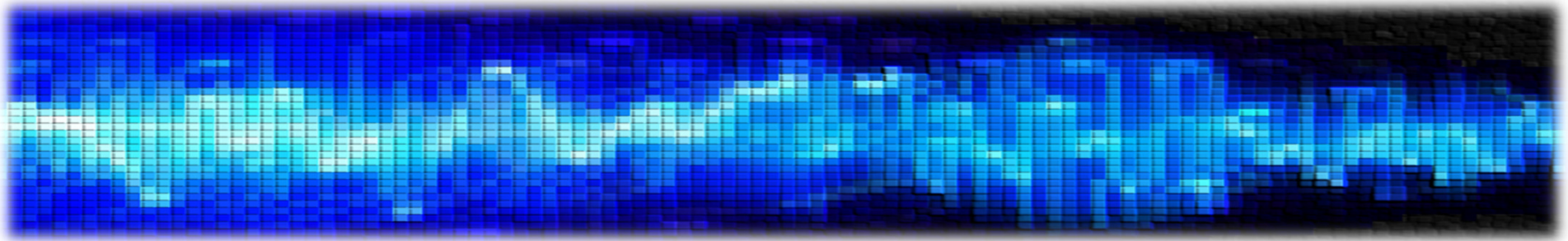

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 2^Η



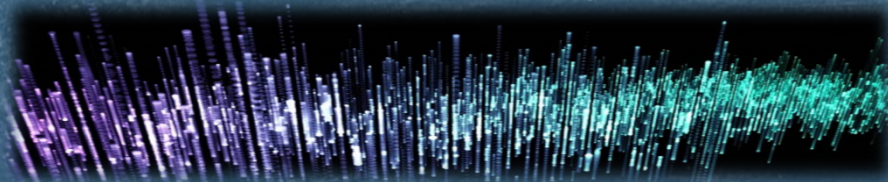
- Σήματα και Συστήματα



Τι περιέχει το ΗΥ215?

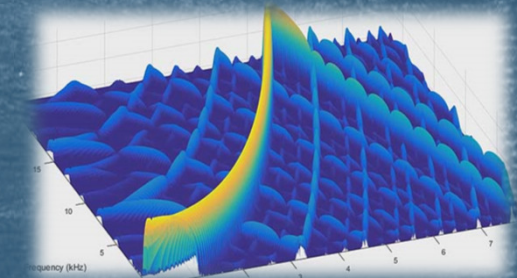
1^ο Κομμάτι

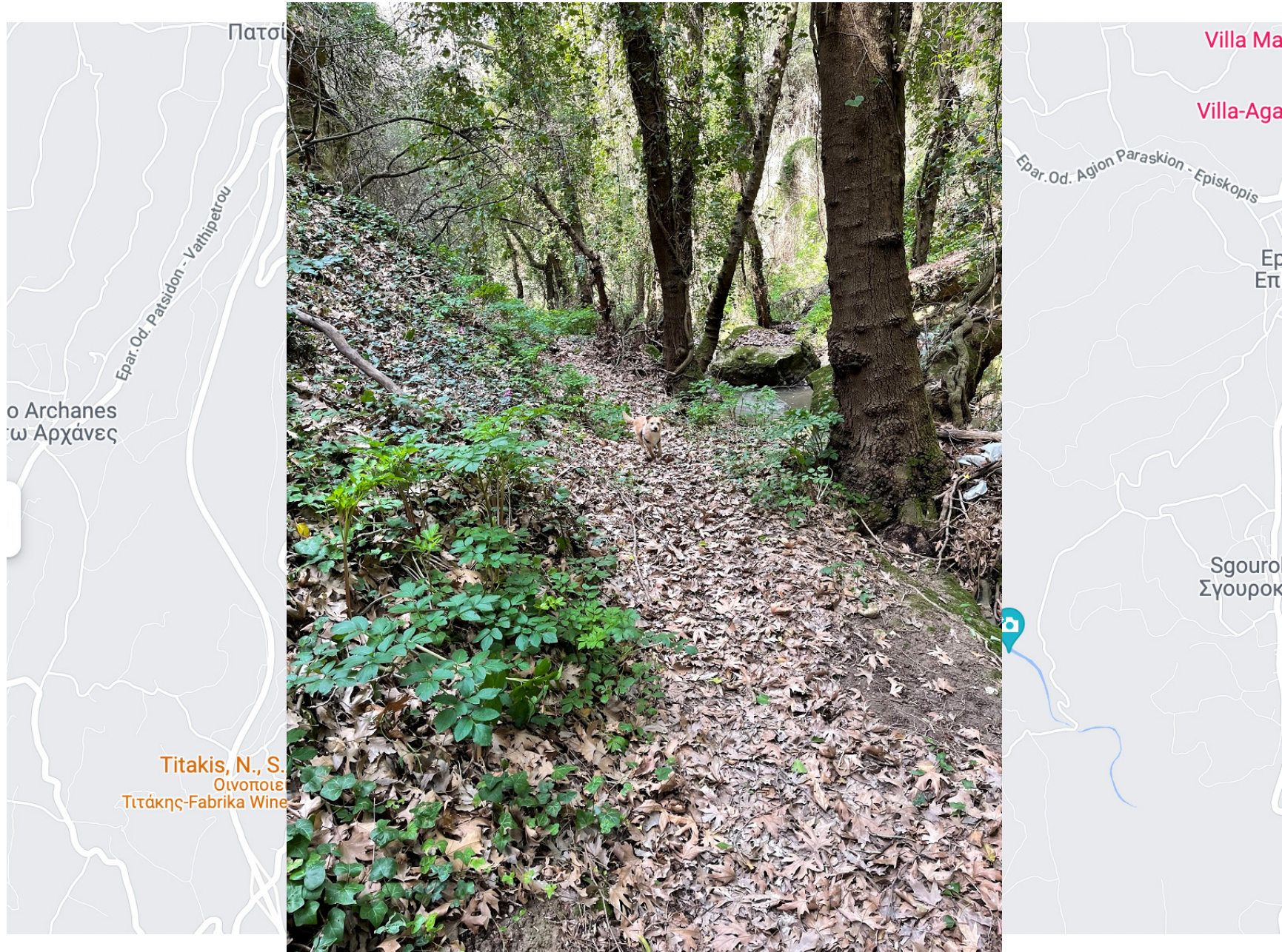
- ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier



2^ο Κομμάτι

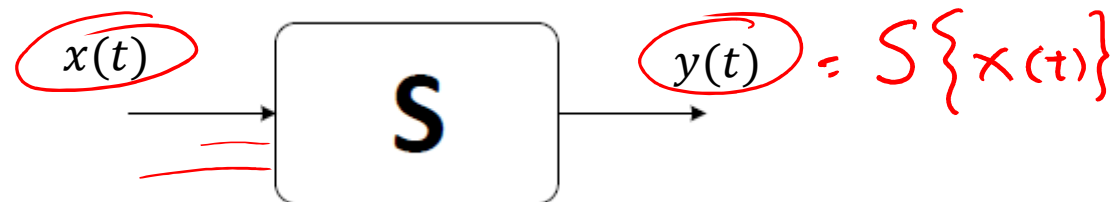
- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ▶ Τυχαία Σήματα
- ▶ Δειγματοληψία
- ▶ Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες







- **Σήμα:** φορέας πληροφορίας
 - Π.χ. εικόνα, ήχος, βίντεο, σύνολο δεδομένων, κλπ.
- Στα δικά μας πλαίσια, θα θεωρούμε ένα σήμα ως μια χρονοσειρά, δηλ. μια συνάρτηση του χρόνου
 - Η πληροφορία βρίσκεται στις μεταβολές του σήματος ως προς το χρόνο
- **Σύστημα:** δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$



- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου
 - Υπάρχουν και συστήματα πολλαπλών εισόδων ή/και πολλαπλών εξόδων
- Ας μιλήσουμε πρώτα για τα σήματα...
 - ... για τα οποία είπαμε ότι θα περιγράψουμε ως **συναρτήσεις του χρόνου** – $x(t)$

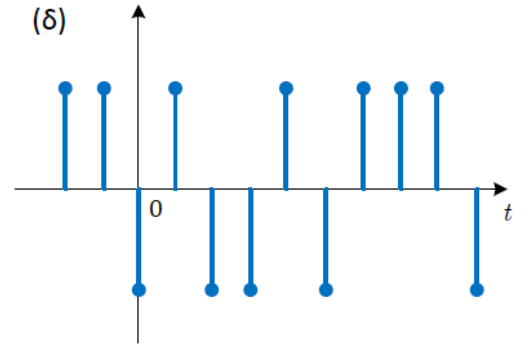
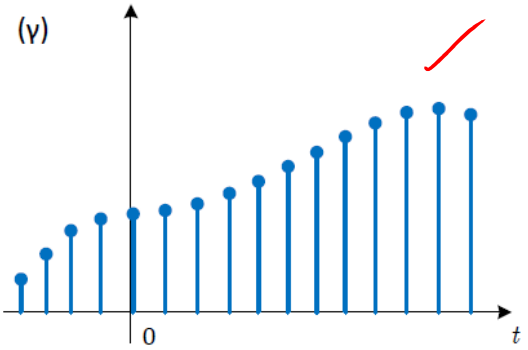
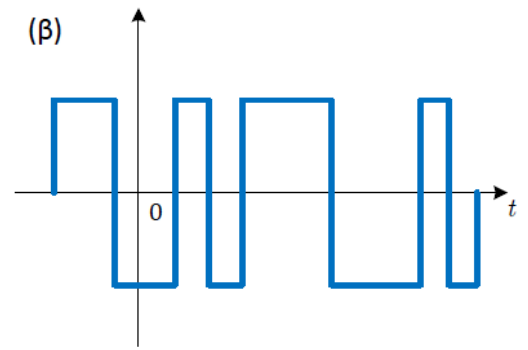
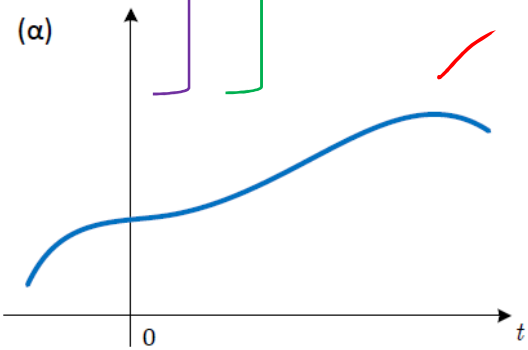
• Σήματα

• Κατηγορίες σημάτων:

1. Συνεχούς ή διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά ή ψηφιακά σήματα
3. Σήματα περιοδικά ή απεριοδικά
4. Σήματα ενέργειας ή ισχύος
5. Ντετερμινιστικά ή στοχαστικά

HY215

HY370



- **Σήματα**

- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

- Θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα σήμα με έναν αριθμό
 - Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να αντιπροσωπεύει το «μέγεθος» του σήματος

- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Αν $0 < E_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ενέργειας
- Αν $0 < P_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!
 - Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x(t) = t^n, \quad x(t) = e^{at}$$

δεν είναι τίποτε από τα δυο

- **Σήματα**

- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (εν γένει) εκ των προτέρων αν ένα σήμα είναι ενέργειας ή ισχύος (η τίποτε)

- Υπάρχουν όμως κάποιοι «κανόνες» για να μην υπολογίζουμε κάθε φορά τυχαία μια εκ των δυο ποσοτήτων (και κάποιες φορές αναγκαστικά και τις δυο)

- **Κανόνες:**

- Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == φραγμένο πλάτος για κάθε t

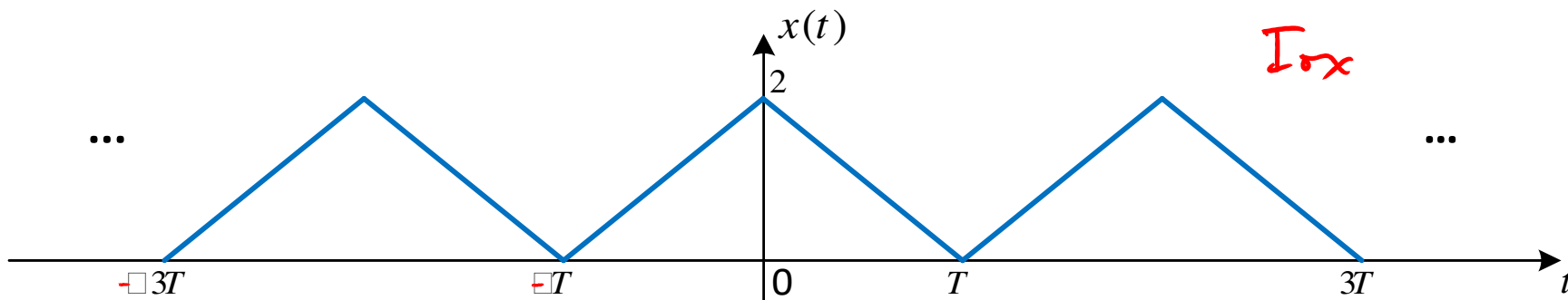
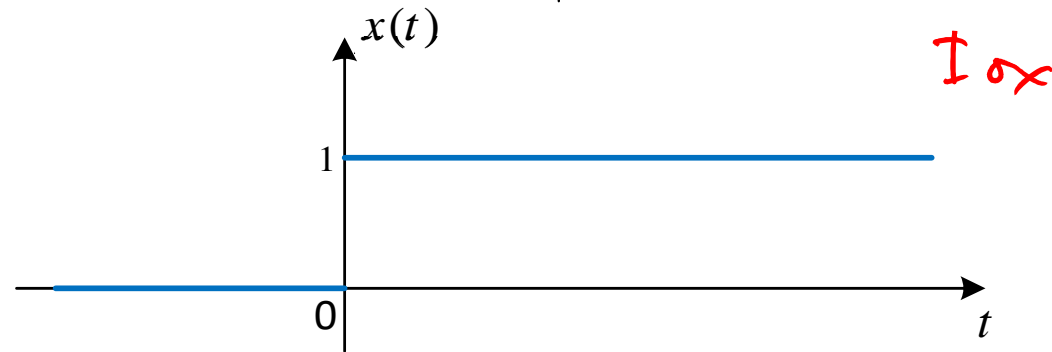
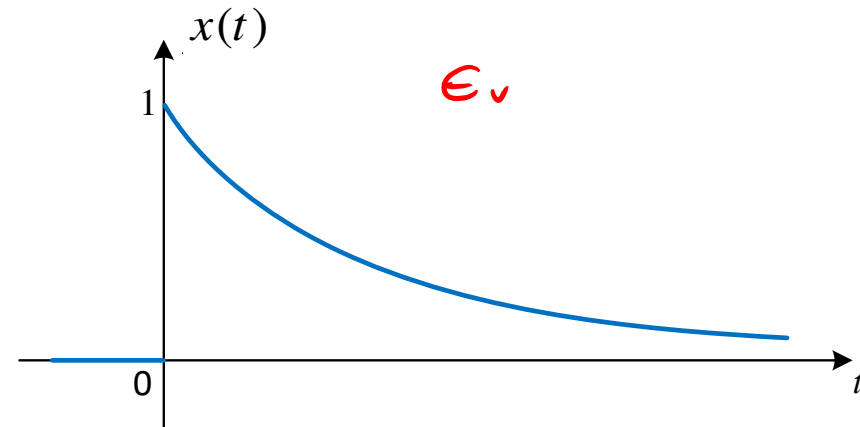
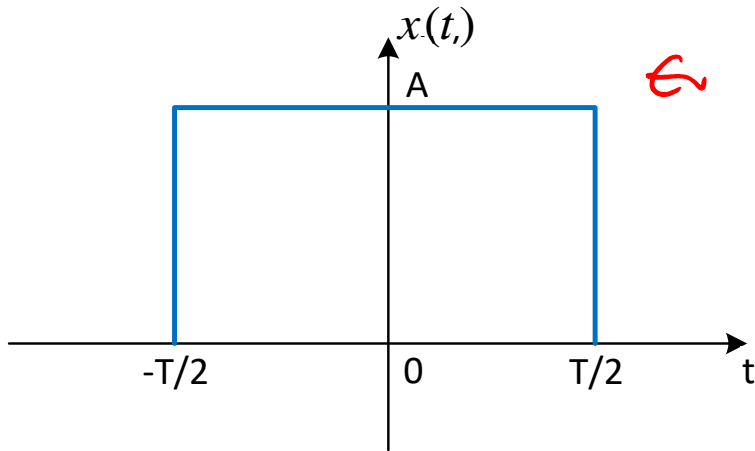
- Σήμα Ενέργειας**


- ✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο
 - ✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \underline{0}$
 - ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

- Σήμα Ισχύος**

- ✓ Άπειρης διάρκειας
 - ✓ Περιοδικό

- Σήματα
- Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Κάθε σήμα που μπορεί να φτιάξει κανείς στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση είναι σήμα **ενέργειας**
- Όμως τα σήματα ισχύος παρέχουν ένα αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για γενικότερη μελέτη σημάτων και συστημάτων 
- Ας δούμε μερικά παραδείγματα

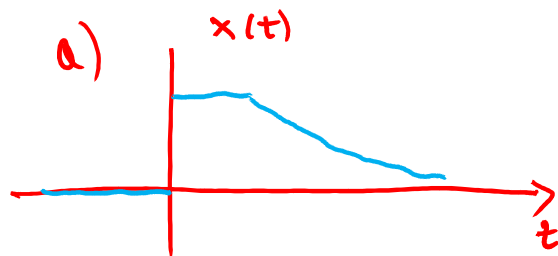
• Σήματα

• Παράδειγμα:

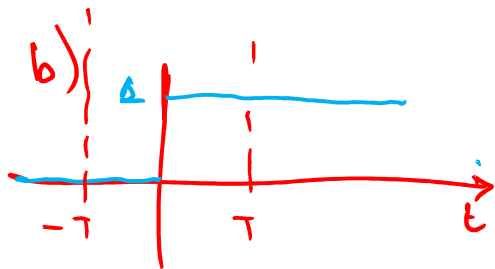
○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

a) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

b) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ *1 σήμα*



$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$



$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T} \right)$

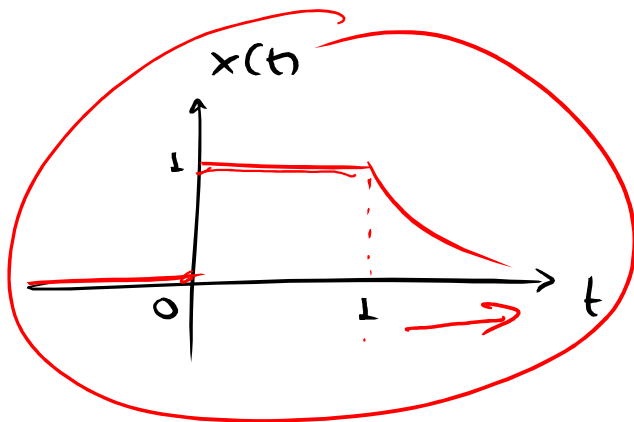
$\Rightarrow P_x = \frac{1}{2} < \infty$

• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

■ $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$ ✓ Δοκιμάσαμε την ενέργεια:



$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 0^2 dt + \int_0^1 1^2 dt + \int_1^{+\infty} (e^{-t})^2 dt \\
 &= t \Big|_0^1 + \int_1^{+\infty} e^{-2t} dt = (1-0) + \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_1^{+\infty} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} - e^{-2} \right) = 1 - \frac{1}{2} (0 - e^{-2}) = 1 + \frac{1}{2e^2}
 \end{aligned}$$

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

- Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

• Σήματα

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

• Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

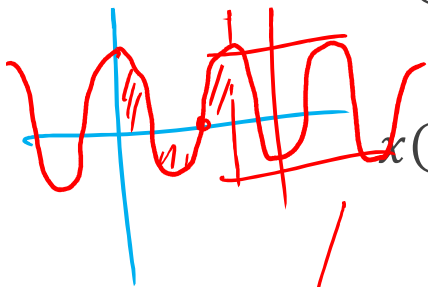
ΕΒΑ

• Μπορεί κανείς εύκολα (αλλά με κάμποσες πράξεις) να δείξει ότι

→ $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi), A \in \mathbb{R} \rightarrow P_x = \frac{A^2}{2}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \alpha = 0$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^N A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i), A_i \in \mathbb{R} \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^N \frac{A_i^2}{2}$$



→ $x(t) = A e^{j2\pi f_0 t}, A \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = |A|^2$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A^2}{2} \cdot T = \frac{A^2}{2}$$

→ $x(t) = \sum_{i=0}^N A_i e^{j2\pi f_i t}, A_i \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^N |A_i|^2$

• Εξασκηθείτε αποδεικνύοντας αναλυτικά τα παραπάνω! ☺

$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt =$

$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2 \cdot 2\pi f_0 t) \right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t) dt =$

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t
 - Χρονική ολίσθηση (time shifting) ✓
 - Χρονική αντιστροφή (time reversal) ✓
 - Χρονική κλιμάκωση (time scaling) ✓

- Σήματα

- Μετασχηματισμοί σημάτων

- Χρονική μετατόπιση/ολίσθηση (time shifting)

- Η χρονική ολίσθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη μετατόπιση του σήματος δεξιά ή αριστερά στον άξονα του χρόνου

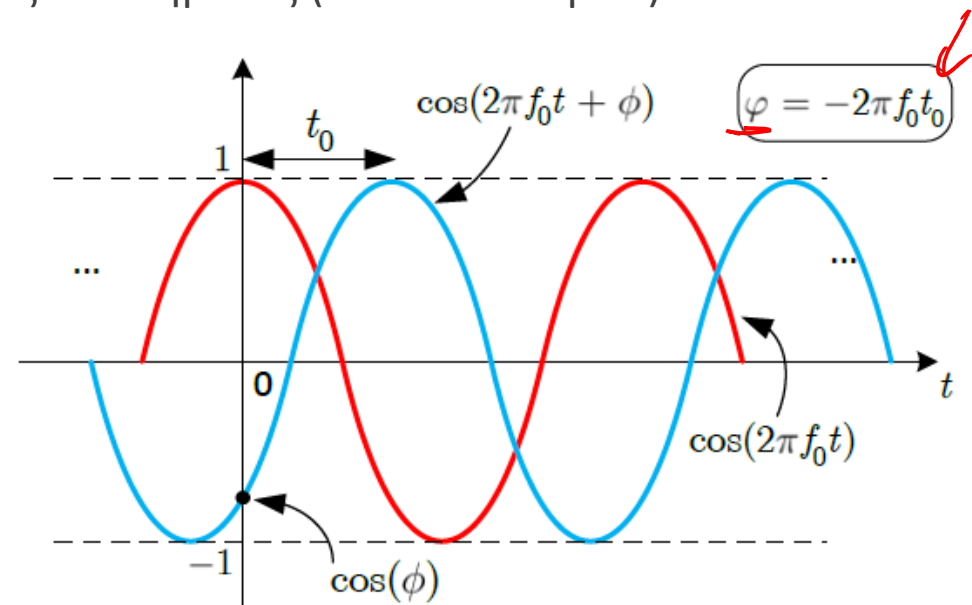
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $t - t_0$, με t_0 θετικό ή αρνητικό

- Αν t_0 θετικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα δεξιά \rightarrow καθυστέρηση

- Αν t_0 αρνητικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα αριστερά \rightarrow προήγηση

- Η χρονική ολίσθηση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- Θυμηθείτε τα ημιτονοειδή σήματα



• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το καθυστερημένο κατά $t_0 = 2$ σήμα για το παρακάτω σήμα

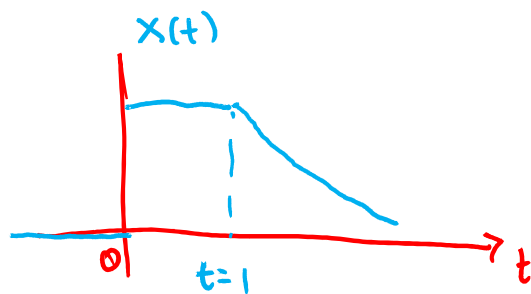
$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

$$t_0 = -2$$

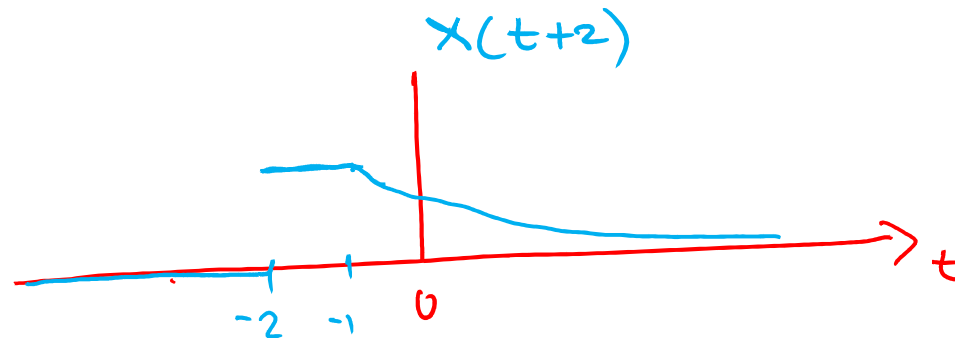
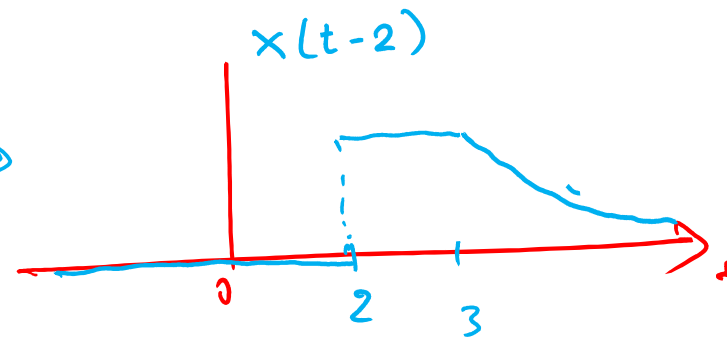
$$t \rightarrow t-2$$

$$x(t-2) = \begin{cases} 0 & t-2 < 0 \Rightarrow t < 2 \\ 1 & 0 < t-2 < 1 \Rightarrow 2 < t < 3 \\ e^{-(t-2)} & t-2 > 1 \Rightarrow t > 3 \end{cases}$$

και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.



$t_0 = 2$ →



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Χρονική αντιστροφή (time reversal)
- Η χρονική αντιστροφή δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $-t$
 - Αν το σήμα «ζει» στο θετικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στον αρνητικό ημιάξονα
 - Αν το σήμα «ζει» στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στο θετικό ημιάξονα
 - Αν το σήμα «ζει» και στους δυο άξονες, τότε το τμήμα του θετικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στον αρνητικό ημιάξονα και το τμήμα του αρνητικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στο θετικό ημιάξονα
 - Η χρονική αντιστροφή ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

• Σήματα

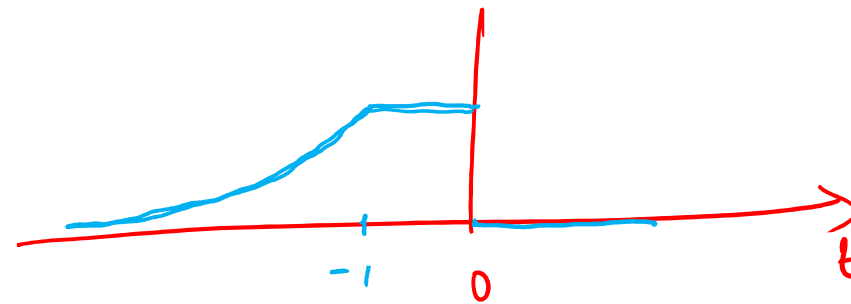
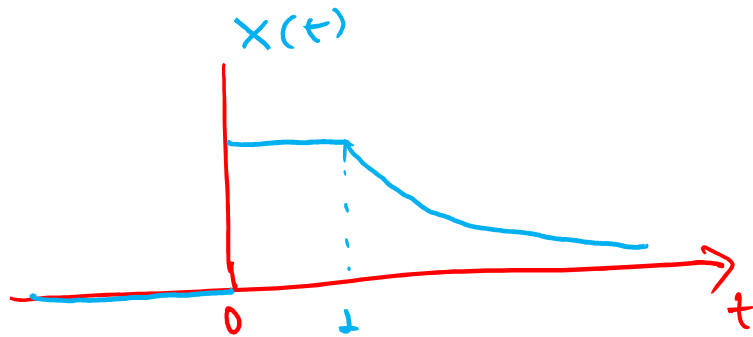
• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το σήμα $x(-t)$ για το παρακάτω σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

$$x(-t) = \begin{cases} 0 & -t < 0 \Rightarrow t > 0 \\ 1 & 0 < -t < 1 \Rightarrow -1 < t < 0 \\ e^{+t} & -t > 1 \Rightarrow t < -1 \end{cases}$$

και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.



- **Σήματα**
- Μετασχηματισμοί σημάτων
 - Χρονική κλιμάκωση (time scaling)
- Η χρονική κλιμάκωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη συμπίεση ή την επέκταση του σήματος στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή at , $\alpha \in \mathbb{R}$
 - Αν το σήμα «ζει» στο διάστημα $[c, d]$, τότε η κλιμάκωση κατά $a \neq 1$ θα το «μεταφέρει» στο διάστημα $[ca, da]$
 - Αν ο παράγοντας κλιμάκωσης είναι αρνητικός, γίνεται χρονική αντιστροφή παράλληλα με τη χρονική κλιμάκωση
 - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

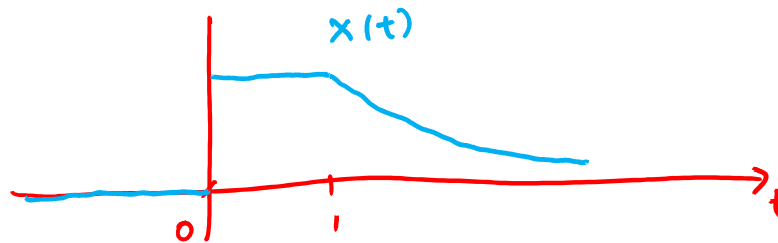
• Σήματα

• Παράδειγμα:



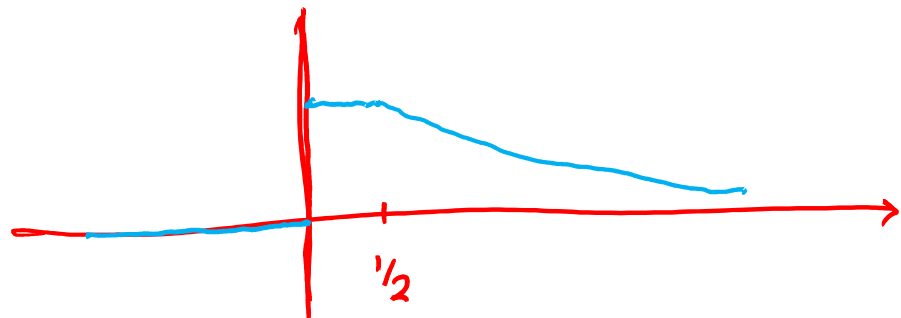
○ Βρείτε τα σήματα $x(2t)$ και $x\left(\frac{t}{3}\right)$ για το παρακάτω σήμα

$$\blacksquare x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$



και σχεδιάστε τα όλα.

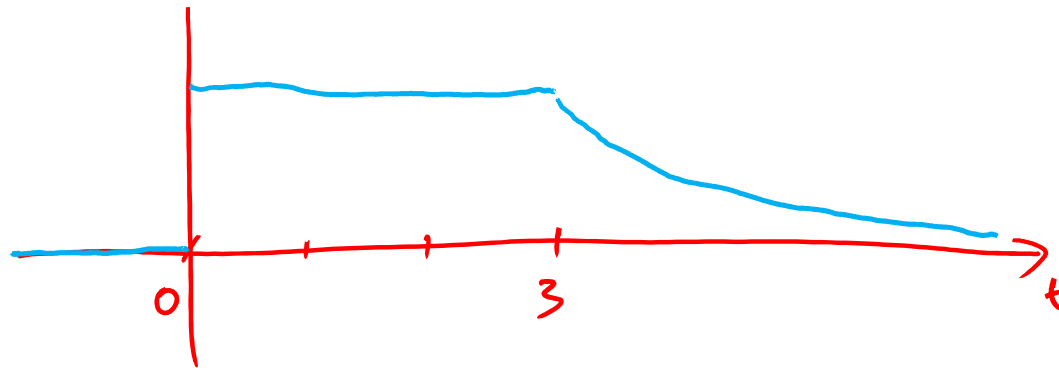
$$\downarrow) \underline{x(2t)} = \begin{cases} 0, & 2t < 0 \\ 1, & 0 < 2t < 1 \\ e^{-2t}, & 2t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1/2 \\ e^{-2t}, & t > 1/2 \end{cases}$$



- Σήματα

- Παράδειγμα:

$$x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \frac{t}{3} < 0 \\ 1 & 0 < \frac{t}{3} < 1 \\ e^{-\frac{t}{3}} & \frac{t}{3} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 3 \\ e^{-t/3} & t > 3 \end{cases}$$



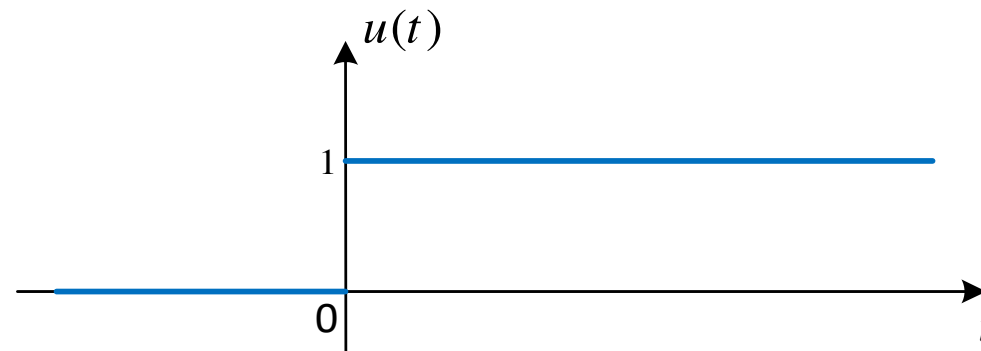
- **Σήματα**
- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**
- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες
- Αυτά είναι:
 - Η βηματική συνάρτηση
 - Ο τετραγωνικός παλμός
 - Ο τριγωνικός παλμός
 - Η κρουστική συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα

- **Σήματα**

- **Η βηματική συνάρτηση**

- Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές της είναι ως σήμα-διακόπτης (off-on)
 - δηλ. ως ένα ιδανικό μοντέλο ενός σήματος που πάει από $0 \rightarrow 1$ ακαριαία
- ...ή για να «κόψουμε» τμήματα άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς την με αυτά
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τη βηματική συνάρτηση
 - ...εκτός από τη διαίρεση σήματος με τη βηματική (διαίρεση με μηδέν)

- **Σήματα**

- **Ο τετραγωνικός παλμός**

- Ο τετραγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

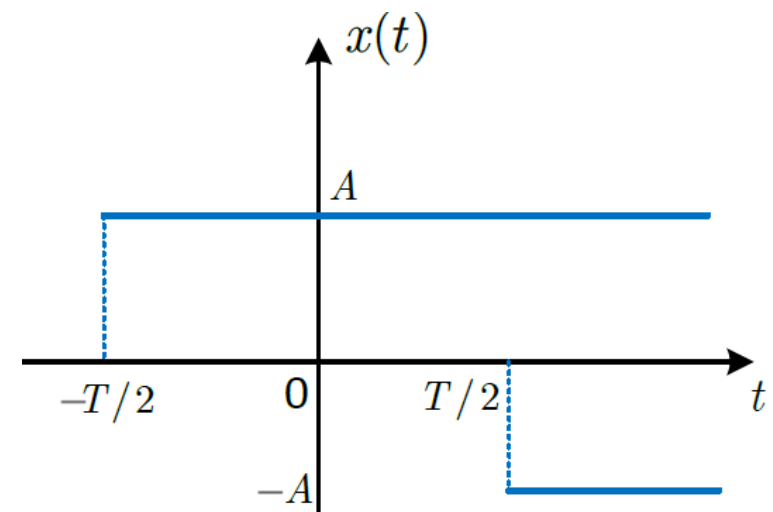
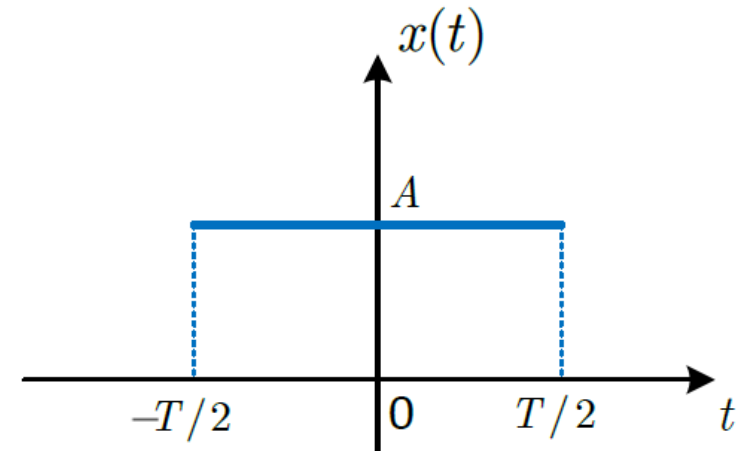
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά

- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τετραγωνικό παλμό

- ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

- Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών συναρτήσεων

- ...όπως στο σχήμα



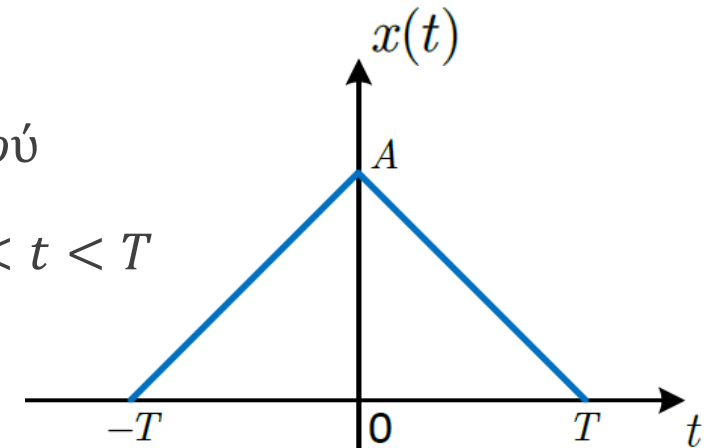
- Σήματα

- Ο τριγωνικός παλμός

- Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ A \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases}$$

$$= A \operatorname{tri} \left(\frac{t}{T} \right)$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
 - ...αλλά δίνοντας περισσότερο βάρος στις τιμές του σήματος στο κέντρο του παλμού
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τριγωνικό παλμό
 - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

• Προσέξτε ότι στον συνοπτικό τύπο του παλμού ο παρονομαστής T είναι η **μισή** διάρκεια του, ενώ στον τετραγωνικό παλμό ο παρονομαστής T ήταν **όλη** η διάρκεια!

• Σήματα

• Παράδειγμα:

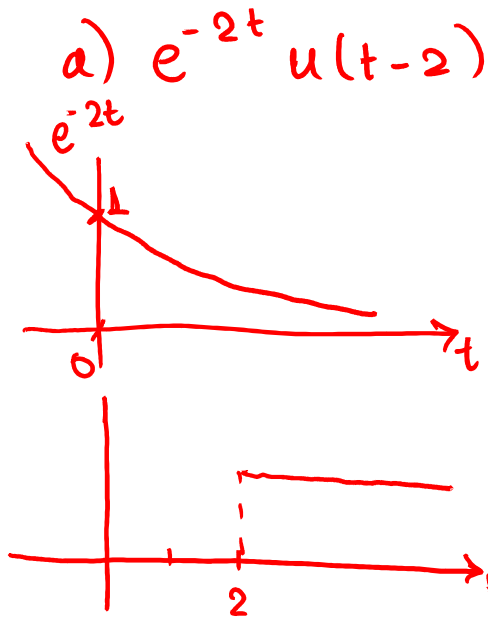
○ Σχεδιάστε τα σήματα:

(α) $e^{-2t}u(t-2)$

(γ) $4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

(β) $u(t^2 - 4)$

(δ) $\text{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$



β) $u(t^2 - 4)$

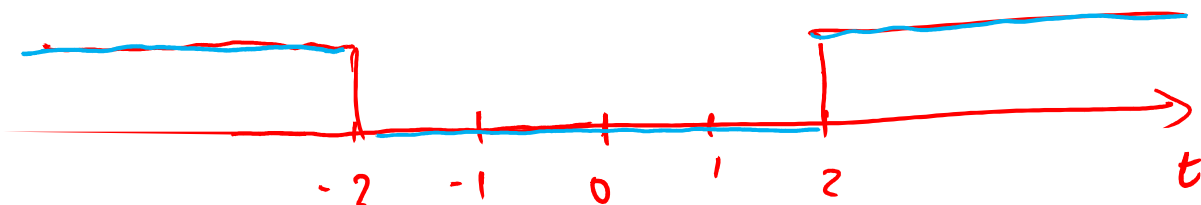
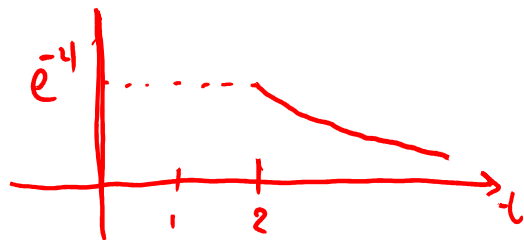
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \Rightarrow u(t^2 - 4) = \begin{cases} 0 & t^2 - 4 < 0 \\ 1 & t^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$t^2 - 4 = t^2 - 2^2 = (t-2)(t+2)$$

$$(t-2)(t+2) > 0 \begin{cases} \text{a) } t-2 > 0 \Rightarrow t > 2 \\ \text{b) } t+2 > 0 \Rightarrow t > -2 \end{cases} \quad \boxed{t > 2}$$

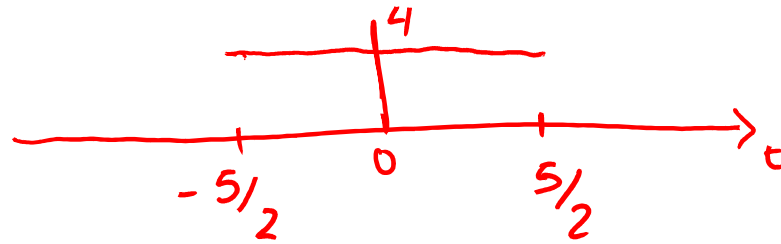
$$\begin{cases} \text{b) } t-2 < 0 \Rightarrow t < 2 \\ \text{t}+2 < 0 \Rightarrow t < -2 \end{cases} \quad t < -2$$

Άρα:

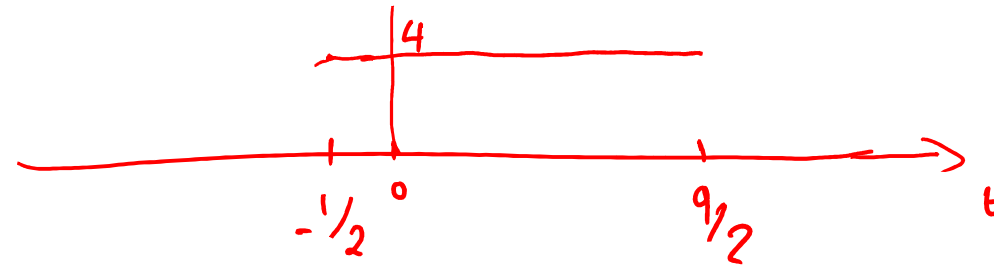


δ)

$$4 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{5}\right) :$$



$$4 \operatorname{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right) :$$



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ , **αλλά με σταθερό μοναδιαίο εμβαδό**, τι θα κάναμε?
 - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$

- ...και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t)$
- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία:

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$$

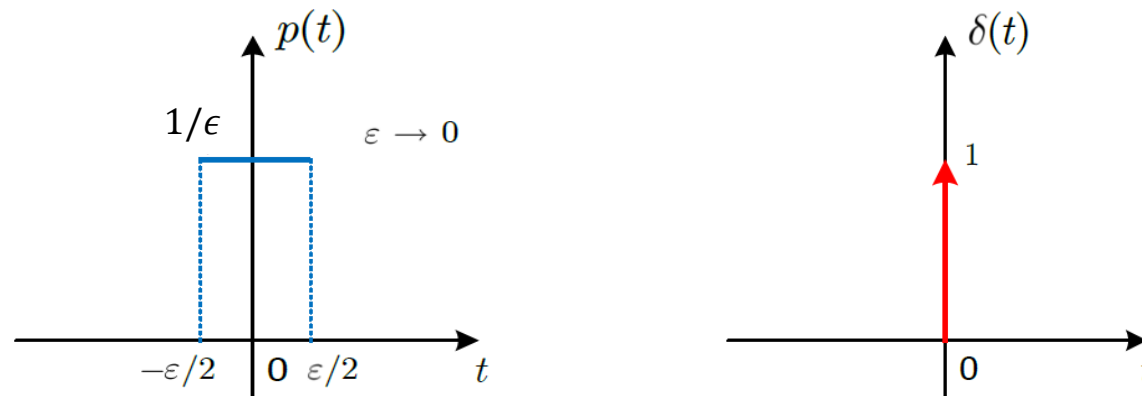
όταν $\epsilon \rightarrow 0$

- Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **κρουστική συνάρτηση Δέλτα** – ή απλά **συνάρτηση Δέλτα** στο εξής – και γράφεται ως $\delta(t)$
 - Η συνάρτηση Δέλτα **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση – είναι **κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση!**
- Η συνάρτηση Δέλτα λοιπόν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω
- Παρατηρήστε τη σχεδίαση της συνάρτησης Δέλτα

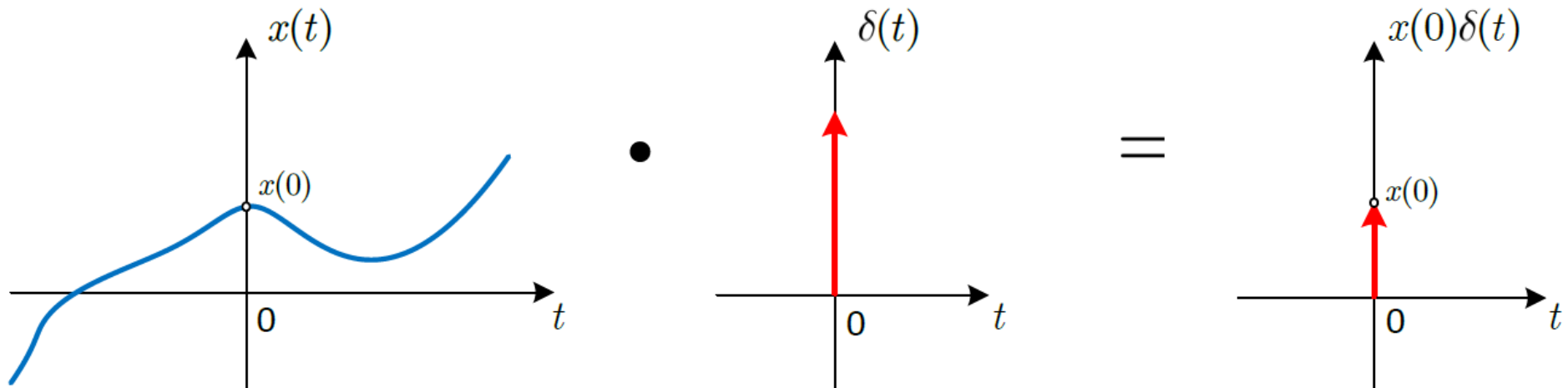


- Προσέξτε ότι το 1 στη «μύτη» της συνάρτησης Δέλτα **δεν** είναι το πλάτος της!
 - Αυτό είναι άπειρο!
- Είναι η τιμή του «εμβαδού» της
- Οι πράξεις που επιτρέπονται με τη συνάρτηση Δέλτα είναι πρόθεση, αφαίρεση, και πολλαπλασιασμός με συνεχή συνάρτηση. Οι μετασχηματισμοί που είδαμε επιτρέπονται όλοι

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Αν πολλαπλασιάσουμε ένα συνεχές σήμα με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία «ζει» τη χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε ουσιαστικά αλλάζουμε το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ουσιαστικά η παραπάνω πράξη **δειγματοληπτεί** το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0
- Σχηματικά:



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Η προηγούμενη ιδιότητα μας βοηθά να ορίσουμε σήματα που έχουν τιμές μόνο για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -1 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$
$$= 1\delta(t + 1) - 1\delta(t) + 2\delta(t - 3)$$

- Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση της δειγματοληψίας, περιμένουμε να λάβουμε το εμβαδό κάτω από την επιφάνεια $x(t)\delta(t - t_0)$...
 - ... το οποίο είναι $x(t_0)$

- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

- Μερικές ακόμα ιδιότητες που μπορείτε να αποδείξετε είναι οι:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad a \neq 0$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

- Σήματα

- Παράδειγμα:

- Υπολογίστε τα

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$(3t^2 + 1)\delta(t) = (3t^2 + 1)\Big|_{t=0} \delta(t) = \delta(t)$$

$$(t^2 + \cos \pi t)\delta(t - 1) = (t^2 + \cos \pi t)\Big|_{t=1} \delta(t-1) = (1 + \cos \pi)\delta(t-1) = 0 \delta(t-1) = 0 \quad \forall t$$

$$e^{-t}\delta(2t) = e^{-t} \frac{1}{2} \delta(t) = \frac{1}{2} e^{-t}\Big|_{t=0} \delta(t) = \frac{1}{2} \delta(t)$$

$$t\delta(t) = t\Big|_{t=0} \delta(t) = 0\delta(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\cos(t)\delta(t - \pi) = \cos(t)\Big|_{t=\pi} \delta(t-\pi) = \cos \pi \delta(t-\pi) = -\delta(t-\pi)$$

• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (3t^2 + 1)\delta(t)dt = 3t^2 + 1 \Big|_{t=0} = 1$$

$$\int_{-1}^1 (3t^2 + 1)\delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-1}^2 (\log_{10} 10t^2)\delta(t + 1)dt = 0$$

$t - (-1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t - 1)dt = 0$$

$0 \forall t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\delta(2t)dt = \frac{1}{2}$$

$e^{-t} \frac{1}{2} \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \checkmark$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt$$

$= x(t_0) \cdot 1$

$$\int_{-1}^{\infty} (3t^2 + 1)\delta(t)dt = 0$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Η (ήδη!) γνωστή μας βηματική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική
 - Έχει άραγε παράγωγο? Αν ναι, ποια είναι αυτή?
- Από τον ορισμό της

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η παράγωγός της είναι παντού μηδέν εκτός από τη στιγμή $t = 0$, όπου δεν ορίζεται παράγωγος

- Αλλιώς, η παράγωγος είναι άπειρη
- Άρα μια «γενικευμένη» έννοια της παραγώγου της βηματικής συνάρτησης θα ικανοποιούσε την ιδιότητα

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

- Επίσης από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} u'(t) dt = u(\epsilon) - u(-\epsilon) = 1 - 0 = 1$$

για $\epsilon > 0$

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση
- Συνολικά

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) dt = 1$$

- Μα αυτές οι ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα!
- Άρα η (γενικευμένη) **παράγωγος** της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα:

$$u'(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

- Άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Σύνοψη:

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα	
Ορισμός	$\delta(t) = 0, t \neq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{ a }, a \in \mathbb{R} - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t)$
Παραγωγή	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = -\frac{d}{dt}x(t)\Big _{t=0}$
n -οστή παραγωγή	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(t)\Big _{t=0}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

