} = X^*_{-k}$$

$$x(t) \to X_k$$

Αν $\boxed{x(t) \text{ πραγματικό}} \Rightarrow x(t) = x^*(t) \Rightarrow X_k = X^*_{-k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{X_{-k} = X^*_k}$$

- **Σειρές Fourier (εναλλακτική απόδειξη)**

$$X_{-k} = X_k^*$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \qquad (1)$$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \qquad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

- **Σειρές Fourier**

- Όταν το σήμα είναι πραγματικό, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

με $|X_k|$ το μέτρο και ϕ_k τη φάση του k −οστού συντελεστή

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$|X_k| \cdot e^{-j\phi}$ $\quad$ $|X_k| e^{j\phi}$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

- **Σειρές Fourier**

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

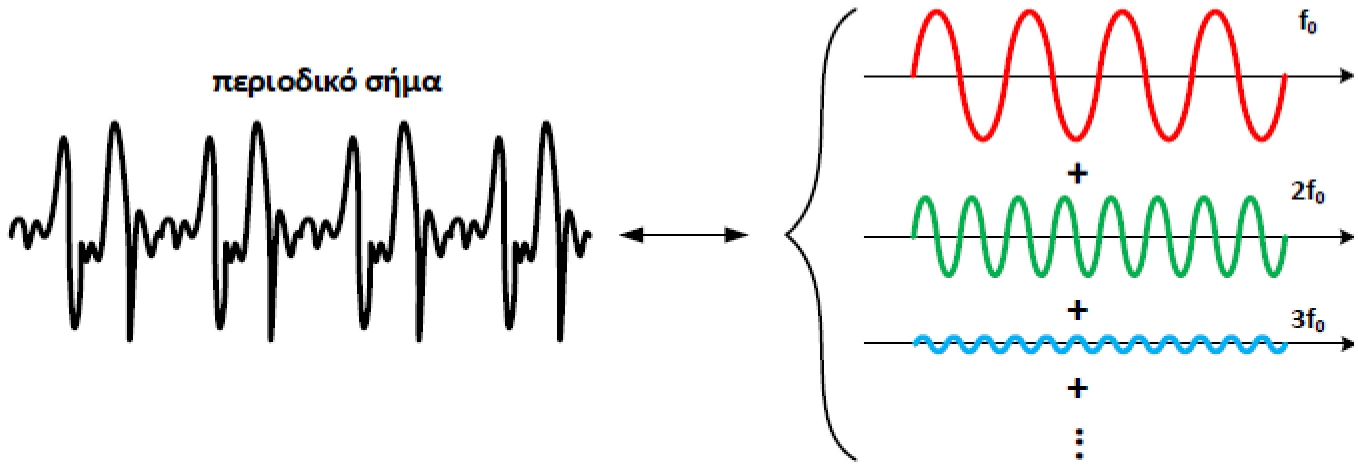
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[e^{-j2\pi k f_0 t - j\phi_k} + e^{j2\pi k f_0 t + j\phi_k} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- **Προσοχή:** η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα
  - … και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier

- **Σειρές Fourier**

- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες kf_0



- Εναλλακτικά, αναλύει ένα οποιοδήποτέ περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες kf_0

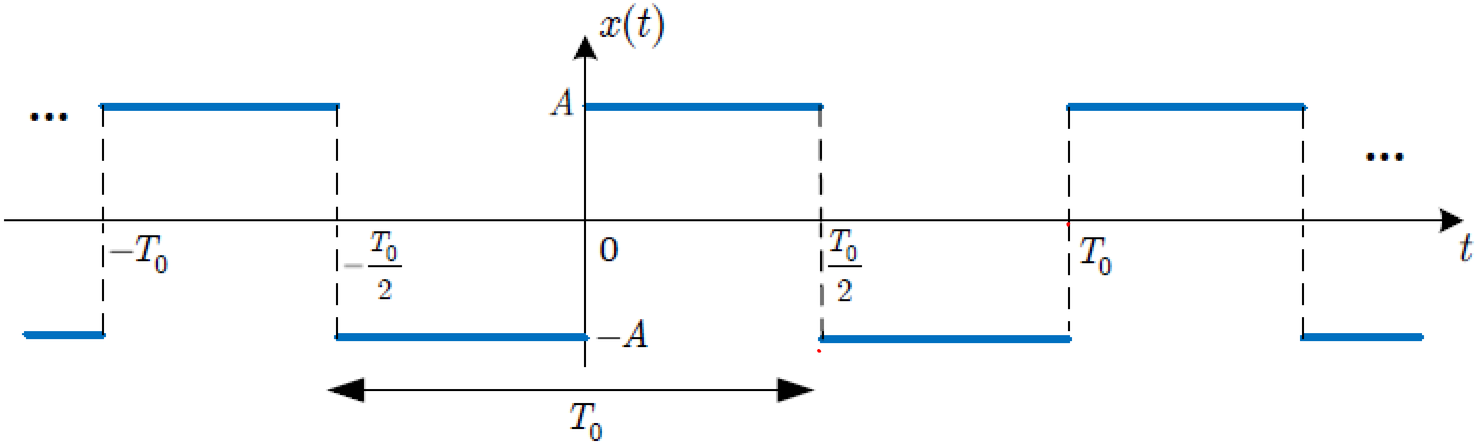
- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt$$

- **Παράδειγμα:**

  - Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$



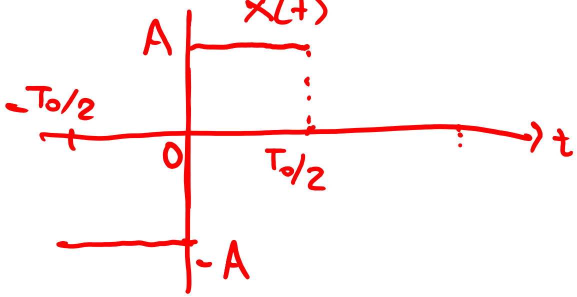
$$e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$$

$$e^{\pm j\pi k} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = (-1)^k$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

- Παράδειγμα:



$$e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$x(t) = \sum_k X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$$

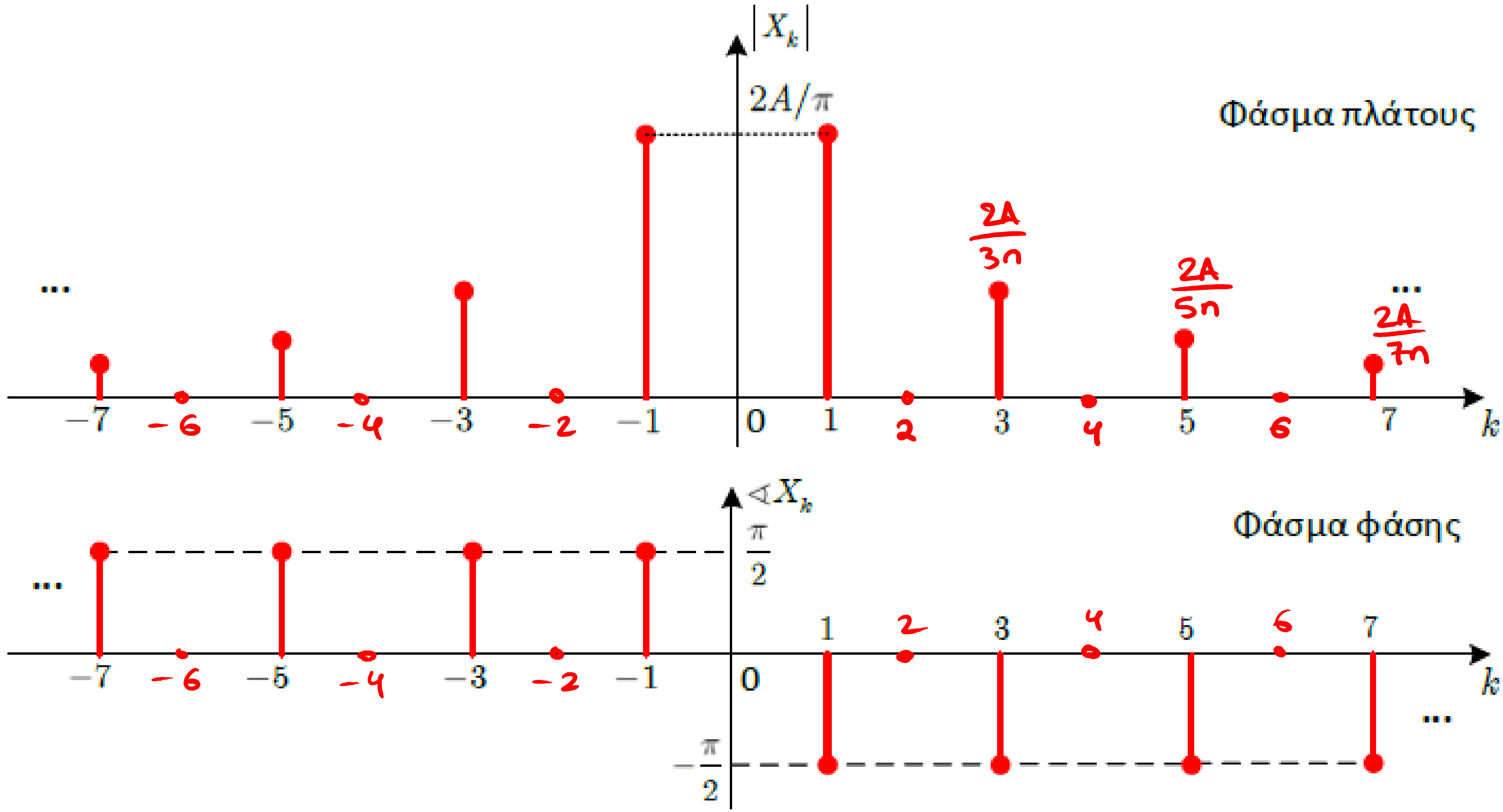
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0} (-A)\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt + \int_{0}^{T_0/2} A \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right] =$$

$$= \frac{A}{T_0}\left[-\int_{-T_0/2}^{0} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt + \int_{0}^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right] = -\frac{A}{T_0}\left[\int_{0}^{T_0/2} e^{j2\pi k f_0 t}\, dt - \int_{0}^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right] = -\frac{A}{T_0}\left[\int_{0}^{T_0/2}\left(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t}\right) dt\right] =$$

$$= -2j\frac{A}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} \sin(2\pi k f_0 t)\, dt = 2j\frac{A}{T_0}\frac{1}{2\pi k f_0}\cos(2\pi k f_0 t)\Big|_{0}^{T_0/2} =$$

$$= j\frac{A}{\pi k}\left(\cos\left(\cancel{2}\pi k \cancel{f_0}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}\right) - 1\right) = \frac{jA}{\pi k}\left(\cos(\pi k) - 1\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ -j\dfrac{2A}{\pi k} = \dfrac{2A}{\pi k}e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττ.} \end{cases}$$

- Παράδειγμα:



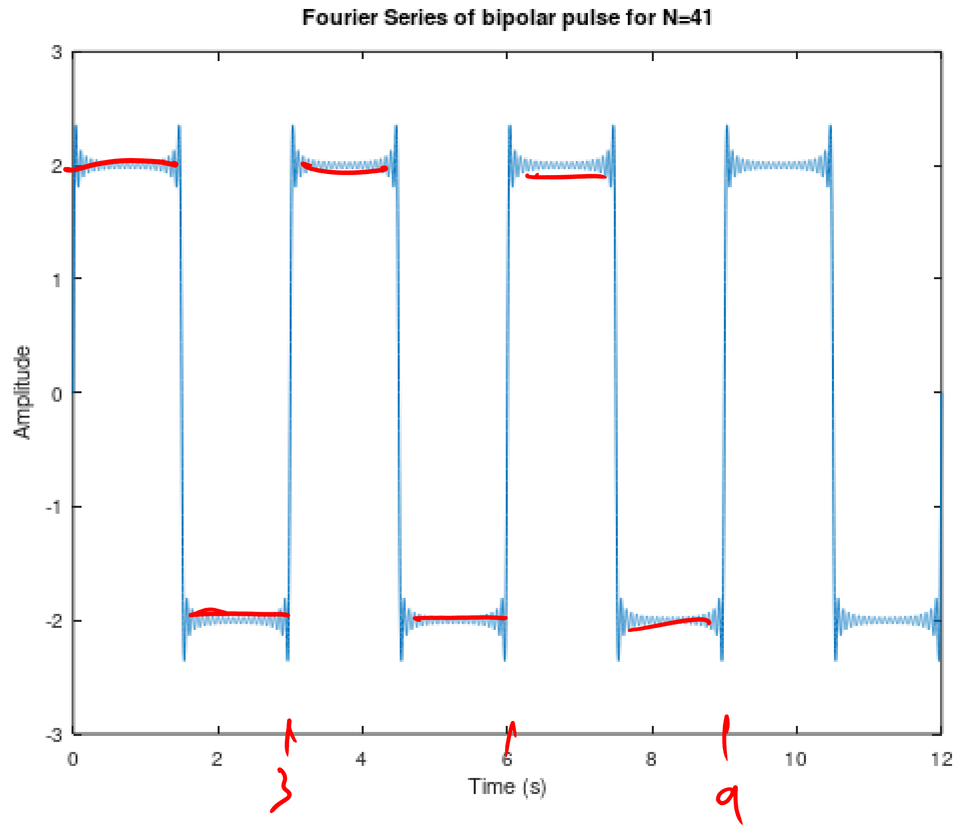
- Προτιμούμε να αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες kf_0» αντί ως ένα συνεχή άξονα του f, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
  - Χρησιμοποιούμε το πολλαπλάσιο k της θεμελιώδους συχνότητας για βαθμονόμηση του άξονα

- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

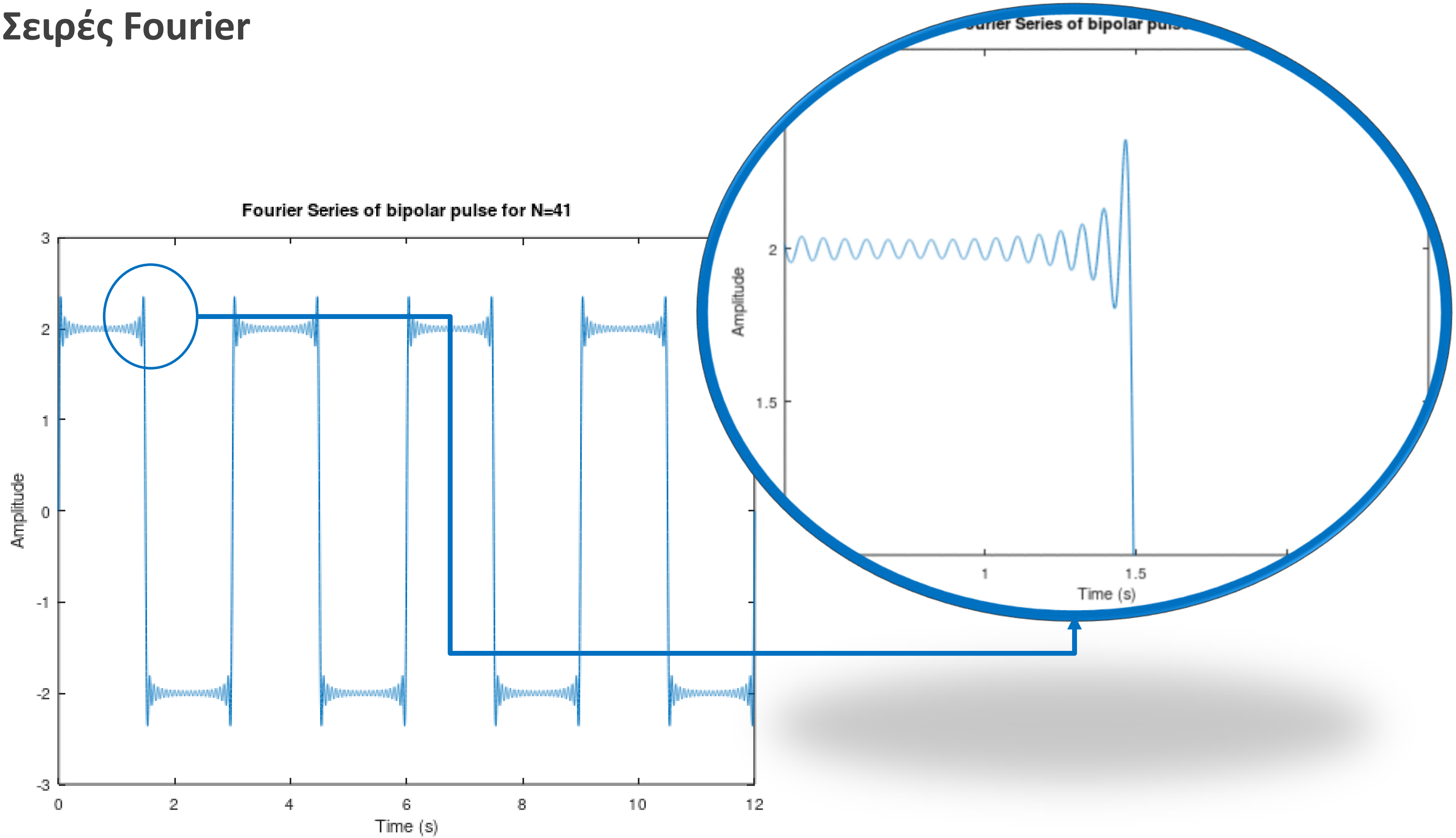
- **Σειρές Fourier**
- **MATLAB/Octave code**

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$

```
% Bipolar pulse - Fourier Series
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 41;
k = [-N:2:-1, 1:2:N];

% Time axis
dt = 0.001;
t = 0:dt:4*T0;

% Fourier Coefficients
Xk = 2*A./(pi*k).*exp(-j*pi/2);
X0 = 0;

% Synthesis equation
x = zeros(size(t));
for i=1:length(k)
  x = x + Xk(i)*exp(j*2*pi*k(i)*f0*t);
end

% Add X0 - not necessary here
x = x + X0;

% Plot
plot(t, real(x));
title('Fourier Series of bipolar pulse for N=41');
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```



• **Σειρές Fourier**



• **Φαινόμενο Gibbs**

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**
- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο…
  - …εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας t_0:

$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

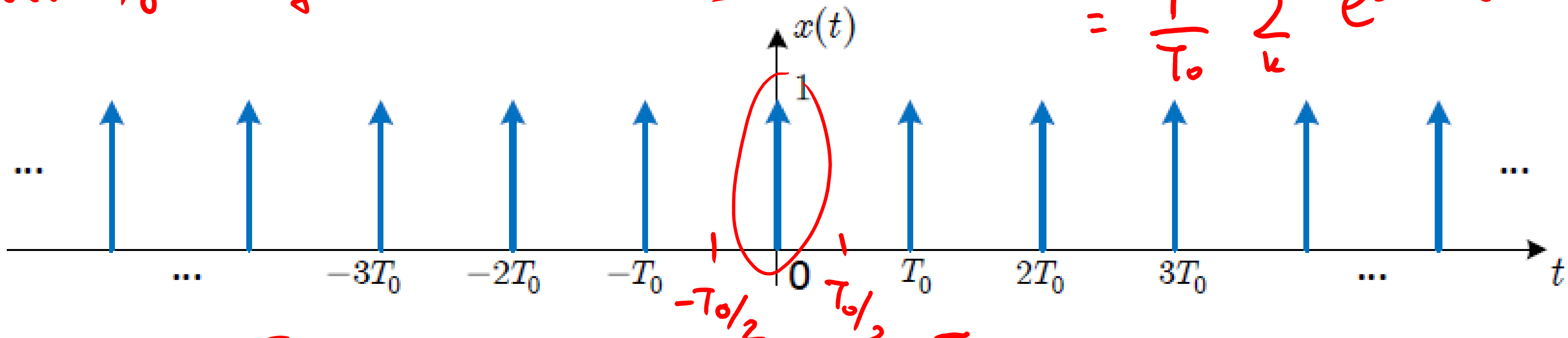
- **Παράδειγμα:**
  - Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t\pm t_0)f(t)dt = f(\mp t_0)$$

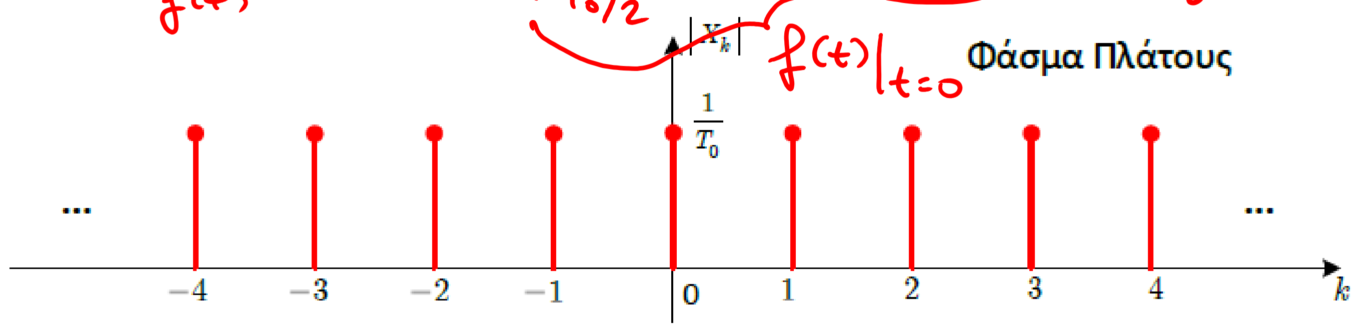
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{1}{T_0}\sum_k e^{j2\pi k f_0 t}$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t}}_{f(t)}dt = \frac{1}{T_0}\underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}dt}_{f(t)|_{t=0}} = \frac{1}{T_0}f(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}\quad \forall k$$



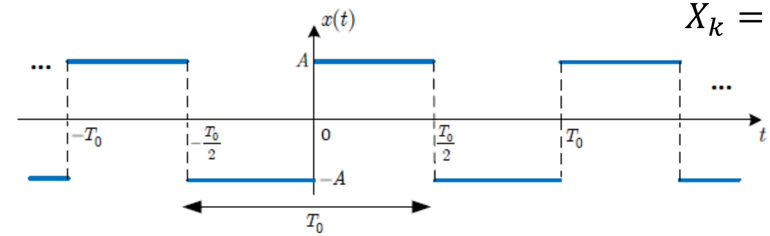
«Γνωστές» Σειρές Fourier

- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

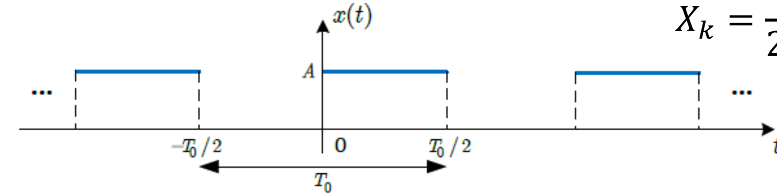
Συνήθεις Σειρές Fourier

Περιοδικό σήμα
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \; -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), \; -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$

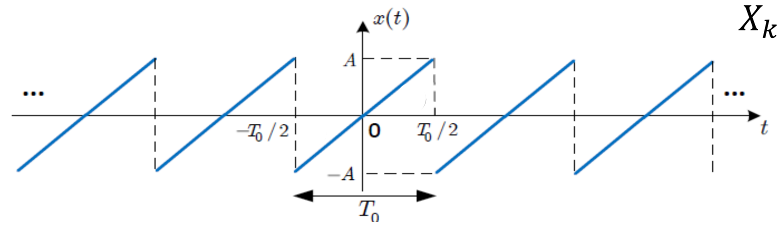
$$X_k = \frac{A}{k\pi}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



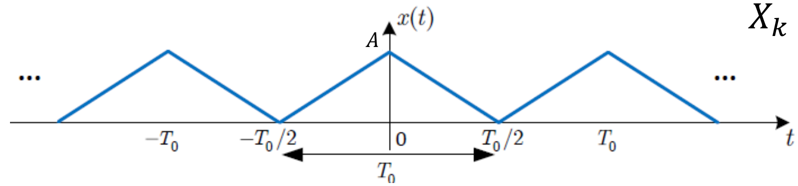
$$X_k = \frac{A}{2k\pi}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



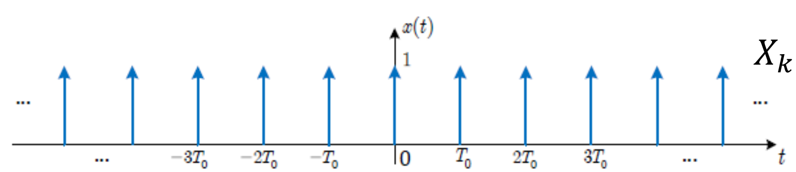
$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{2A}{k^2\pi^2}, k \; odd$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}, \forall \; k$$



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ $=$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$ $\sum_k \lvert X_k\rvert^2$

- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \|x(t)\|^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|X_k\|^2$

Parseval:

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_k |X_k|^2$$

$$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$x^*(t) = \sum_\ell X_\ell^* e^{-j2\pi \ell f_0 t}$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t)\, x(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_k \sum_\ell X_k X_\ell^* e^{j2\pi(k-\ell) f_0 t} dt =$$

$$= \sum_k \sum_\ell X_k X_\ell^* \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-\ell) f_0 t} dt}_{\begin{cases} T_0, & k=\ell \\ 0 & k\neq \ell \end{cases}} = \sum_k X_k X_k^* =$$

$$= \sum_k |X_k|^2$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$

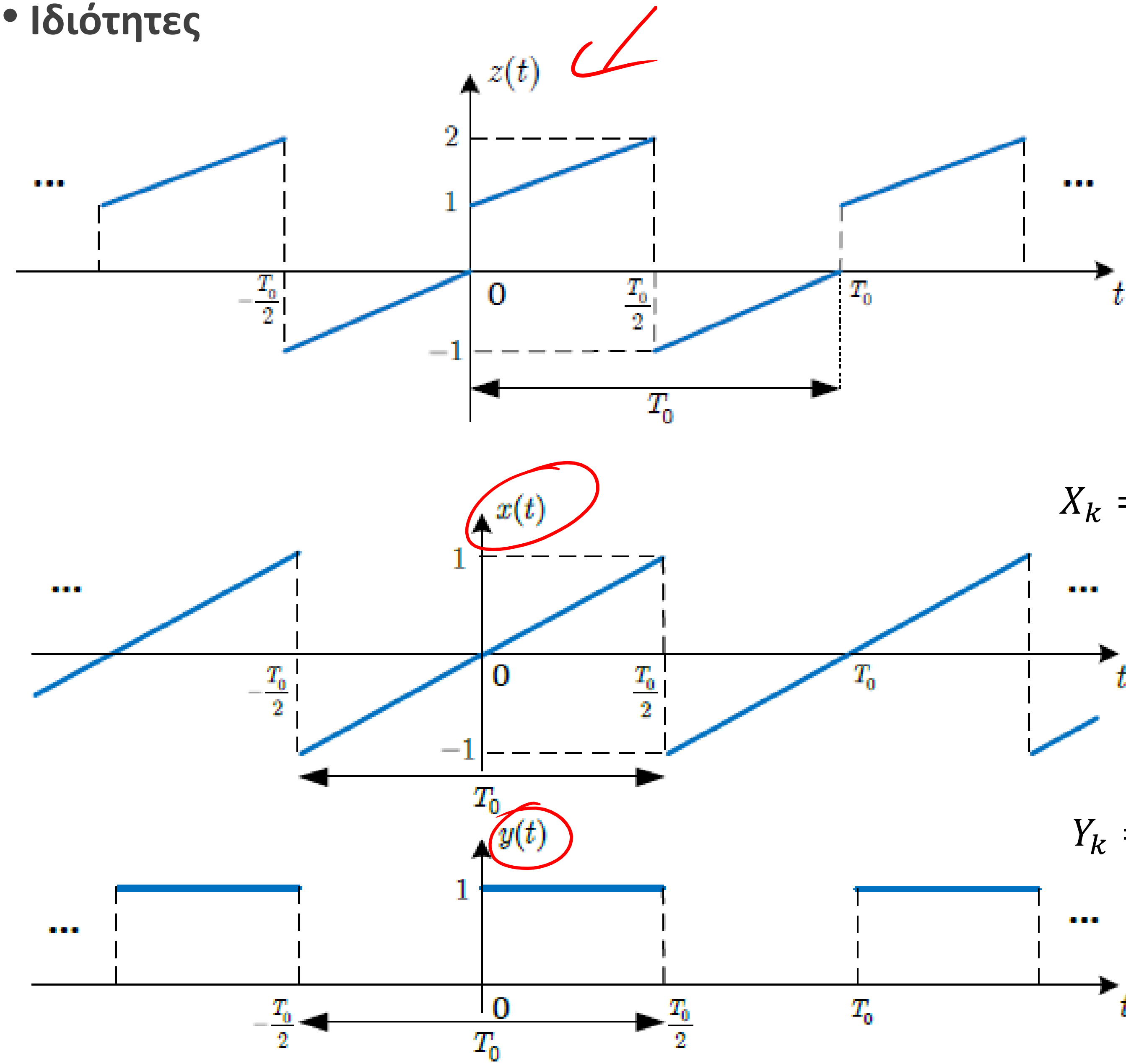
Απόδειξη: Έστω $z(t) = Ax(t) + By(t) \longrightarrow Z_k$?

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_0} A \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt}_{AX_k} + \underbrace{\frac{1}{T_0} B \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt}_{BY_k}$$

$$= AX_k + BY_k.$$

- **Ιδιότητες**



$$Z_k = ?$$

$$\boxed{Z_k = X_k + Y_k}$$

$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$

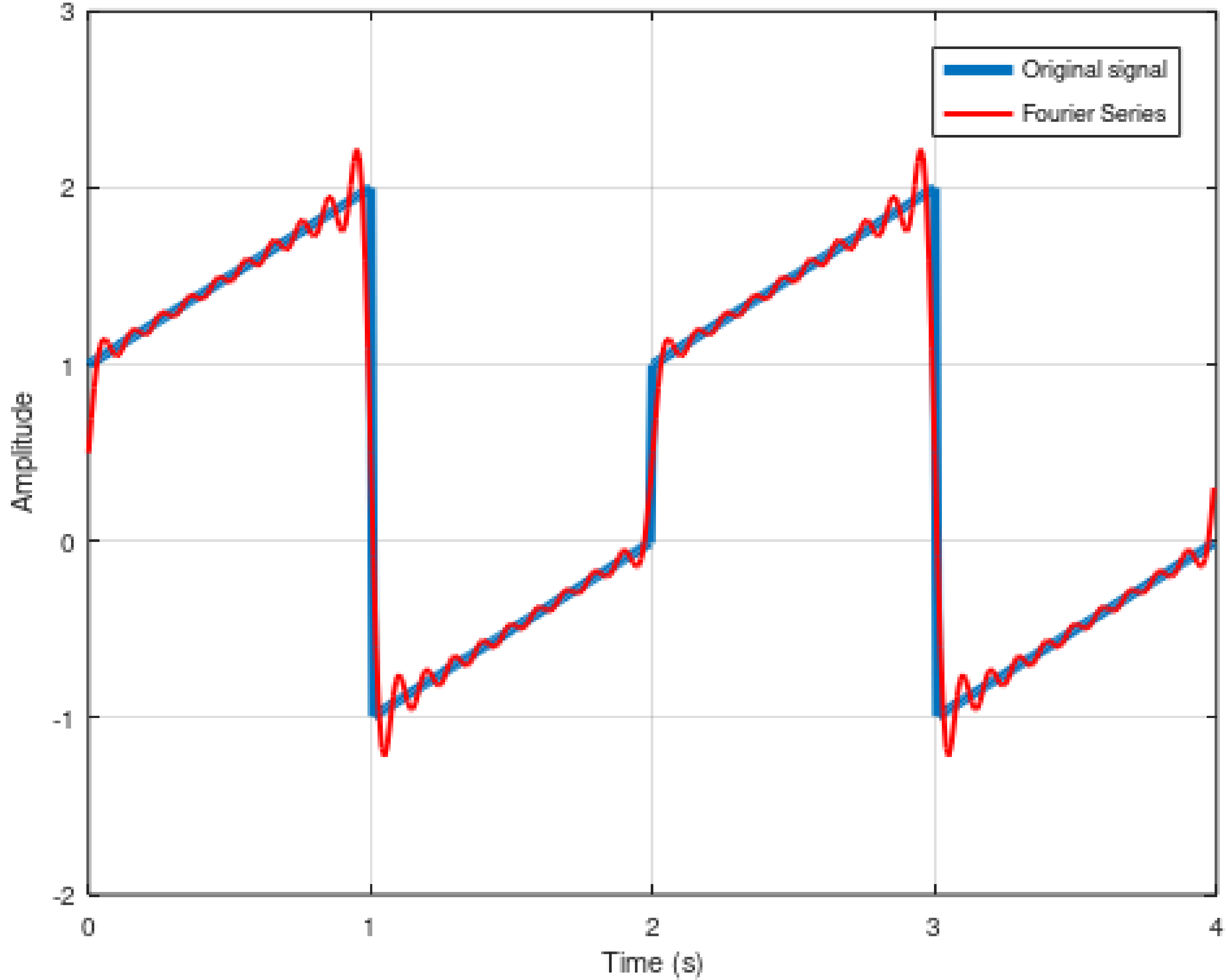
$$Y_k = \frac{1}{2\pi k}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Linearity property
clear;
% Parameters
T0 = 2;
f0 = 1/T0;
N = 20;
k = [-N:-1 1:N];

% Ground truth signal
dt = 0.01;
t1 = 0:dt:T0/2;
t2 = T0/2+dt:dt:T0-dt;
z1 = 1+t1;
z2 = -2+t2;
z = [z1 z2 z1 z2];
t = 0:dt:2*T0-dt;

% Plot original signal
figure; plot(t, z, "LineWidth", 4);
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```

```
% x(t)
Xk = 1./(pi.*k).*(-1).^k.*exp(j*pi/2);
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% y(t)
Yk = 1./(2*pi.*k).*(1-(-1).^k).*exp(-j*pi/2);
y = Yk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% x(t) + y(t)
z_FS = x + y;
Z0 = 1/2;
z_FS = Z0 + z_FS;

% Plot on top
hold on; plot(t, z_FS, 'r', "LineWidth", 2); grid;
legend('Original signal', 'Fourier Series');
```

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**



- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

$x(t) \to X_k$

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt =$$

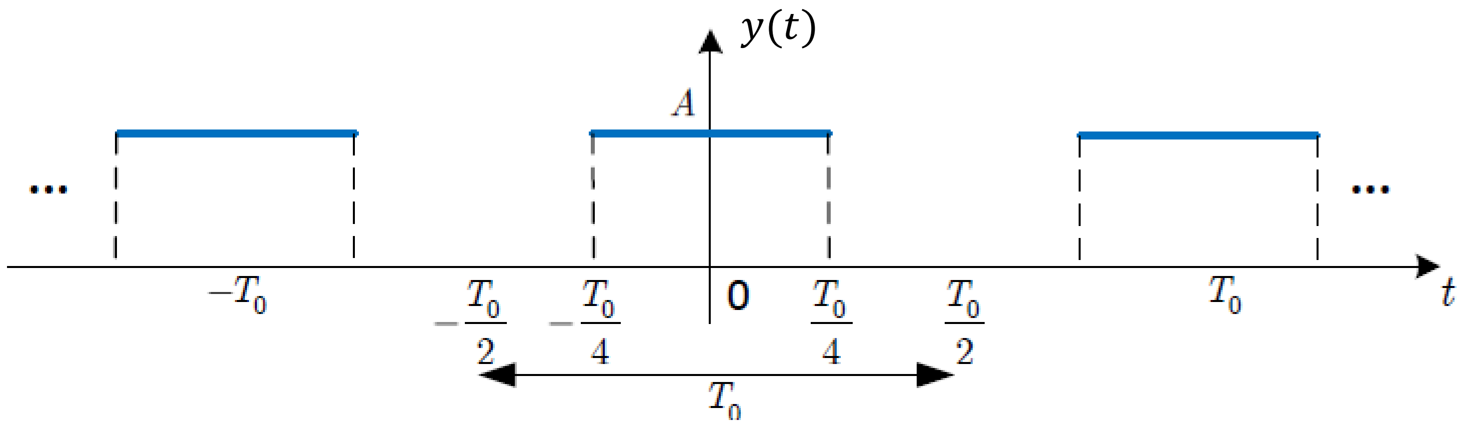
$t' = t - t_0 \Rightarrow t = t' + t_0$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t')\, e^{-j2\pi k f_0 t'} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t_0}}\, dt' =$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t')\, e^{-j2\pi k f_0 t'}\, dt'}_{X_k} =$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0} X_k$$

- **Ιδιότητες**



Αναγνωρίζαμε ότι το y(t) είναι το δεύτερο περιοδικό σήμα στη λίστα με τα "γνωστά" σήματα, άρα:

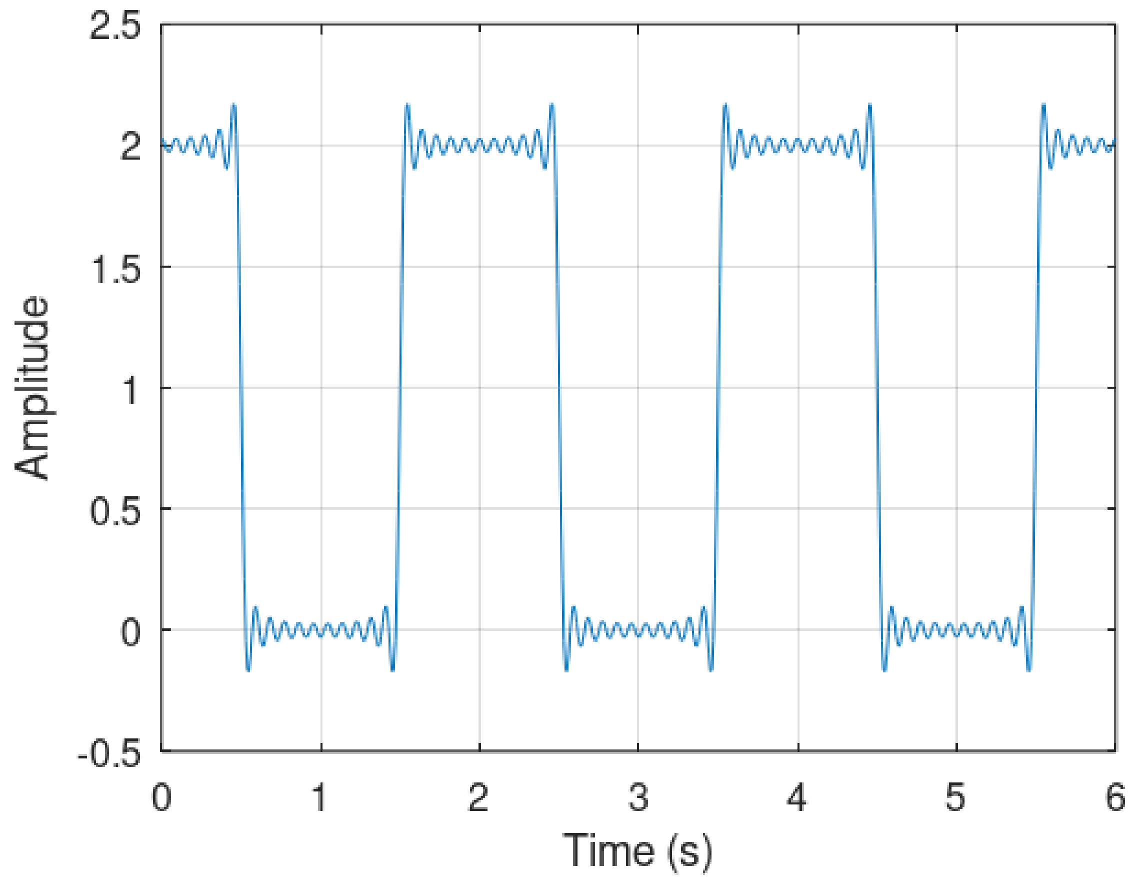
$$Y_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 \left(-\frac{T_0}{4}\right)} = X_k e^{j2\pi k \frac{\overbrace{f_0 T_0}^{1}}{4}} = X_k e^{j\frac{\pi k}{2}}$$

με

$$X_k = \frac{1}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά. Άρα } Y_k = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}(k-1)}, \quad k \text{ περιττά}$$

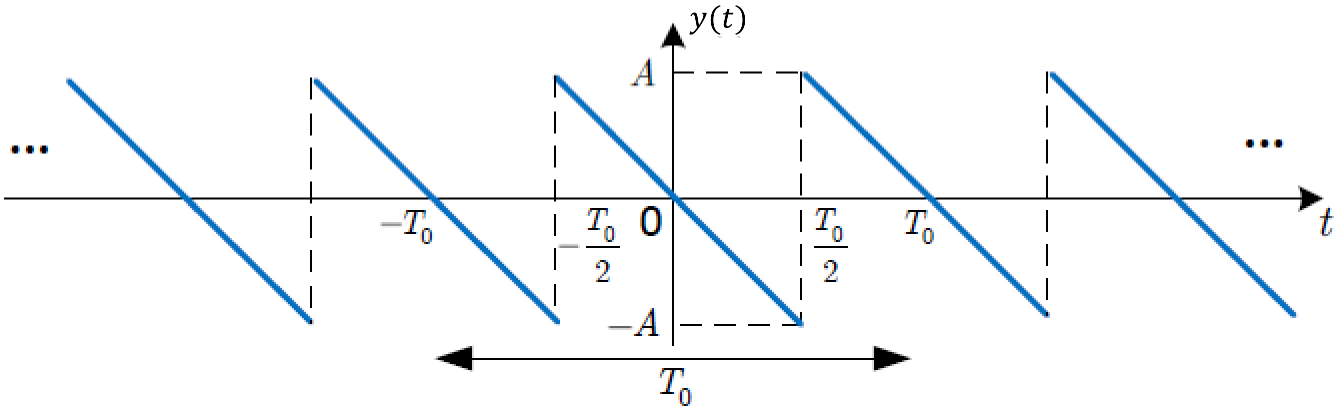
- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Time shifting
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 2;
f0 = 1/T0;
N = 21;
k = [-N:2:-1 1:2:N];
dt = 0.01;
t = 0:dt:3*T0;
X0 = A/2;
% Synthesis
Xk = A./(pi.*k).*exp(j*(pi/2*(k-1)));
x = X0 + Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% Plot
figure; plot(t, x); grid;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
```

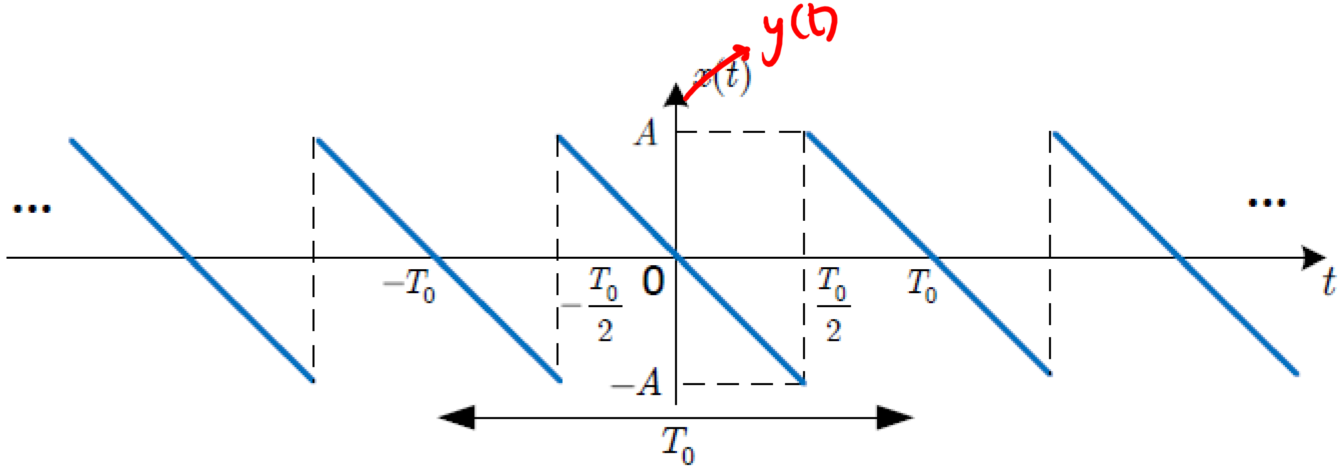


• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	x(t) περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$
	y(t) περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{Y_k}$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}



- **Ιδιότητες**



Αναγνωρίζουμε ότι το y(t) είναι ανεστραμμένο χρονικά το 3ο σήμα στη λίστα με τα "γνωστά" σήματα.

Άρα

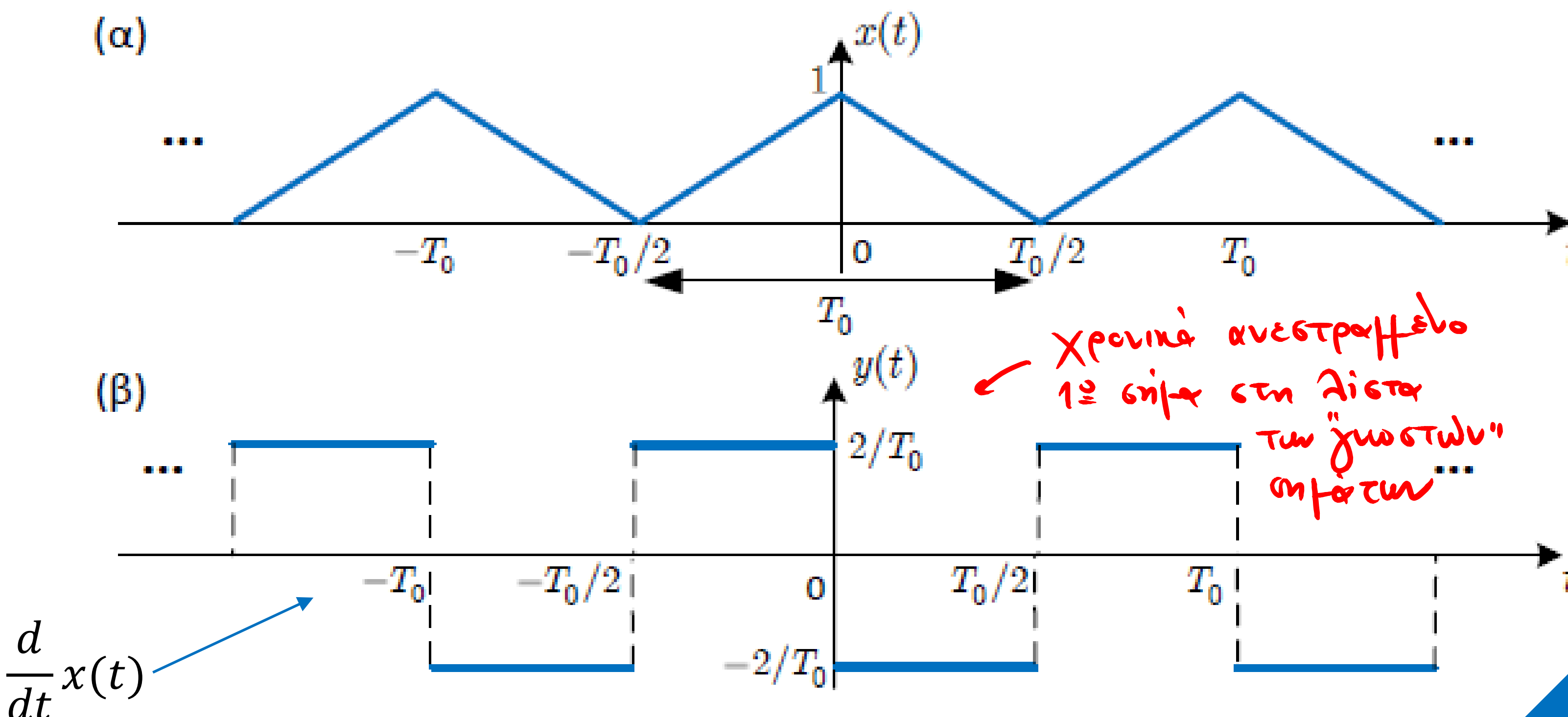
$$Y_k = X_{-k} = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}\Big]_{k:=-k} = \frac{1}{\pi(-k)}(-1)^{-k} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\pi}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$



- **Ιδιότητες**

$$\left\{ f_0 T_0 = 1,\quad -\frac{1}{j} = j = e^{j\frac{\pi}{2}} \right\}$$

Το πρώτο σήμα στη λίστα μας έχει συντελεστές

$$\frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά}$$

Η παράγωγος στο προηγ. slide θα έχει συντελεστές

$$Y_k = \frac{2\frac{2}{T_0}}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Big]_{k:=-k} = -\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης/ολοκλήρωσης θα έχουμε

$$Y_k = -\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\frac{\pi}{2}} = j2\pi k f_0 X_k \Longrightarrow X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}\left(-\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

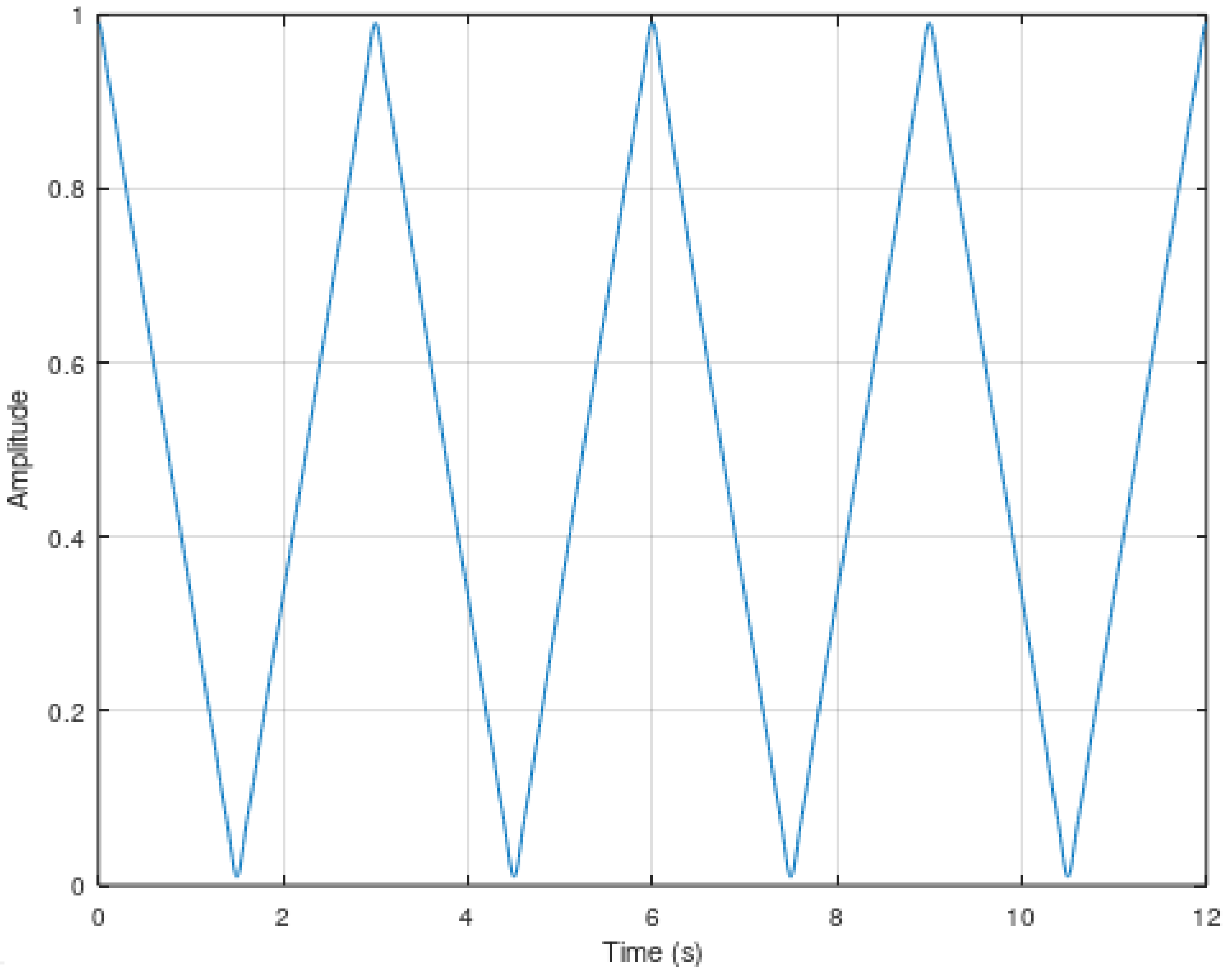
Άρα

$$X_k = \frac{-2}{j\pi^2 k^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά}$$

- **Ιδιότητες**

- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Derivative - Integration property
clear;
% Parameters
A = 1;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 21;
k = [-N:2:-1 1:2:N];
dt = 0.01;
t = 0:dt:4*T0;

% Synthesis
Xk = 2./(pi.^2.*k.^2);
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% X0
X0 = 1/2;
x = X0 + x;

% Plot
figure; plot(t, x); grid;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ