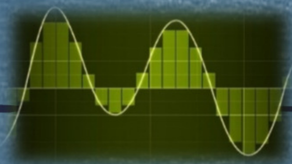
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η

- Ο χώρος της συχνότητας

Τι περιέχει το HY215?

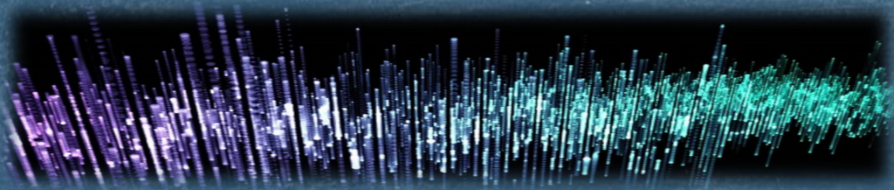


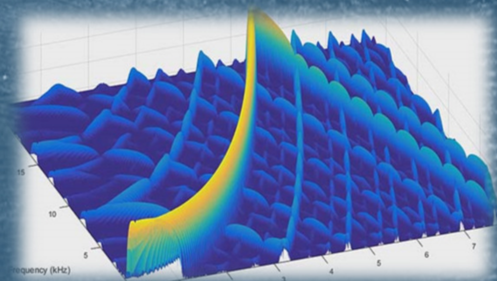
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες





- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ’ όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! ☺

- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δηλ. δεν ξέρουμε γιατί μια δεδομένη είσοδος παράγει τη συγκεκριμένη έξοδο
- Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς

- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**

- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις πλάτους-χρόνου που έχουμε δει ως τώρα…
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!
- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα…

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου…

- …έτσι και το μιγαδικό εκθετικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}, \;\; A > 0$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας

- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0 (t-\tau)+\phi)}\, d\tau \\
&= Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau \\
&= H(f_0)\left(Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\right) \\
&= H(f_0) x(t)
\end{aligned}
$$

με

$$\boxed{H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}$$

ένα σταθερό μιγαδικό αριθμό που εξαρτάται από το f_0, δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ και

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

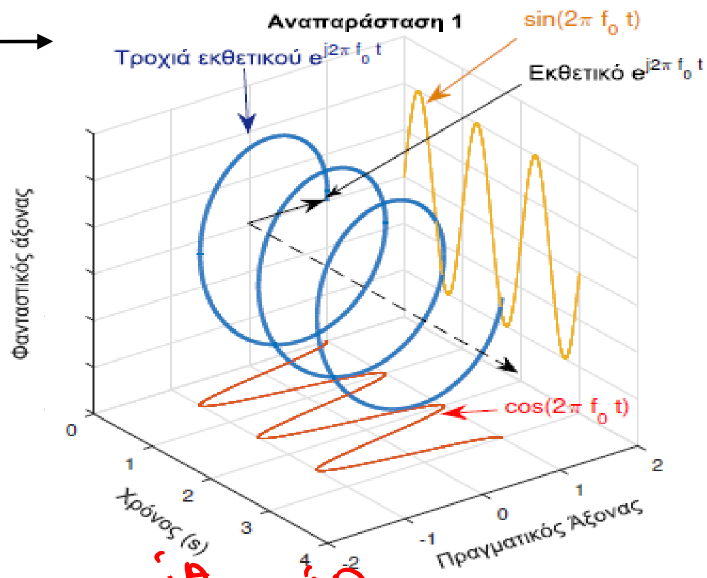
$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

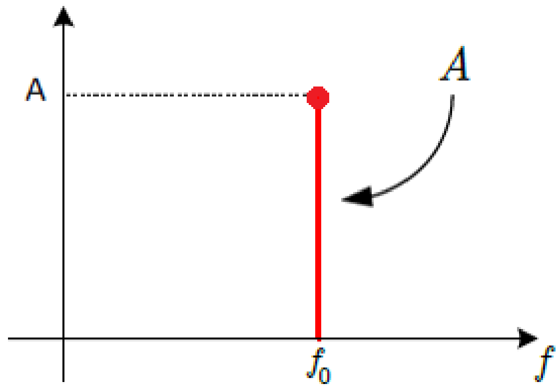
είναι πολύ σημαντικό!

- Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!
  - Η οποία βέβαια μπορεί να αλλάζει το πλάτος και τη φάση της εισόδου! ☺
- Ξέρουμε ότι τέτοια σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
  - Μέσω της σχέσης του Euler
- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων?
  - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο <u>περιοδικά</u> σήματα

- Έστω το γνωστό μας σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, $A \in \Re_+$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο T_0
- Θυμηθείτε:



- Οπότε:



- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), \qquad A > 0, \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

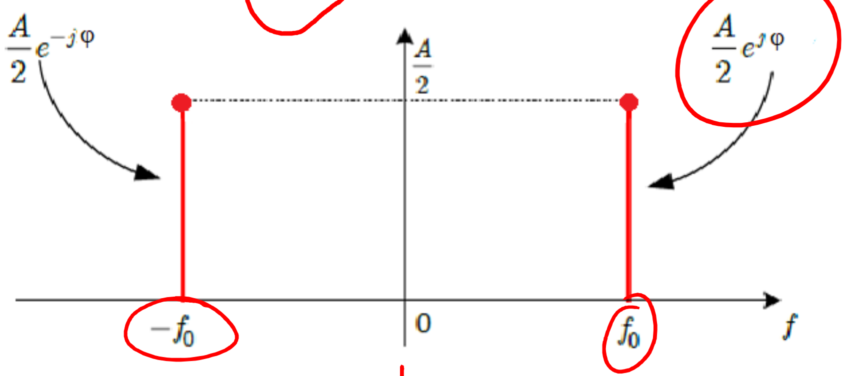
το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}} e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \overbrace{\frac{A}{2}e^{j\phi}}^{X_1}e^{j2\pi f_0 t} + \overbrace{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}^{X_1^*}e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι

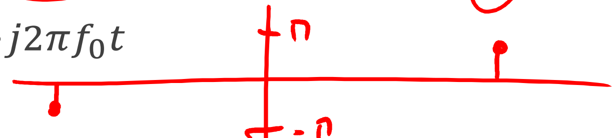


άρτιο: $X(f) = X(-f)$

περιττό: $X(f) = -X(-f)$

- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t}$$



με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2}e^{j\phi}$, $X_1^* = \frac{A}{2}e^{-j\phi}$, $A > 0$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες)

  - … οι οποίοι είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)

- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**

- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
  - **Στο *φάσμα πλάτους* σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα**
  - **…και στο *φάσμα φάσης* τη φάση του φάσορα**

- **Παράδειγμα**

$\cos(2\pi 10 t + \frac{\pi}{9}) = \frac{1}{2} e^{j\pi/9} \cdot e^{j2\pi 10 t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/9} \cdot e^{-j2\pi 10 t}$

10Hz -10

$$\boxed{\pm\frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp\frac{j\pi}{2}}}$$

$e^{j\pi} = -1$

  - Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 3 - 2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό

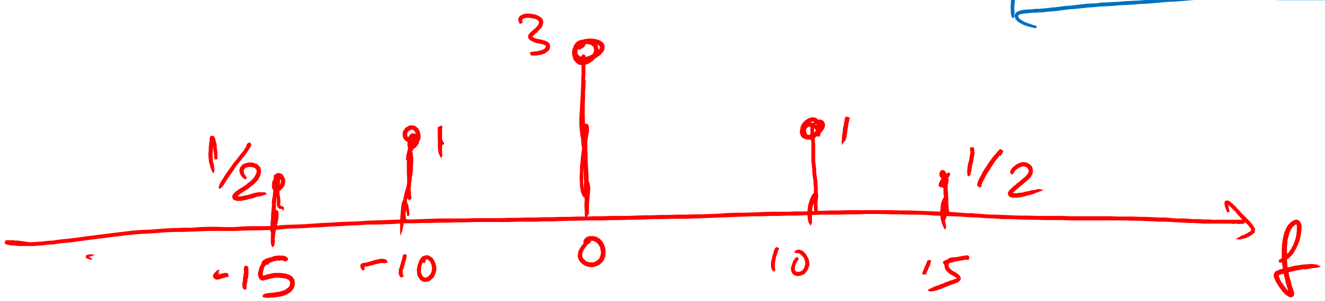
$f_1 = 10\ Hz$ $\quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ => είναι περιοδικό.

$f_2 = 15\ Hz$

$x(t) = 3 + 2\cos\left(2\pi 10 t + \frac{\pi}{9} - \pi\right) + \cos\left(2\pi 15 t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 3 + \boxed{2\cos\left(2\pi 10 t - \frac{8\pi}{9}\right)} + \boxed{\cos\left(2\pi 15 t - \frac{2\pi}{3}\right)} =$

$= 3e^{j0t} + \boxed{e^{-j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10 t} + e^{+j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10 t}} + \boxed{\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 15 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 15 t}}$

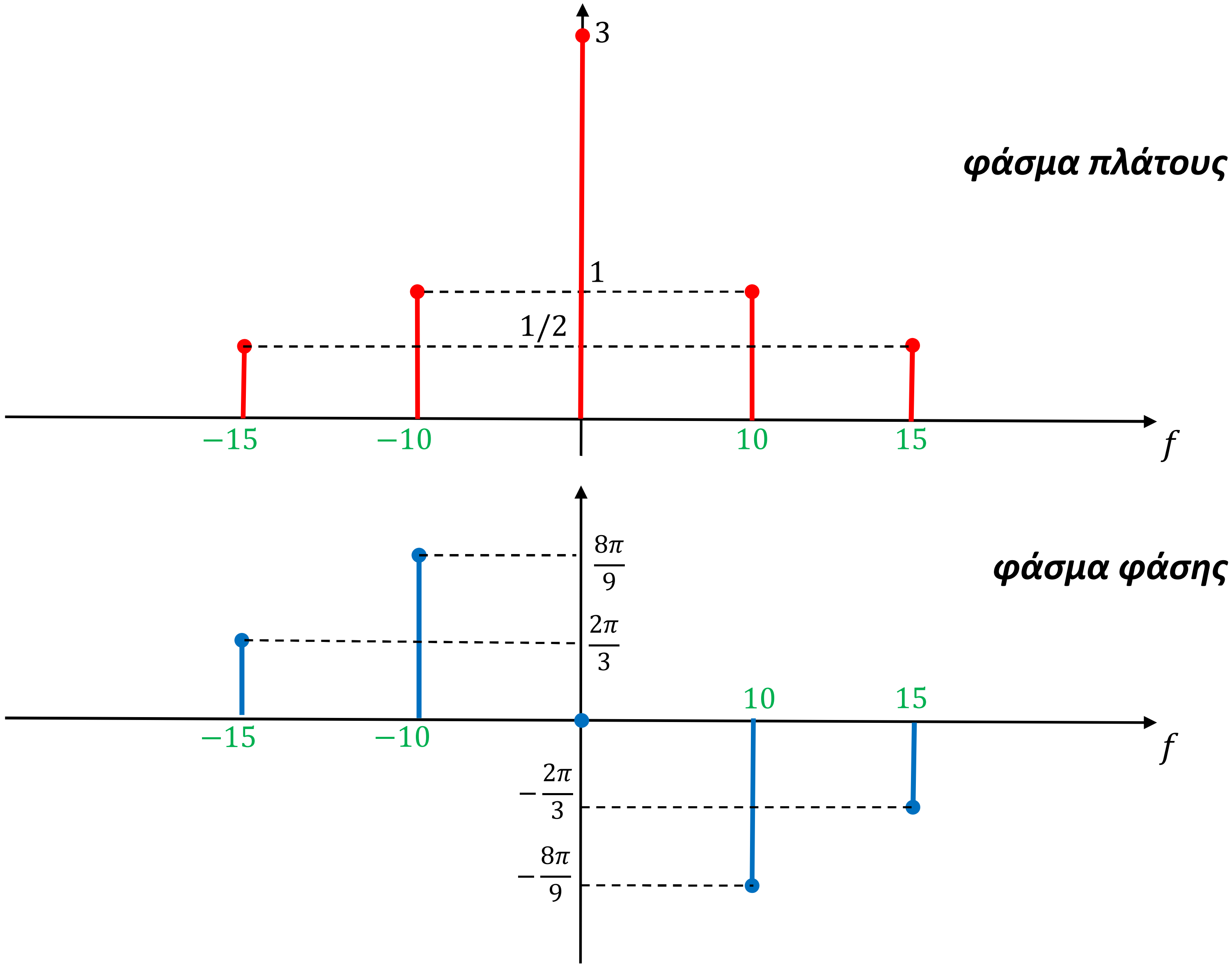


- **Παράδειγμα**

- Οπότε τελικά

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$

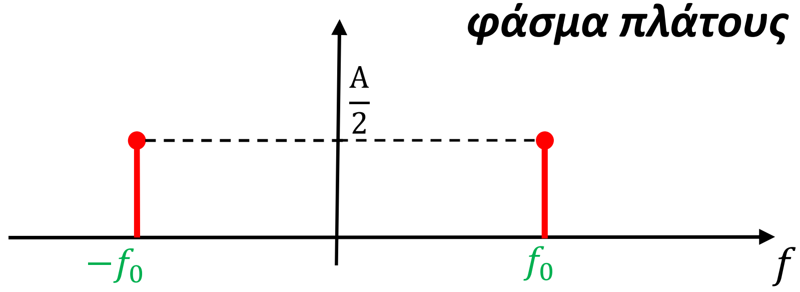
- Παράδειγμα

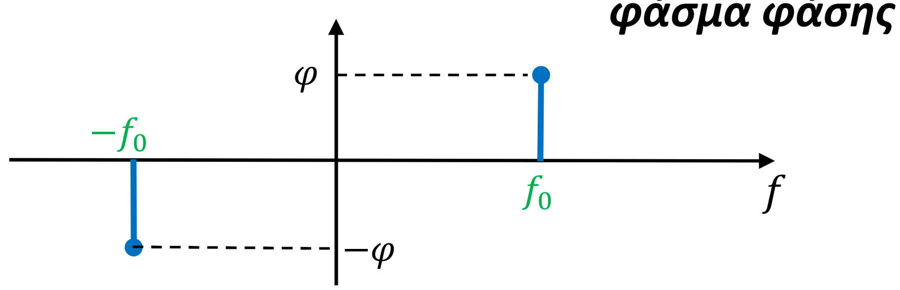

3
φάσμα πλάτους
1
1/2
−15
−10
10
15
f
8π/9
2π/3
φάσμα φάσης
10
15
−15
−10
f
−2π/3
−8π/9

- **Ο χώρος της συχνότητας**

- Συνοπτικά

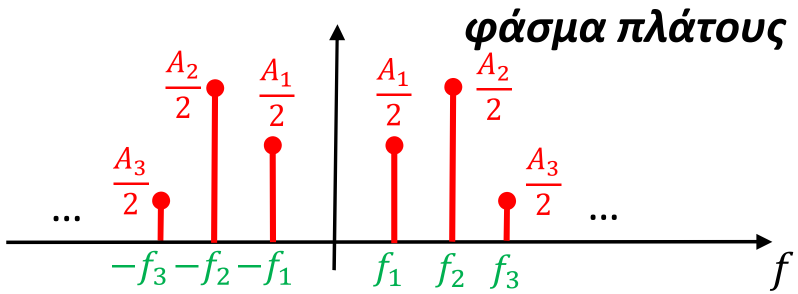
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}, \qquad A > 0$$

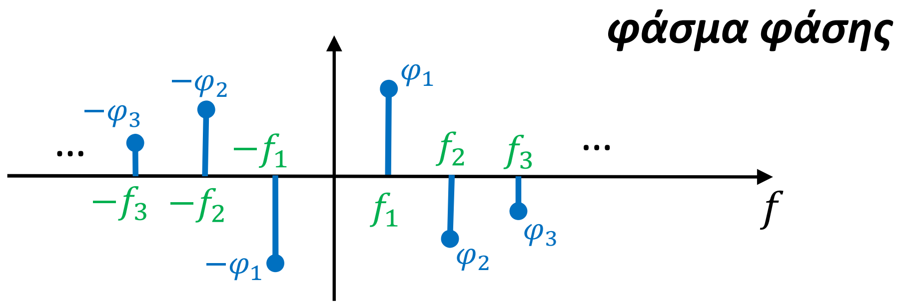




- Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{A_k}{2}e^{j\varphi_k}e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2}e^{-j\varphi_k}e^{-j2\pi f_k t}\right]$$





- Κάθε **<u>πραγματικό</u>** σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

a) **Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του**

b) **Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του**

- Η συμμετρία προκύπτει από τη συζυγία των φασόρων

- Επίσης παρατηρήστε ότι οι συχνότητες των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν *ακέραιες πολλαπλάσιες* της θεμελιώδους συχνότητας
  - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k, με k το αντίστοιχο ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας
  - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως

$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$

  - Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ ήταν μηδενικοί
    - Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 5$ Hz, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!

- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται ως άθροισμα ημιτόνων είναι σχετικά απλή

- Ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία

$$x(t) = \sum_k A_k e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{\text{ΓΧΑ}}} \longrightarrow y(t) = \sum_k H(f_k) \cdot A_k e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t}$$

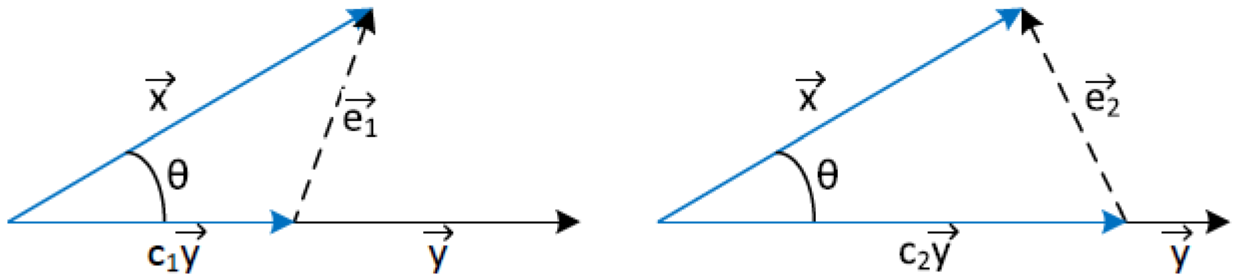
$$H(f) = \int h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- **Ερώτημα**: **μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση**: **μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

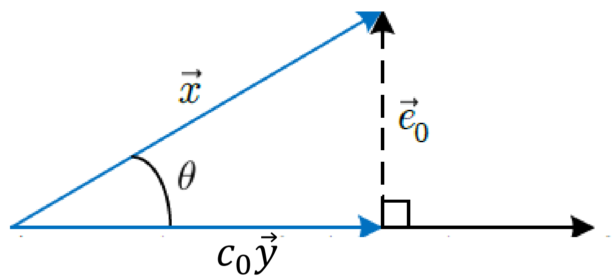
- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν πιο βολικό να θυμηθούμε μερικές ιδιότητες των διανυσμάτων
- Έστω διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ όπως στο σχήμα



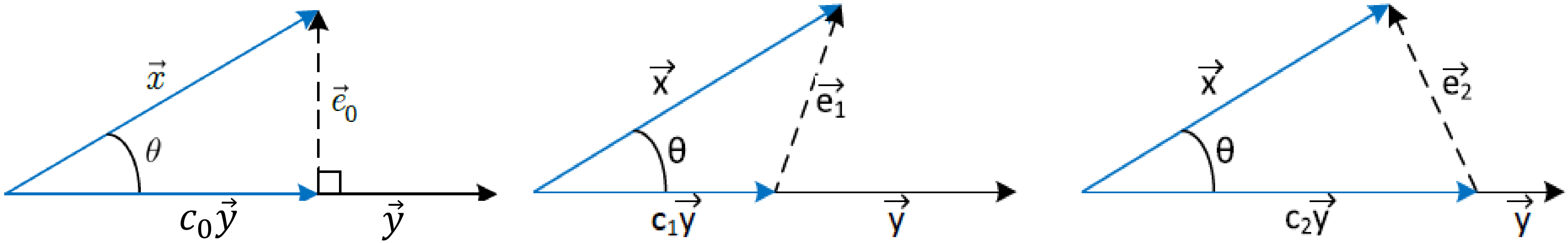
και $\vec{e}_i$ διανύσματα σφάλματος, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i\vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{x}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i$$

- Γνωρίζετε ότι το μικρότερο διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Τα διανύσματα $c_i\vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$

- Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i\vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?
  - Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά ☺ – λέει τη σταθερά c_0, αφού το διάνυσμα σφάλματος της, $\vec{e}_0$, είναι αυτό με το μικρότερο μήκος

- Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\cos\theta = \frac{c_0|\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? ☺
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το ***βέλτιστο c*** **–** με κάποια έννοια **–** για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας ορίσουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (όμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»…
  - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization**!

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Ενέργεια σφάλματος**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - cy(t)\right)^2 dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dc}E_e = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \underline{\langle x, y \rangle}$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

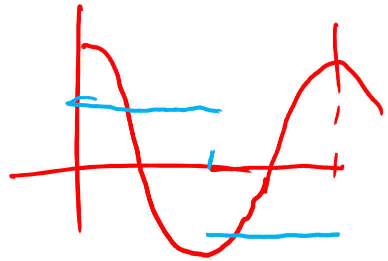
$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2(t) + c^2y^2(t) - 2x(t)cy(t)\right)dt$$

$$\Rightarrow \frac{dE_e}{dc} = \int_{t_1}^{t_2} \left(2cy^2(t) - 2x(t)y(t)\right)dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}c\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt = \cancel{2}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

- **Παράδειγμα**



  - Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ -1, & \pi < t \le 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)\,,\ 0 \le t \le 2\pi$

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$ $\Rightarrow y(t) \approx c \cdot x(t)$

$$c = \frac{1}{E_x} \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt$$

$$E_x = \int_0^{2\pi} x^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{\cancel{2}}\, \cancel{2}\pi - \cancel{\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt}_{\to 0}} = \pi$$

$$c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\cos t \Big|_0^{\pi} + \cos t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi \right] = \frac{1}{\pi} \left[+1+1+1+1 \right] =$$

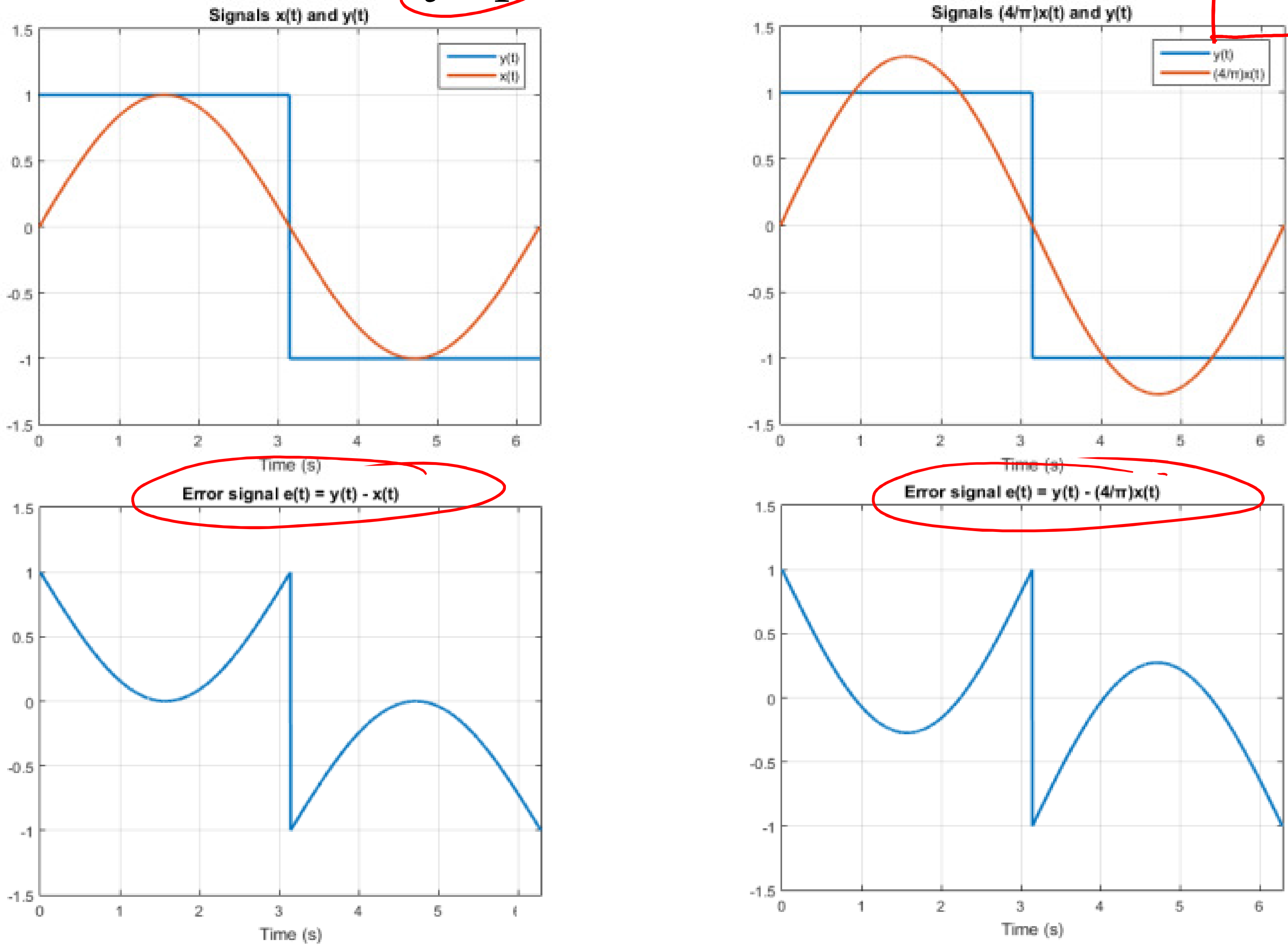
$$= \frac{4}{\pi}$$

$$y(t) = \frac{4}{\pi}\, x(t)$$

- Παράδειγμα

$c = 1$

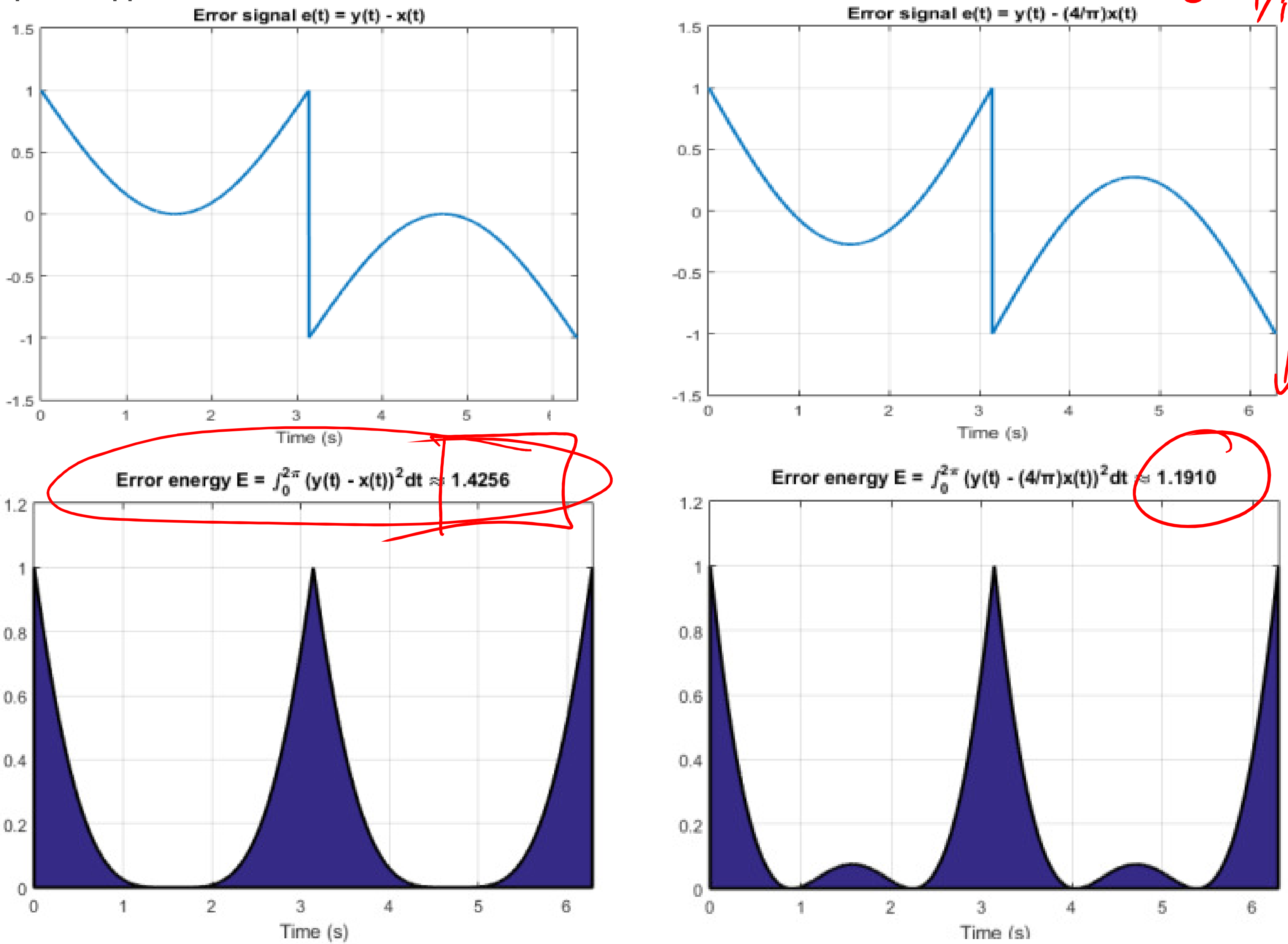
$\boxed{c = \frac{4}{\pi}}$



• Παράδειγμα

$c = 1$

$c = 4/\pi$



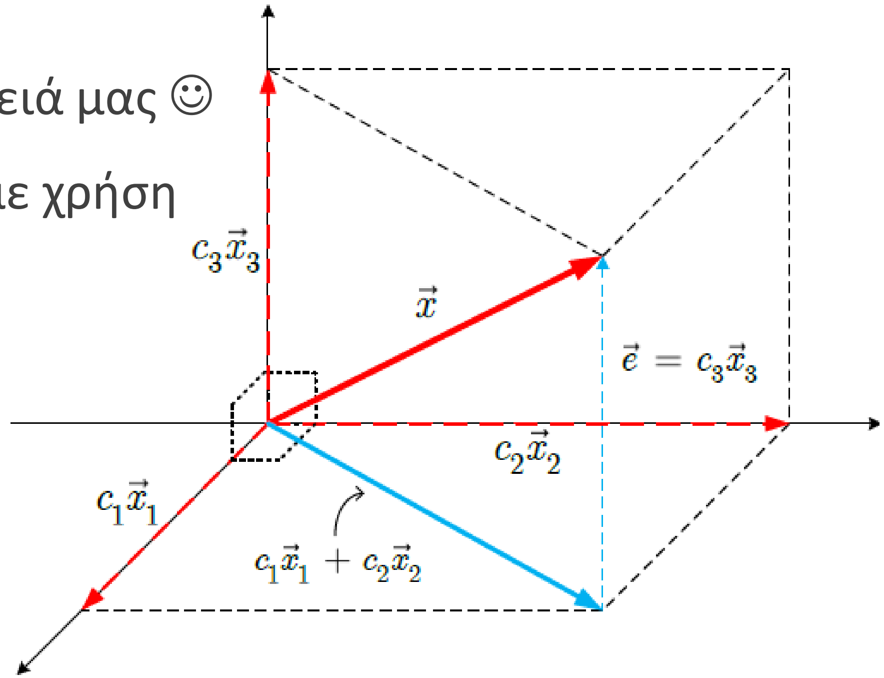
- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης $c\cancel{x}(t)$?
- Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k(t)$$

- Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερο όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$
  - Αρκεί οι όροι να είναι «κατάλληλοι»
- Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας ☺
- Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων
  - Ένα για το μήκος
  - Ένα για το πλάτος
  - Ένα για το ύψος

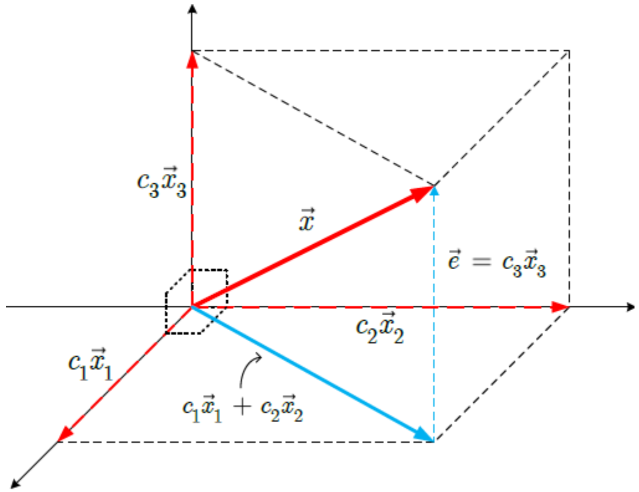
$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

- Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Αν χρησιμοποιήσουμε δυο αντί για τρια διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος $\vec{x}$ τότε θα έχουμε σφάλμα
  - Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
  - Αυτό θα είναι το διάνυσμα σφάλματος



- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$

- Ερώτηση: **ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς?**

- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1,0,0], \qquad x_2 = [0,1,0], \qquad x_3 = [0,0,1]$$

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- ❑ Είναι **ορθογώνια** → το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν
  - Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
  - Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο
- ❑ Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου
  - Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου
  - Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός *όλων* των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα… ☺

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $2N+1$ μιγαδικά εκθετικά σήματα

$$\mathbb{E} = \left\{e^{j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=-N}^{N} \quad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα άθροισμα $2N+1$ τέτοιων σημάτων:

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Συνάρτηση σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**
- **Βελτιστοποίηση (ξανά ☺)**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

1. Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει στοιχεία ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

2. Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι πλήρες όταν $N \to +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \left\{ e^{j2\pi k f_0 t} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty} , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί βάση του χώρου

- Οπότε

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ