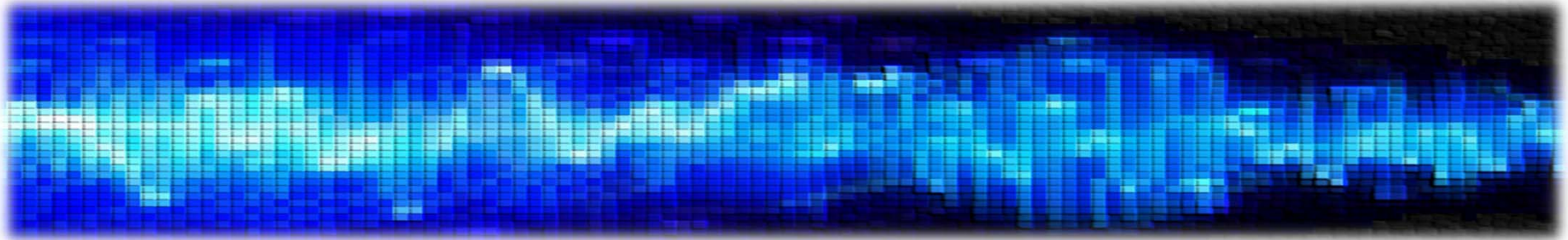


---

# HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

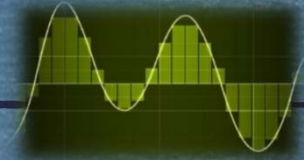
ΔΙΑΛΕΞΗ 4<sup>Η</sup>



- Κρουστική Απόκριση
- Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης



## Τι περιέχει το ΗΥ215?



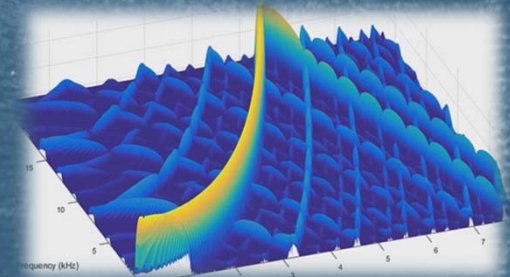
### 1<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ✓ ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ✓ ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier

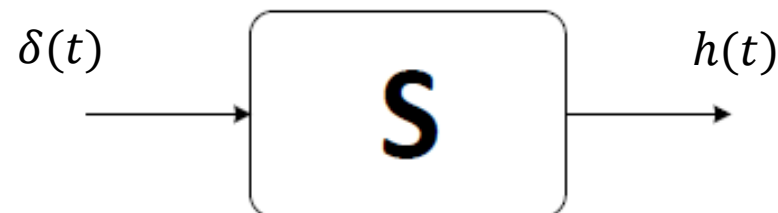


### 2<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ▶ Τυχαία Σήματα
- ▶ Δειγματοληψία
- ▶ Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- Γνωρίσαμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως την έξοδο του συστήματος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες
  - Θεωρώντας την είσοδο μηδενική
- Ας προχωρήσουμε στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την (μη-μηδενική) **είσοδο** του συστήματος
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές εισοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - ...απουσία αρχικών συνθηκών για  $t = 0^-$
- Συμβολισμός:  $h(t)$



- Εμείς ήδη γνωρίζουμε τον τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου
  - Ας τον εκμεταλλευτούμε! 😊
- Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που «ζει» μόνο για  $t = 0$ , και μετά εξαφανίζεται!
  - Άρα επιδρά στο σύστημα ακαριαία, και μετά εξαφανίζεται
- Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η συνάρτηση Δέλτα γεννά νέες «αρχικές» συνθήκες στο σύστημα!
- Οι «αρχικές» αυτές συνθήκες υπάρχουν για  $t = 0^+$  και θα είναι της μορφής

$$h(0^+), h'(0^+), \dots, h^{(N-1)}(0^+)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι τιμές των νέων αυτών «αρχικών» συνθηκών είναι

$$\begin{aligned}h(0^+) &= 0 \\h'(0^+) &= 0 \\&\vdots \\h^{(N-1)}(0^+) &= \frac{1}{a_N}\end{aligned}$$

- Μπορούμε να λύσουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με αυτές τις συνθήκες!! 😊

- Αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

$$c \cdot e^{\lambda t}$$

$$x(t) = \delta(t)$$

$0^+$

λύνουμε την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0$$

με «αρχικές» συνθήκες

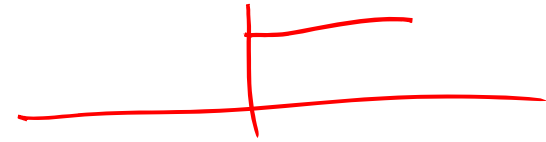
$$\begin{aligned} h(0^+) &= 0 \\ h'(0^+) &= 0 \\ &\vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) &= \frac{1}{a_N} \end{aligned}$$

- Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα

• Παράδειγμα

Ο Έστω το σύστημα

$$\square \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t)$$



$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση  $h(t)$

Χ. Π.  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t > 0 \Rightarrow h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \quad t > 0$$

$$h(0^+) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$\dot{h}(0^+) = 1 \Rightarrow \left( -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \right) \Big|_{t=0} = -c_1 - 2c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = -1$$

$$\boxed{h(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)}$$

- Θυμηθείτε ότι όταν ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ( $\Rightarrow$  μηδενικές αρχικές συνθήκες), τότε αυτό είναι **γραμμικό**
  - Επίσης, μπορεί κανείς να δείξει ότι είναι και **χρονικά αμετάβλητο**
- Έτσι, ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) αν και μόνο αν οι αρχικές του συνθήκες είναι μηδενικές
  - ...εννοώντας τις αρχικές συνθήκες για  $t = 0^-$
- Τα παραπάνω μας βοηθούν να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ένα σύστημα της μορφής

$$S: \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

1. Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση  $h_o(t)$  του συστήματος

$$S_o: \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

2. Η κρουστική απόκριση  $h(t)$  του συστήματος  $S$  δίνεται ως

$$h(t) = \sum_{k=0}^M \frac{d^k}{dt^k} b_k h_o(t)$$

λόγω γραμμικότητας

• Παράδειγμα

$$y_{zi}(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^r c_k t^{k-1} e^{\lambda_k t}}_{\text{homogeneous}} + \sum_{k=r+1}^n c_k e^{\lambda_k t} \quad \left( \begin{array}{l} \text{περ. } n \sim n \\ \lambda_i \text{ ποσ. } r \end{array} \right)$$

Ο Έστω το σύστημα

ΓΧΑ  $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \frac{d}{dt} y(t) + 9y(t) = \boxed{9x(t) + 2 \frac{d}{dt} x(t)}$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση  $h(t)$

$\boxed{S_0}$ :  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3$

$$h_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}, \quad t > 0$$

Αρχ. Συνθήκες

$$h(0^+) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\dot{h}(0^+) = 1 \Rightarrow \left( c_2 e^{-3t} + c_2 t (-3) e^{-3t} \right) \Big|_0 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\boxed{h_0(t) = t \cdot e^{-3t} u(t)}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= 9 h_0(t) + 2 \frac{d}{dt} h_0(t) = 9 t e^{-3t} u(t) + 2 \frac{d}{dt} \left\{ t e^{-3t} u(t) \right\} \\ &= 9 t e^{-3t} u(t) + 2 \left( e^{-3t} u(t) + t (e^{-3t} u(t))' \right) \Rightarrow \end{aligned}$$



Παράδειγμα

$$\Rightarrow h(t) = 9t e^{-3t} u(t) + 2 \left( e^{-3t} u(t) + t \cdot \underbrace{\left( e^{-3t} u(t) \right)'} \right) \Rightarrow$$

$$f'g + f \cdot g'$$

$$\left( e^{-3t} u(t) \right)' = \underbrace{-3e^{-3t} u(t)} + e^{-3t} \underbrace{u'(t)}_{\delta(t)}$$

$$\Rightarrow h(t) = 9t e^{-3t} u(t) + 2 e^{-3t} u(t) + 2t (-3) e^{-3t} u(t) + 2t \cdot \overbrace{e^{-3t} \delta(t)}^0$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = 3t e^{-3t} u(t) + 2 e^{-3t} u(t)}$$

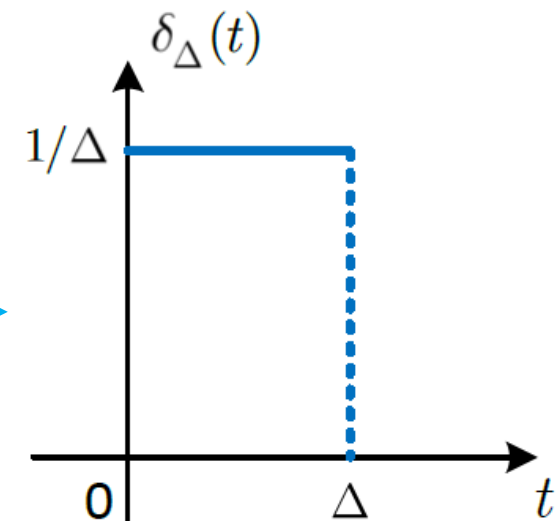
$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$$

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$

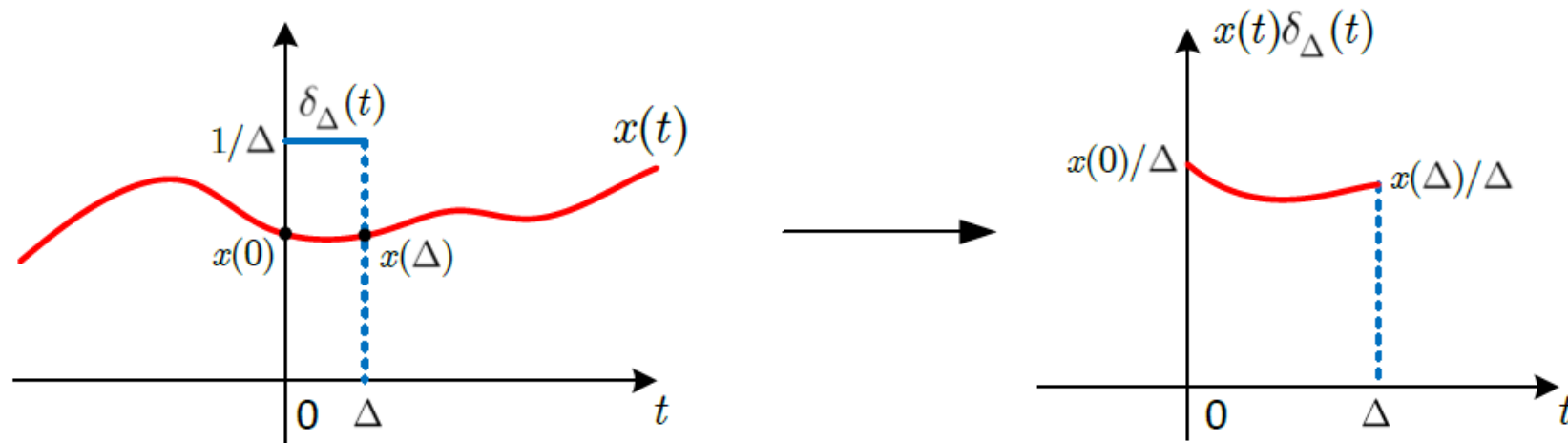
- Ας δούμε τώρα πως η κρουστική απόκριση μας χρησιμεύει στην εύρεση της εξόδου μηδενικής κατάστασης
  - Θυμίζετε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης εξαρτάται αποκλειστικά από την είσοδο
- Αφού γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για είσοδο μια συνάρτηση Δέλτα, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να γράψουμε κάθε είσοδο ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα! 😊
- Έτσι, θα χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης για να βρούμε την έξοδο για κάθε είσοδο!
- Ας δούμε αν αυτό είναι εφικτό...
- Ας ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και σχηματικά



- Ας αναπαραστήσουμε το γινόμενο  $x(t)\delta_\Delta(t)$  για ένα τυχαίο σήμα  $x(t)$



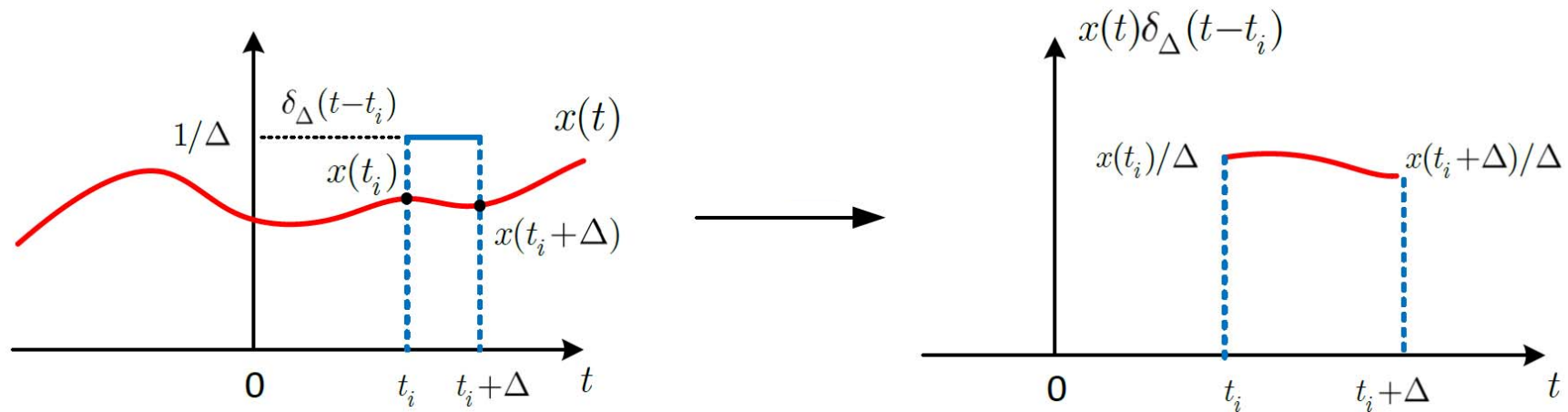
- Θεωρώντας τώρα το  $\Delta$  ως πολύ μικρό, τέτοιο ώστε το τμήμα του σήματος που αποκόπτεται να θεωρείται σχεδόν σταθερό, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t) \approx \Delta x(0)\delta_\Delta(t)$$

- Αν  $\Delta \rightarrow 0$  τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε ισότητα

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Ας συνεχίσουμε με το γινόμενο  $x(t)\delta_\Delta(t - t_i)$



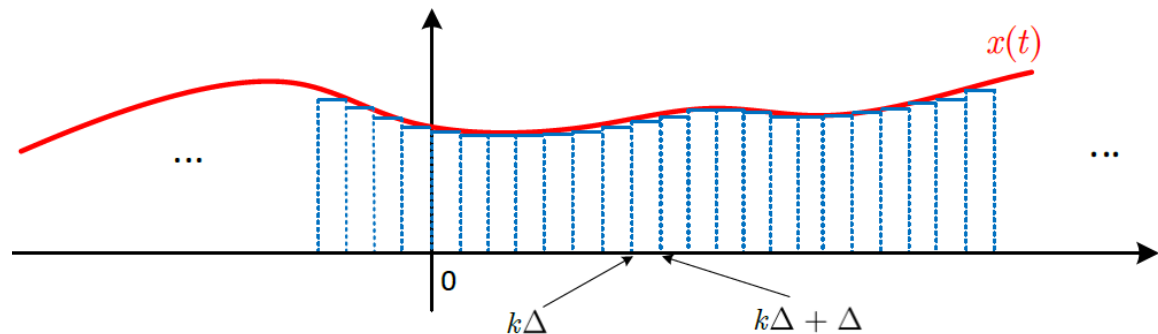
- Όμοια

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) \approx \Delta x(t_i)\delta_\Delta(t - t_i)$$

- Αν  $\Delta \rightarrow 0$  τότε

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) = x(t_i)\delta(t - t_i)$$

- Μπορούμε να συνεχίσουμε για όλο το σήμα  $x(t)$



- Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω τμήματα έχουμε

$$\hat{x}_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta)$$

με  $\hat{x}_\Delta(t)$  μια προσέγγιση του αρχικού σήματος  $x(t)$  η οποία εξαρτάται από την τιμή του  $\Delta$

- Όταν  $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) = x(t)$$

- Το παραπάνω όριο αποτελεί το άθροισμα Riemann και μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- Πέτυχαμε να γράψουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα (ολοκλήρωμα) μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα, με καθεμιά να έχει εμβαδό  $x(\tau)$ !

- Το ολοκλήρωμα

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

είναι πολύ σημαντικό και η πράξη που εκτελεί ονομάζεται **συνέλιξη** μεταξύ του  $x(t)$  και του  $\delta(t)$

- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με τον τελεστή  $*$  :  $x(t) * \delta(t)$
- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

- Πώς βοηθά λοιπόν η σχέση που βρήκαμε για την εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
- Θυμηθείτε ότι το σύστημά μας είναι ΓΧΑ!

• Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

c) γραμμικότητα:

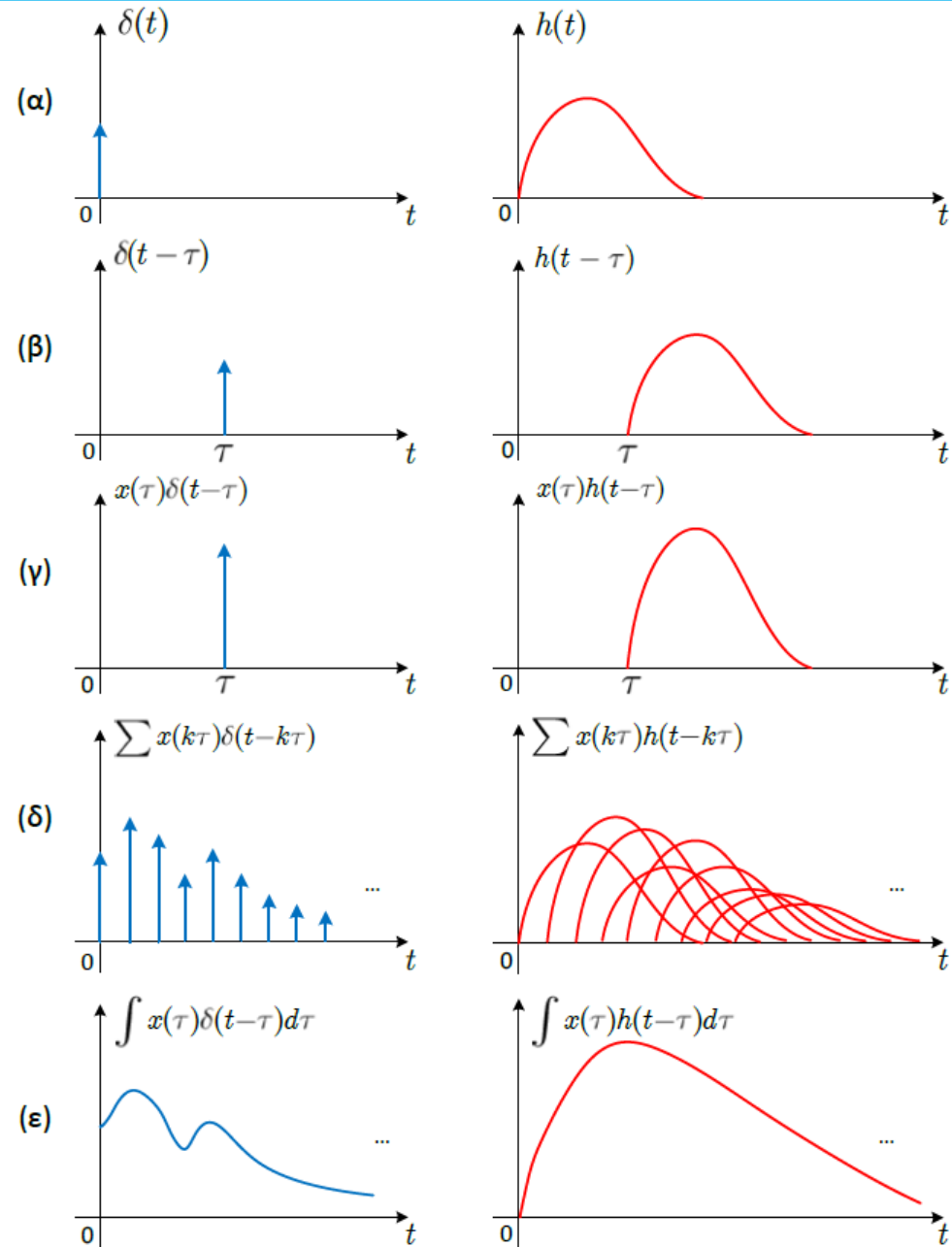
$$x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau)h(t - \tau)$$

d) γραμμικότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

e) απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$





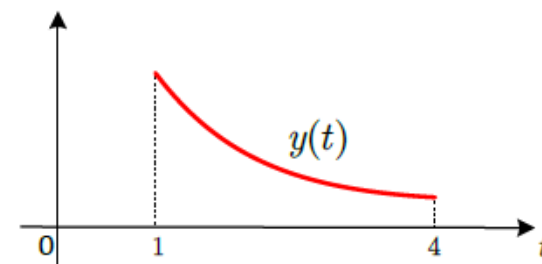
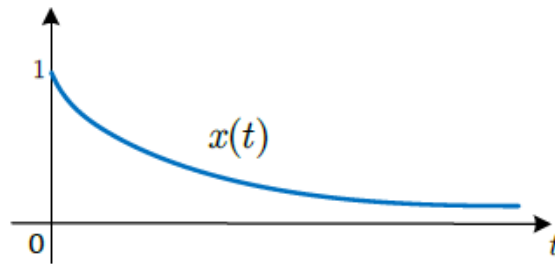
- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Η συνέλιξη έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό της συνέλιξης
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη δυσκολία της ως πράξη
- Ας δούμε πόσο απλή είναι τελικά

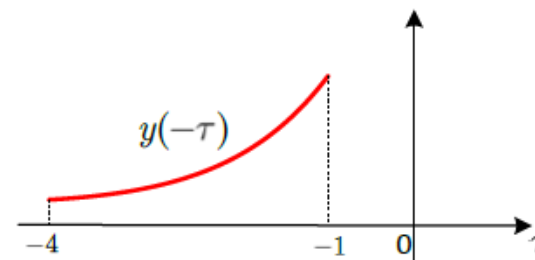
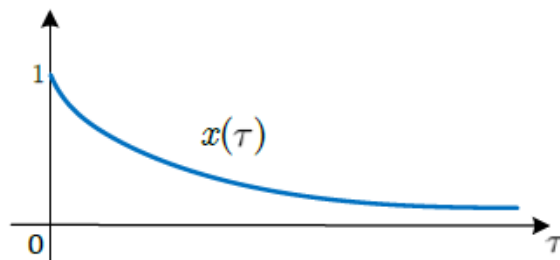
• **Συνέλιξη**

• Έστω δυο σήματα  $x(t), y(t)$  των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$

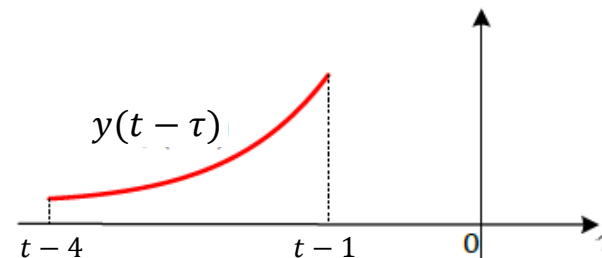
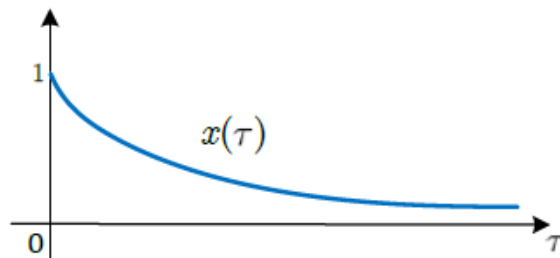


• Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**

• Έστω ότι το  $y(t)$  θα είναι αυτό το σήμα



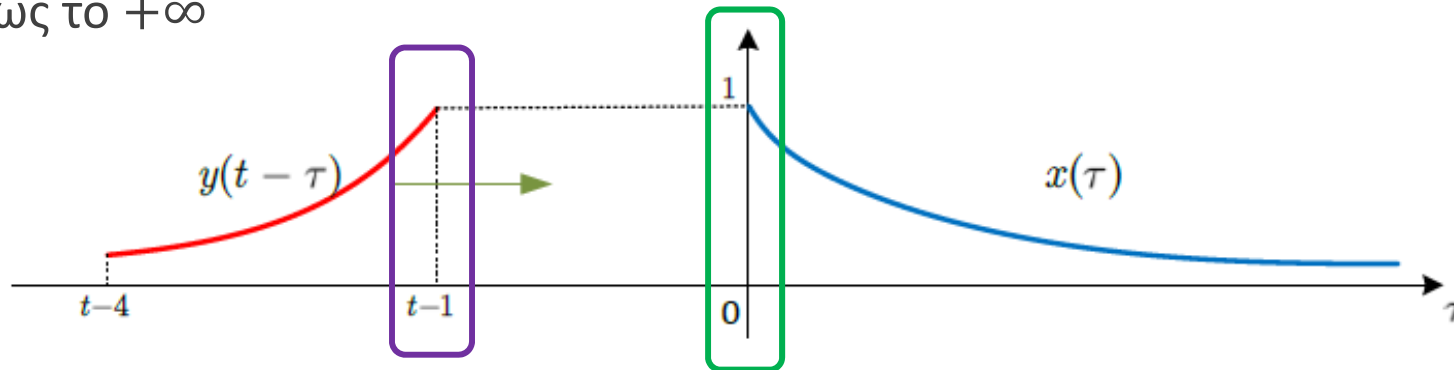
Αντιστροφή



Μετατόπιση

• **Συνέλιξη**

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα  $\tau'$  και ολισθαίνουμε το  $y(t - \tau)$  από το  $-\infty$  ως το  $+\infty$



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 1 < 0 \Rightarrow t < 1$$

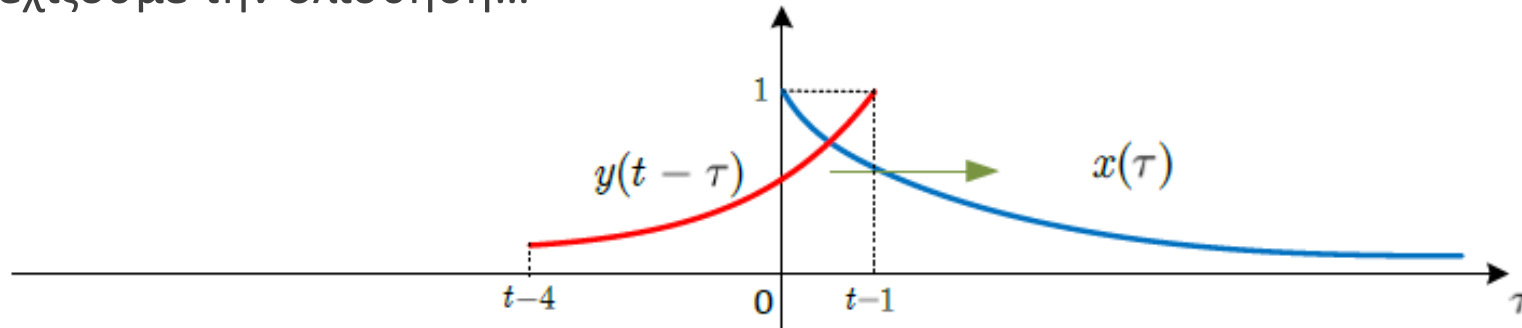
και

$$c(t) = 0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το  $y(t - \tau)$  πλησιάσει το  $x(\tau)$  έτσι ώστε το **δεξί «άκρο»** του περάσει το  $t = 0$ ...
  - ...που είναι το **αριστερό «άκρο»** του  $x(\tau)$

- Συνέλιξη
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

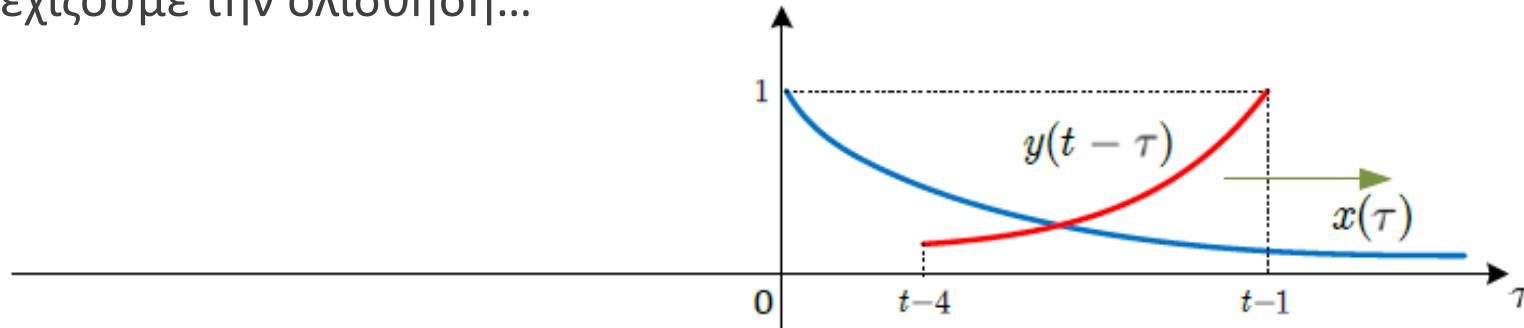
$$t - 4 < 0 \text{ και } t - 1 > 0 \Rightarrow 1 < t < 4$$

και

$$c(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα  $(1, 4)$
- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση...

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4$$

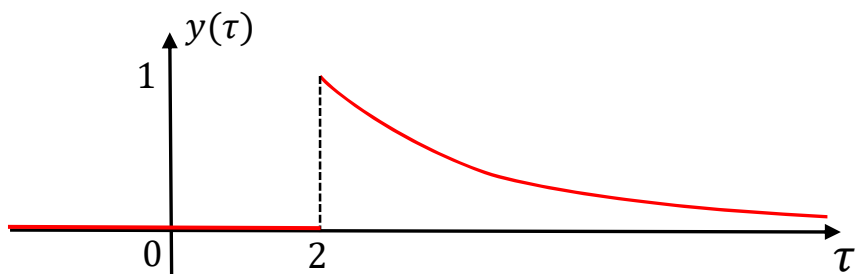
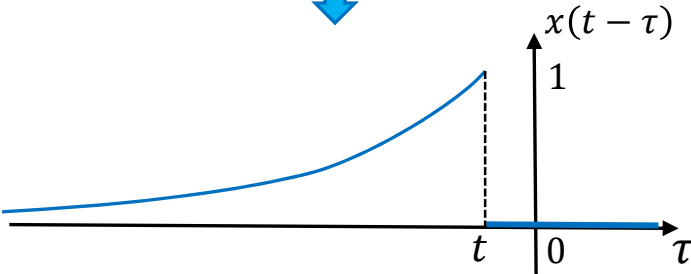
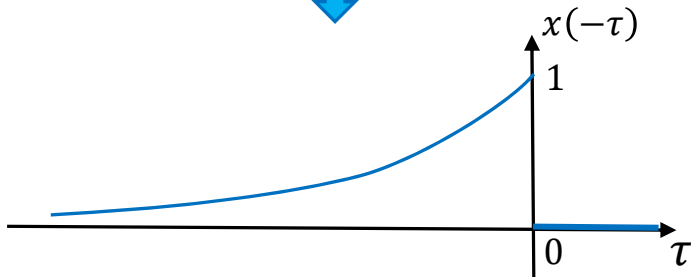
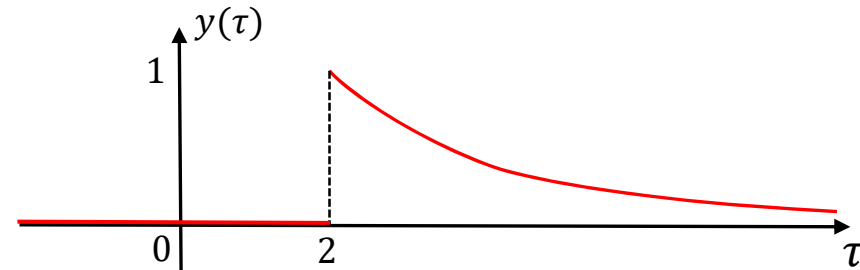
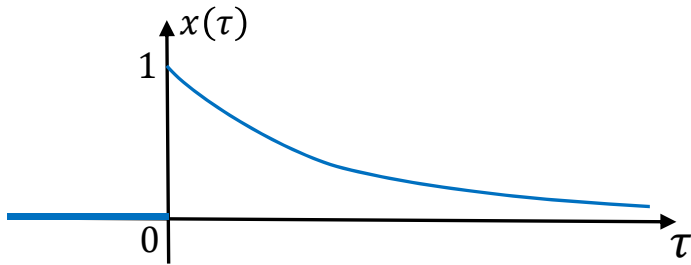
και

$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα  $(4, +\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

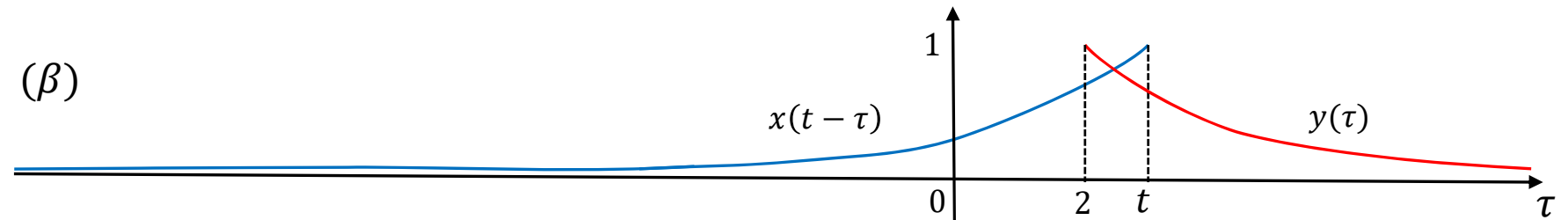
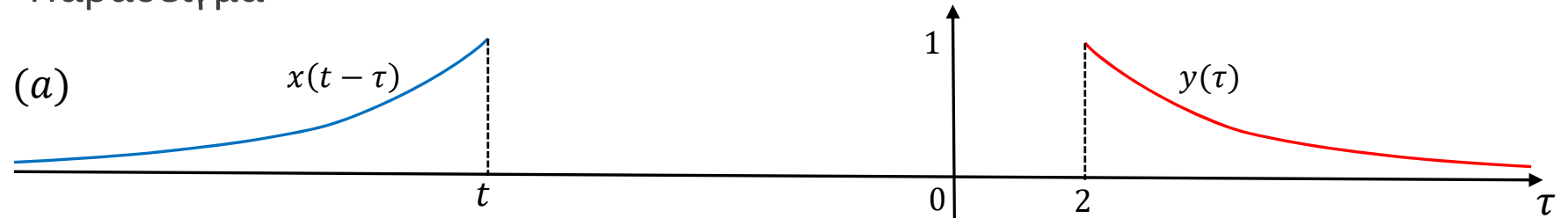
- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

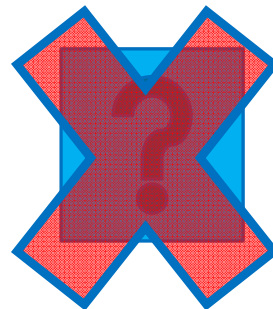


• **Συνέλιξη**

• **Παράδειγμα**



(γ)

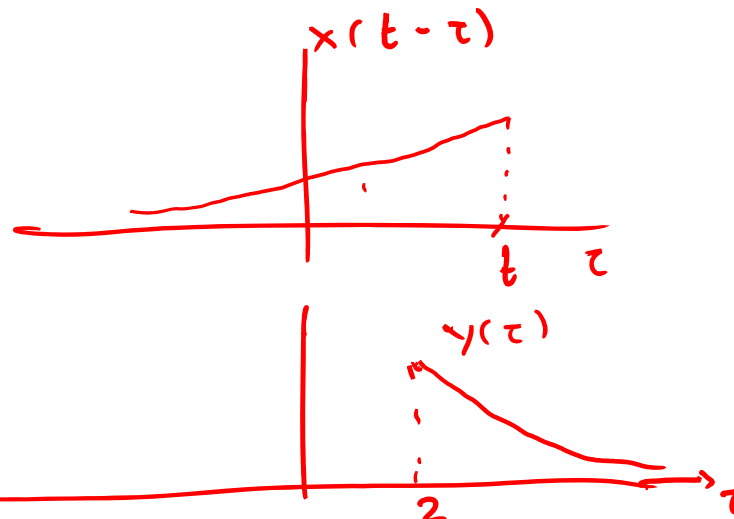
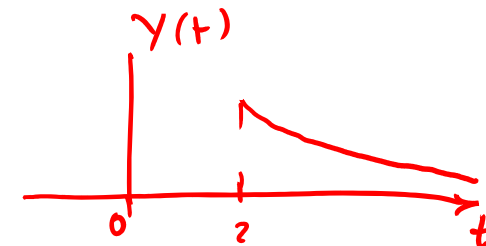
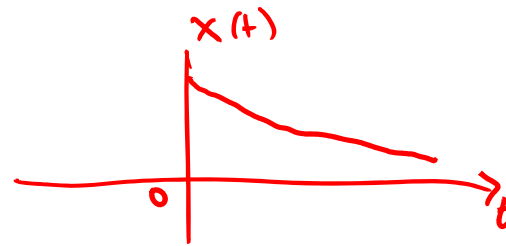


• Συνέλιξη

• Παράδειγμα

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

$$y(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$$



για  $t < 2$ ,  $C_{yx}(t) = 0$

$t > 2$

$$C_{yx}(t) = \int_2^t e^{-(\tau-2)} \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_2^t \cancel{e^{-\tau}} \cdot e^2 \cdot e^{-t} \cdot \cancel{e^{\tau}} d\tau = e^{-(t-2)} \int_2^t d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{yx}(t) = e^{-(t-2)} (t-2), \quad t > 2$$

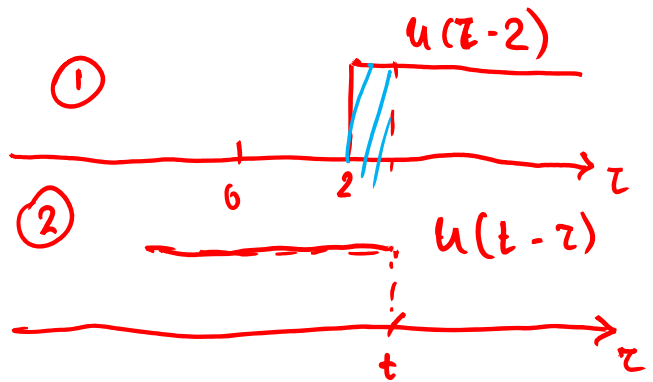


• Συνέλιξη

• Παράδειγμα

Ο Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$  με την αλγεβρική μέθοδο

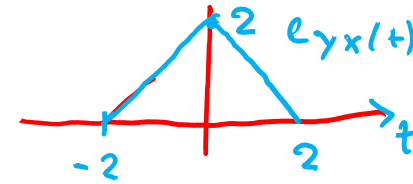
$$C_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\textcircled{1}}{e^{-(\tau-2)} u(\tau-2)} \overset{\textcircled{2}}{e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)} d\tau =$$



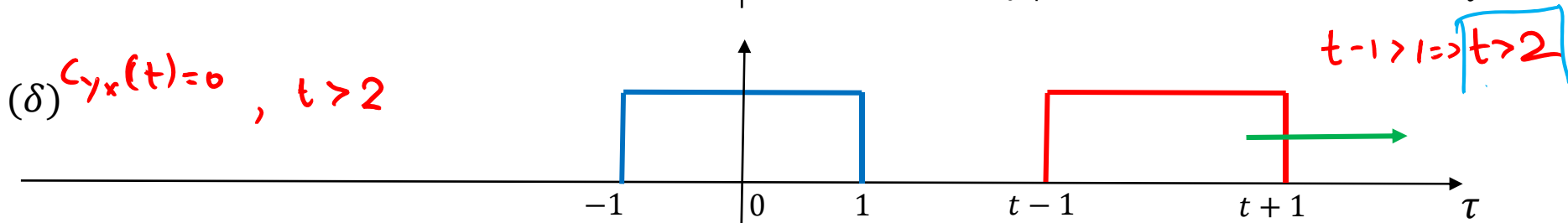
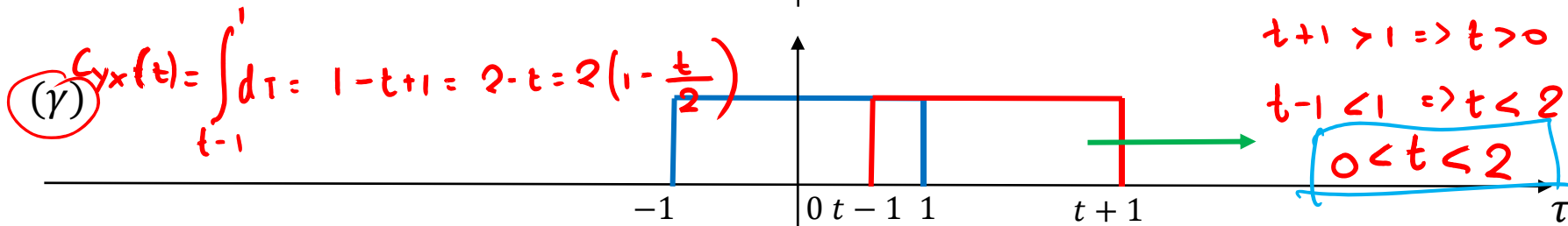
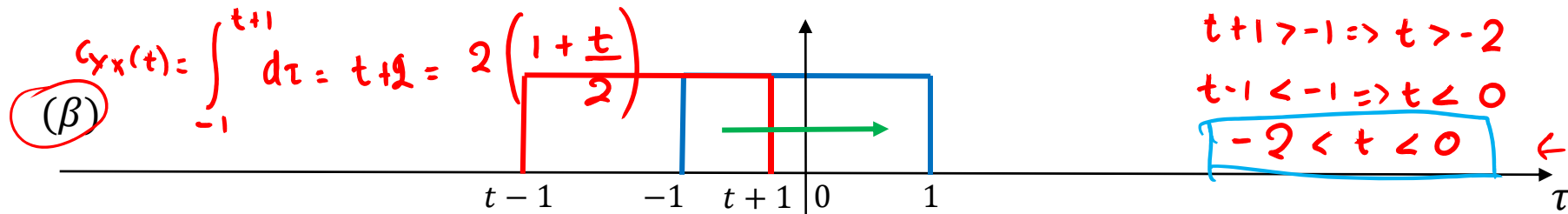
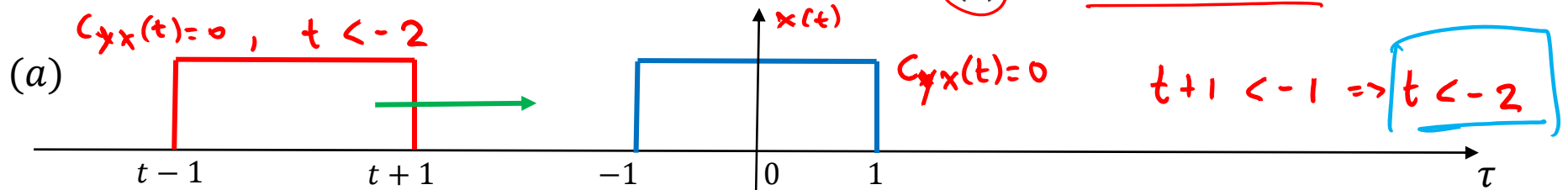
$$= \int_2^t e^{-(\tau-2)} \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-2)} (t-2) u(t-2)$$

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

Άρα  $C_{yx}(t) = 2 \left( 1 - \frac{|t|}{2} \right)$



Ο Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων  $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$  και  $y(t) = x(t)$



• Συνέλιξη

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

• Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

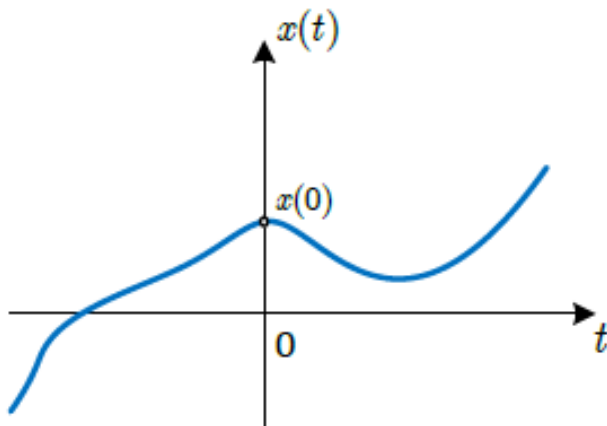
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

• Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

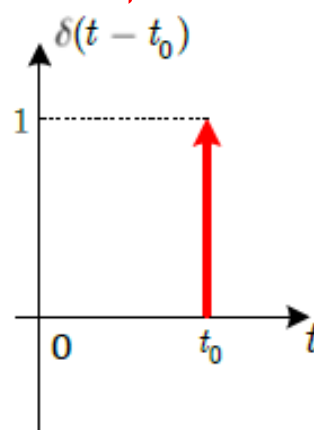
$$A\delta(t - t_0), \quad A \in \mathfrak{R}$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά  $t_0$  και πολλαπλασιασμένο με  $A \in \mathfrak{R}$ , δηλ.

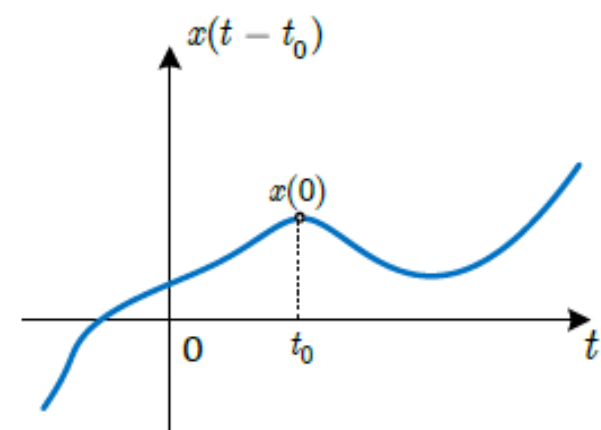
$$\begin{aligned} \underline{x(t)} * \underline{\delta(t - t_0)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau - t_0)d\tau = x(t - t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0)x(t - \tau) d\tau = x(t - t_0) \end{aligned}$$



\*



=



## • Συνολική Απόκριση Συστήματος

- Με βάση τα προηγούμενα, η συνολική έξοδος ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες δίνεται ως

$$\boxed{y(t)} = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left( \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t) + x(t) * h(t)$$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{zi}$ 
 $\overbrace{\hspace{10em}}^{zs}$

αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι απλές

- Αν το **σύστημα είναι ΓΧΑ**, τότε η έξοδος δίνεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης

$$y(t) = y_{zs}(t) = \underline{x(t) * h(t)}$$

- Κατά κανόνα ενδιαφερόμαστε για **ΓΧΑ** συστήματα
  - Κάποιες πολύ λίγες φορές θα εξετάζουμε και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος

## • Ευστάθεια Συστήματος

- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \mathbb{R}_+$$

- Προφανώς αυτή η έξοδος  $y(t)$  μπορεί να είναι είτε η συνολική, είτε κάποια από τις επιμέρους
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου περιλαμβάνει σήματα της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Για αυτά πρέπει υποχρεωτικά  $\lambda_i < 0$  ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

$$\begin{aligned} |y_{zs}(t)| < B_y \Rightarrow |y_{zs}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t - \tau)| d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau \end{aligned}$$

## • Ευστάθεια Συστήματος

- Η σχέση

$$|y_{zs}(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!
- Η συνθήκη αυτή μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα των συναρτήσεων που δημιουργούν την κρουστική απόκριση:

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

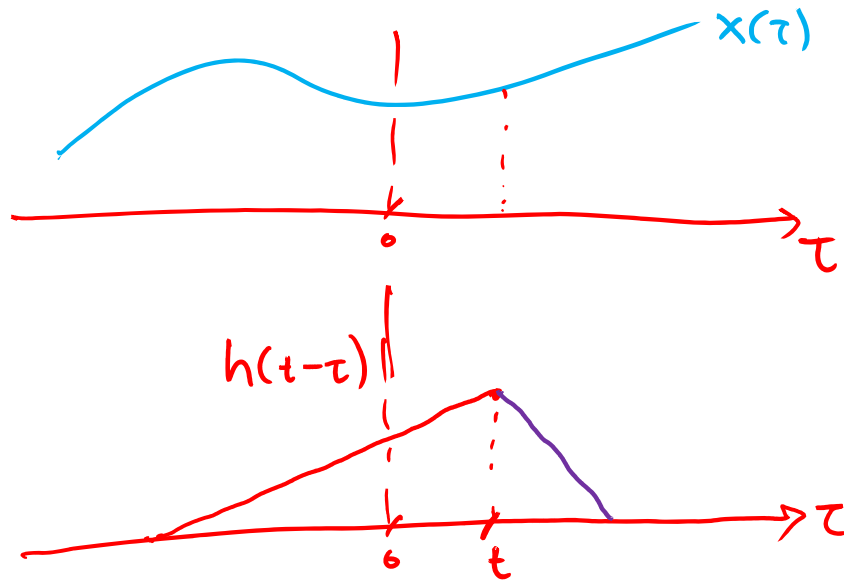
- Ξανά λοιπόν πρέπει να ισχύει  $\lambda_i < 0$  για να είναι το σύστημα ευσταθές!
  - ...αφού το εμβαδόν της  $|h(t)|$  πρέπει να είναι πεπερασμένο

## • Αιτιατότητα Συστήματος

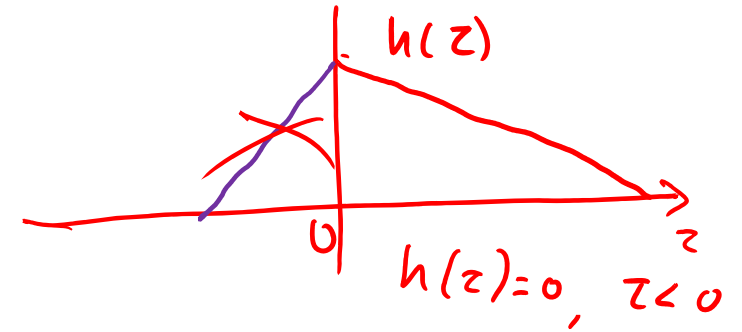
- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει
- Προφανώς ένα σύστημα που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό...
  - ... αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! 😊
- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος
- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα (ή μη) του?
  - Ναι!
- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση  $h(t)$
- Η είσοδος εμφανίζεται για  $t = 0$ , άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για  $t \geq 0$  αν το σύστημα είναι αιτιατό
- Άρα ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

Αιτία:  $h(t) = 0, t < 0$



$$y(t) = x(t-1) + 2x(t) - 3x(t+1)$$





# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

