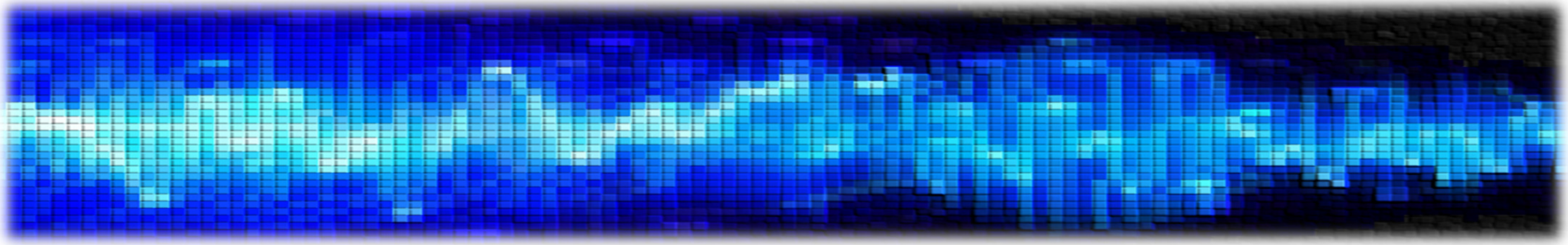
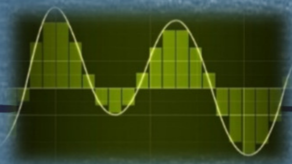
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η



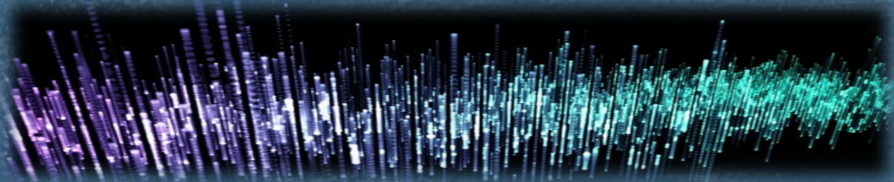
- Συστήματα

Τι περιέχει το ΗΥ215?



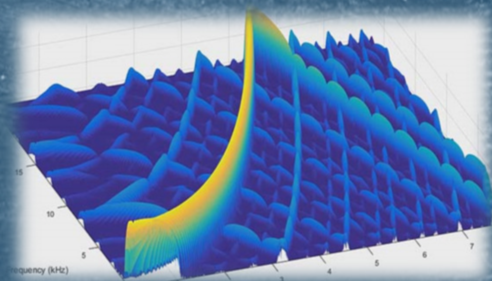
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

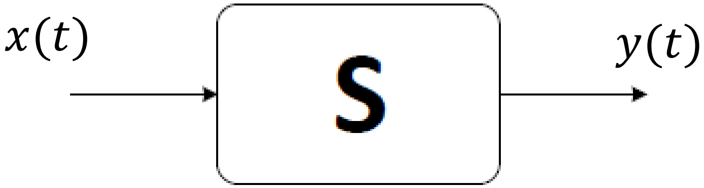


2ο Κομμάτι

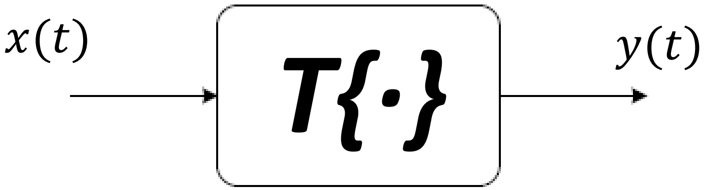
- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- **Σύστημα**: δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$
- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου



- Εναλλακτικά ένα σύστημα περιγράφεται ως



με

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

και $T\{\cdot\}$ ο τελεστής του συστήματος που εφαρμόζεται στην είσοδο και παράγει την έξοδο

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα περιγράφουμε ένα σύστημα ως μια ή ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν την λειτουργία του
  - Δηλ. ως ένα **μαθηματικό μοντέλο** που μπορεί να περιγράφει ένα φυσικό, ηλεκτρικό, μηχανικό, ή όποιο άλλο σύστημα

- **Συστήματα**

- Μερικές σημαντικές κατηγορίες συστημάτων είναι οι ακόλουθες:

1. Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα
2. Χρονικά αμετάβλητα και χρονικά μεταβλητά συστήματα
3. Δυναμικά ή στατικά συστήματα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά συστήματα
5. Ευσταθή ή ασταθή συστήματα

- Θα εξετάσουμε σχεδόν όλες τις παραπάνω κατηγορίες αλλά το βάρος της μελέτης μας θα πέσει μόνο σε **αυτές** τις κατηγορίες

- Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα **Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ)** συστήματα
  - Οι υπόλοιπες ιδιότητες θα ποικίλλουν... ☺

- **Συστήματα**
- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

- Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν ικανοποιεί δυο ιδιότητες
  - Την ιδιότητα της **ομογένειας** (homogeinity)
  - Την ιδιότητα της **προσθετικότητας** (additivity)

- Η ιδιότητα της **ομογένειας** λέει ότι αν

$$x(t) \to y(t)$$

ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$\alpha x(t) \to a y(t)$$

- Η ιδιότητα της **προσθετικότητας** λέει ότι αν

$$x_1(t) \to y_1(t), \quad x_2(t) \to y_2(t)$$

δυο ζεύγη εισόδου-εξόδου, τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$$

- **Συστήματα**
- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα
- Γραμμικότητα: αν $x_1(t) \to y_1(t)$ και $x_2(t) \to y_2(t)$, τότε το σύστημα είναι **γραμμικό** αν είναι προσθετικό και ομογενές, δηλ. αν

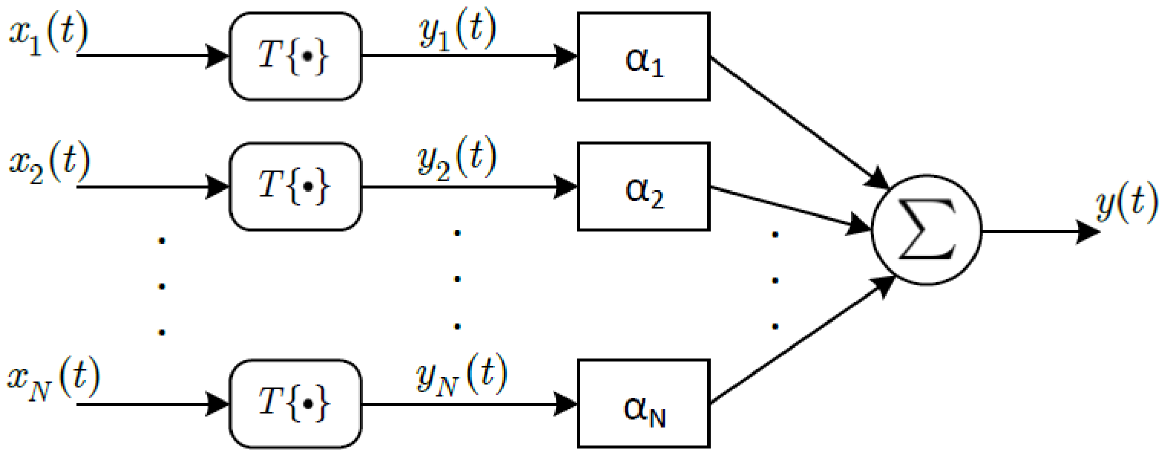
$$ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$$

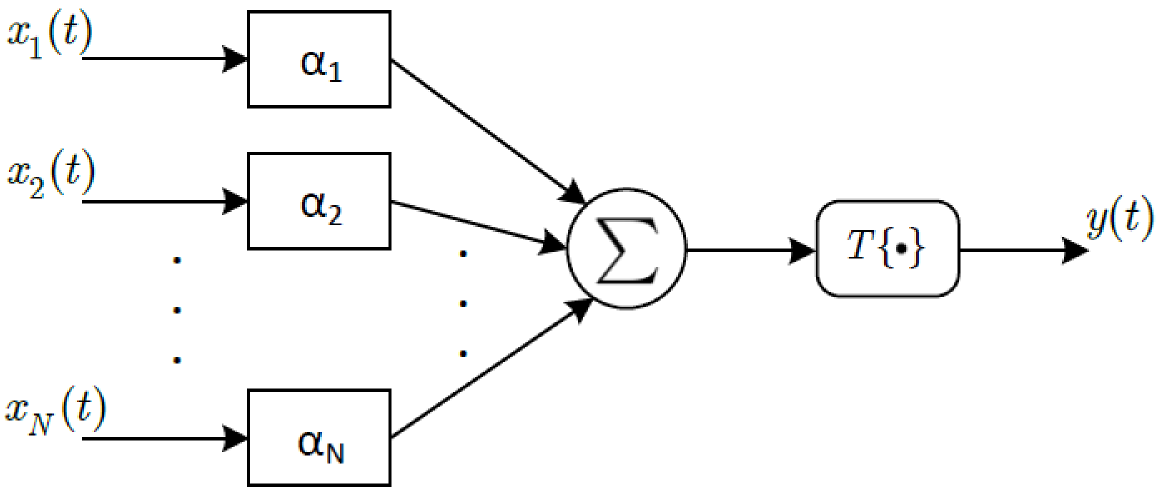
- Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι ένα *ιδανικό* σύστημα μικροφώνου-ηχείου
  - Μιλώντας στο μικρόφωνο, ακούμε ακριβώς τη φωνή μας
  - Αυξάνοντας της ένταση της φωνής μας (επί α), ακούμε τη φωνή μας αντίστοιχα πιο δυνατή κατά τον ίδιο παράγοντα (επί α)
  - Αν μιλήσουν δυο άτομα στο μικρόφωνο, οι φωνές τους (τα σήματα εισόδου) θα προστεθούν και στην έξοδο θα ακουστούν ξανά τα δυο σήματα μαζί, σαν να ακούγαμε τον καθένα ξεχωριστά και να αθροίζαμε τις φωνές τους

- Στην πράξη, το ηχείο έχει ένα άνω όριο έντασης που μπορεί να αναπαράξει (clipping effect)

- **Συστήματα**

- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα





- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t)$$

είναι γραμμικά

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Μη γραμμικό.

- $x_1(t) = a\,x(t) \Rightarrow x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sqrt{x_1(t)} = \sqrt{a \cdot x(t)} = \sqrt{a}\,\sqrt{x(t)}$

  $a\,y(t) = a\sqrt{x(t)}$

  $\neq$

- $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sqrt{x_1(t)}$

  $x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \sqrt{x_2(t)}$

  $\Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{x_1(t)} + \sqrt{x_2(t)}$

  $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \hat{y}(t) = \sqrt{x_1(t) + x_2(t)}$

  $\neq$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t)}$$

γραμμικό.

- $x_1(t) = a x(t)$

  $x_1(t) \to y_1(t) = \frac{1}{2} x_1(2-t) + x_1(t)$ $\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2} a x(2-t) + a x(t) =$

  $= a\left(\frac{1}{2} x(2-t) + x(t)\right) =$

  $= a y(t)$ ✓

- $x_1(t) \to y_1(t) = \frac{1}{2} x_1(2-t) + x_1(t)$

  $x_2(t) \to y_2(t) = \frac{1}{2} x_2(2-t) + x_2(t)$

  $x_1(t) + x_2(t) \to \tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(2-t) + x_2(2-t)\right) + \left(x_1(t) + x_2(t)\right)$ $\Rightarrow$

  $\Rightarrow \tilde{y}(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ✓

- **Συστήματα**
- Πάρα πολλά πρακτικά συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_k \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- RC κύκλωμα

$$\frac{d}{dt}\Delta V_c + \frac{1}{RC}\Delta \mathrm{V_c} = \frac{1}{R}\Delta V_s$$

- Απλός αρμονικός ταλαντωτής

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι τέτοια συστήματα είναι **γραμμικά**
  - …αν βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία
    - Ο πυκνωτής αφόρτιστος, η μάζα σε ακινησία
- Θα μας απασχολήσουν πολύ στη συνέχεια

- **Συστήματα**
- Χρονικά μεταβλητά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα
- Χρονική αμεταβλητότητα: αν $x(t) \rightarrow y(t)$, τότε το σύστημα είναι **χρονικά αμετάβλητο** αν

$$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

- Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι ένα *ιδανικό* σύστημα μικροφώνου-ηχείου με **σταθερή** καθυστέρηση
  - Μιλώντας στο μικρόφωνο, ακούμε ακριβώς τη φωνή μας μετά από k δευτ/πτα
  - Αν καθυστερήσουμε να μιλήσουμε κατά λ δευτ/πτα, θα καθυστερήσουμε να ακούσουμε τη φωνή μας κατά $\lambda + k$ δευτ/πτα
    - Όμως η φωνή που θα ακούσουμε θα είναι ακριβώς το ίδιο σήμα με πριν – δε θα έχει αλλάξει κάτι άλλο
- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα που καθυστερεί την έξοδό του όσο καθυστερεί η είσοδός του είναι **χρονικά αμετάβλητο**
- Ένα χρονικά **μεταβλητό** σύστημα δίνει διαφορετικές εξόδους για διαφορετικές καθυστερήσεις της εισόδου!
  - Τόσο σε επίπεδο καθυστέρησης όσο και σε επίπεδο μορφής της εξόδου!

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:
- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y(t) = tx(t-2)$$

$$y(t) = \sin\big(x(t+1)\big)$$

είναι χρονικά αμετάβλητα

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$\boxed{y(t) = tx(t-2)}$$

ΜΗ
Χ.Α.

Καθυστέρηση εισόδου:

$x_1(t) = x(t-t_0)$
$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
$\Rightarrow y_1(t) = t\,x_1(t-2) \Rightarrow y_1(t) = t\,x(t-2-t_0)$

Καθυστέρηση εξόδου:

$y(t-t_0) = (t-t_0)\,x(t-t_0-2) \neq y_1(t)$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$y(t) = \sin\big(x(t+1)\big)$$

Χ. Α.

Καθυστέρηση εισόδου:

$x_1(t) = x(t-t_0)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$\Rightarrow y_1(t) = \sin\big(x_1(t+1)\big) \Rightarrow y_1(t) = \sin\big(x(t+1-t_0)\big)$

καθυστέρηση εξόδου:

$y(t-t_0) = \sin\big(x(t-t_0+1)\big)$

$\Rightarrow y(t-t_0) = y_1(t)$

- **Συστήματα**

- Δυναμικά και Στατικά συστήματα

- Τα **δυναμικά** συστήματα απαιτούν προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = 2x(t-1) + x(t)$$
$$y(t) = 2y(t-2) + x(-t)$$
$$y(t) = tx(t-1) + u(t)$$

- Τα **στατικά** συστήματα δεν απαιτούν τέτοιες τιμές, δηλ. υπολογίζουν την έξοδό μόνο από τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που βρίσκονται

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = 2x(t)$$
$$y(t) = x^2(t)$$
$$y(t) = \log_{10}|x(t)|$$

- **Συστήματα**
- Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα
- **Αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της τρέχουσας τιμής της εξόδου απαιτεί *προηγούμενες* (χρονικά) τιμές της εισόδου
  - Συμπεριλαμβάνεται και η τρέχουσα χρονική στιγμή εισόδου
- Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t-2)$$
$$y(t) = x(t) + x(t-10)$$
$$y(t) = \frac{1}{x(t-10^5)}$$
$$y(t) = x(t)$$

- **Μη αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τρέχουσα τιμή της εξόδου
- Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t+2)$$
$$y(t) = \sqrt{x(t+1)}$$
$$y(t) = y(t-1) + 2x(t) - x(t+4)$$

- **Συστήματα**

- Ευσταθή και ασταθή συστήματα

- **Ευσταθή** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει ότι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη:

$$0 < |x(t)| < B_x \Rightarrow 0 < |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t-2)$$
$$y(t) = x(t) + x(t-10)$$

- **Ασταθή** ονομάζονται τα συστήματα που δεν ικανοποιούν την παραπάνω σχέση

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = \frac{1}{x(t+2)}$$

$$y(t) = \log|x(t)|$$

$$y(t) = y(t-1) + 2x(t) - x(t+4)$$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:
- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$0 < |x(t)| < B_x$

α) $y(t) = t + x(t-2)$ → ασταθές

β) $y(t) = \sin\big(x(t+1)\big)$ → ευσταθές

είναι ευσταθή

α) $|y(t)| = |t + x(t-2)| \leq |t| + |x(t-2)| \leq |t| + B_x$ δεν είναι φραγμένο

β) $|y(t)| = |\sin(x(t+1))| \leq 1$ είναι φραγμένο

- **Συστήματα**

- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**

- Έστω ένα σύστημα εισόδου $x(t)$ κι εξόδου $y(t)$ που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Για να μπορέσουμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση χρειαζόμαστε κάποιες **βοηθητικές συνθήκες (auxiliary conditions)**

$\sum c_k e^{x_k}$

- Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε:

$$f(x) = f'(x)$$

  - Γνωρίζετε ότι έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\boxed{f(x) = ce^x,}$ $c \in \mathbb{R}$
  - Χωρίς γνώση του $c \in \mathbb{R}$ η λύση μας δεν είναι μοναδική
  - Συνήθως μας δίνεται κάποια βοηθητική συνθήκη, όπως π.χ. $\boxed{f(0) = 2}$
  - Τότε ξέρουμε ότι $\boxed{f(x) = 2e^x}$

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Έστω ότι έχουμε N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες της μορφής

$$y(0^-), y'(0^-), y''(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$$

οι οποίες ισχύουν για $t = 0^-$, δηλ. περιγράφουν το σύστημα **πριν** εφαρμόσουμε κάποια είσοδο

- Έστω ότι για $t = 0$ εφαρμόζουμε στο σύστημά μας μια είσοδο $x(t)$
- Η έξοδος $y(t)$ αποτελείται από το άθροισμα δυο **ανεξάρτητων** μεταξύ τους παραγόντων

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

με

- ❑ $y_{zi}(t)$: την **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**
- ❑ $y_{zs}(t)$: την **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Η απόκριση μηδενικής εισόδου περιγράφει το «κομμάτι» της εξόδου που σχετίζεται με την **κατάσταση του συστήματος πριν την εφαρμογή της εισόδου**
  - Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος ήδη, το ελατήριο είναι τεντωμένο και το σώμα κινείται ήδη
  - Αυτή η πληροφορία για την αρχική κατάσταση του συστήματος πρέπει κάπως να «κωδικοποιηθεί» στη διαφορική μας εξίσωση
  - Πως? Θέτοντας κατάλληλες **μη μηδενικές βοηθητικές συνθήκες**!
  - Σε αυτήν την απόκριση, θεωρούμε ότι **η είσοδος είναι μηδενική**!

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Η απόκριση μηδενικής κατάστασης περιγράφει το «κομμάτι» της εξόδου που σχετίζεται μόνο **με την εφαρμογή της εισόδου**
  - Θεωρώντας ότι η κατάσταση του συστήματος είναι «μηδενική» → το σύστημα ηρεμεί
  - Ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, το ελατήριο σε θέση ισορροπίας, το σώμα ακίνητο
  - Σε αυτήν την απόκριση, θεωρούμε ότι οι **βοηθητικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές**!
  - Αντίθετα, η **είσοδος** του συστήματος είναι **μη μηδενική**!
- Ονομάζουμε τις βοηθητικές συνθήκες που ορίζονται για $t = 0^-$ ως **αρχικές συνθήκες του συστήματος**

- **Συστήματα**

- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**

- Για παράδειγμα, θεωρήστε έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή

- Ξέρετε (από το HY112-Φυσική Ι, όσοι/ες συμμετείχατε) ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνησή του είναι η

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

- Επίσης, ξέρετε ότι η γενική λύση είναι της μορφής

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

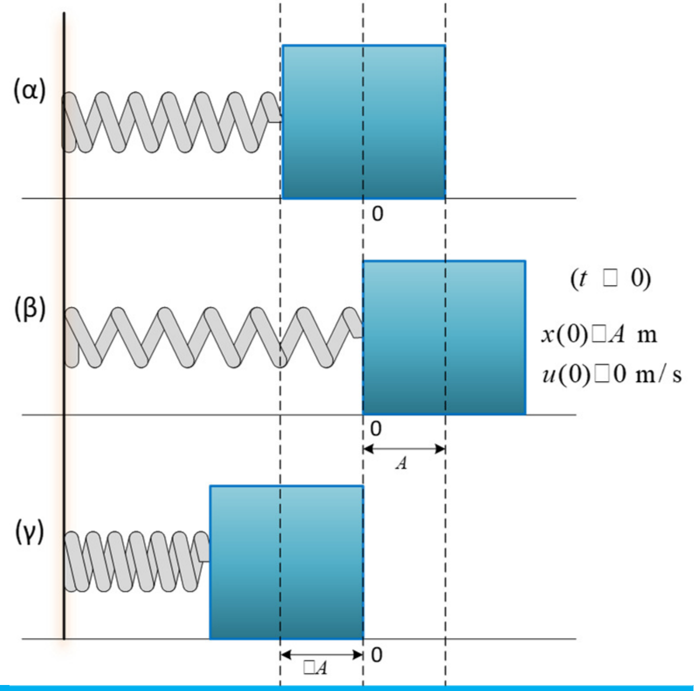
για $t > 0$

- Αν αρχίσουμε να μελετάμε το πρόβλημα στη θέση (β) τότε οι αρχικές συνθήκες είναι οι

$$x(0) = A$$
$$u(0) = x'(0) = 0$$

- Υπό αυτές τις συνθήκες:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t)$$



- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $\boldsymbol{y_{zi}(t)}$**
- Θεωρούμε ότι η είσοδος είναι μηδέν, $x(t) = 0 \; \forall \; t$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y_{zi}(t) = 0$$

- Μπορεί να δειχθεί ότι

$$y_{zi}(t) = ce^{\lambda t}, \qquad \lambda, c \in \mathbb{C}$$

- Τότε

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k e^{\lambda t} = 0$$

$$ce^{\lambda t} \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$$

- Για να ισχύει η ισότητα πρέπει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $\boldsymbol{y_{zi}(t)}$**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0 \iff a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots + a_N\lambda^N = 0$$

- Παραγοντοποιώντας το πολυώνυμο

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

- Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος
- Οι ρίζες του πολυωνύμου $\lambda_i, i = 1,2,..,N$ ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος
- Άρα υπάρχουν N διαφορετικά c, λ που ικανοποιούν την αρχική σχέση
- Μπορεί να δειχθεί ότι το άθροισμα των παραπάνω ριζών ικανοποιεί την ίδια σχέση
- Άρα

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}, t > 0 \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}\right) u(t)$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $\boldsymbol{y_{zi}(t)}$**
- Η παρακάτω σχέση

$$\boxed{y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}, t > 0} \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}\right) u(t)$$

ισχύει μόνο αν οι ρίζες λ_i είναι απλές

- Σε περίπτωση που υπάρχει πολλαπλή ρίζα στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω $\lambda = \lambda_1$, τότε το πολυώνυμο γράφεται ως

$$(\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1})(\lambda - \lambda_{r+2}) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

και η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}(t) = \sum_{l=1}^{r} c_l t^{l-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{k=r+1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}$$

- Τα c_i υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα**

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\boxed{y(0^-) = 0, y'(0^-) = -2}$$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t)$$

$$\boxed{y(0^-) = 0, y'(0^-) = -2}$$

Χ.Π.: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3$

$$\boxed{y_{zi}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t > 0}$$

- $y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$
- $\dot{y}_{zi}(0^-) = \left(c_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right)\Big|_{t=0} = -2c_1 - 3c_2 = -2$

$\Rightarrow c_1 = -2 \Rightarrow c_2 = 2$

$y_{zi}(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-3t}, \quad t > 0 \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(-2e^{-2t} + 2e^{-3t}\right)u(t)$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

- Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\omega_0^2x(t)=0$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0^-)=A, x'(0^-)=0$$

Χ.Π. $\lambda^2+\omega_0^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=j\omega_0\\ \lambda_2=-j\omega_0\end{cases}$ $\quad x(t)=c_1e^{j\omega_0 t}+c_2e^{-j\omega_0 t}, t>0$

$$x(0^-)=A \Rightarrow c_1+c_2=A \overset{(1)}{\Rightarrow} c_1=c_2=\frac{A}{2}$$

$$\dot{x}(0^-)=\left(c_1\cdot j\omega_0\, e^{j\omega_0 t}-c_2\, j\omega_0 e^{-j\omega_0 t}\right)\Big|_{t=0}=(c_1-c_2)\cdot j\omega=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1-c_2=0 \Rightarrow c_1=c_2 \quad (1)$$

$$x(t)=\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}, t>0 \Rightarrow x(t)=A\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=A\cos(\omega_0 t)\,u(t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ