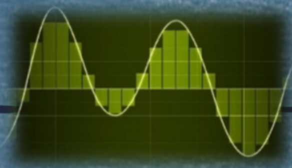
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η

- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

Τι περιέχει το ΗΥ215?

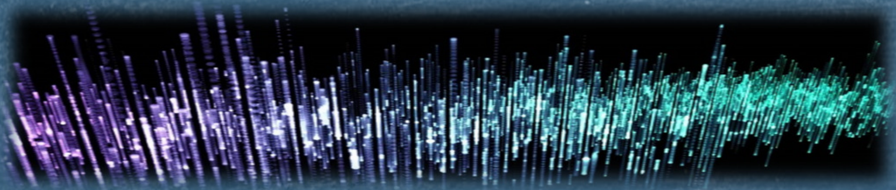


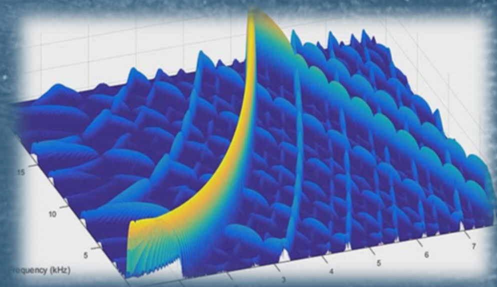
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

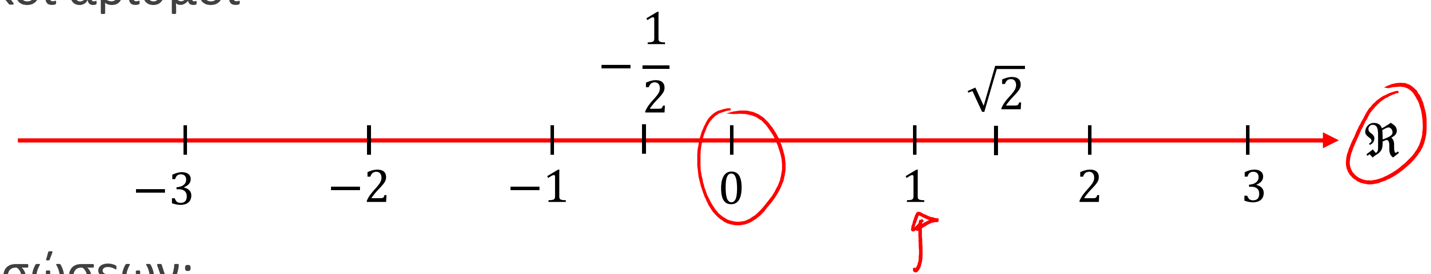
2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες





- Πραγματικοί αριθμοί



- Λύσεις εξισώσεων:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \in \Re$$

- Κάποιες εξισώσεις δεν έχουν λύση στο $\Re$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \ldots ?$$

- Μπορούν να έχουν λύση σε ένα «ευρύτερο» χώρο, που περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα

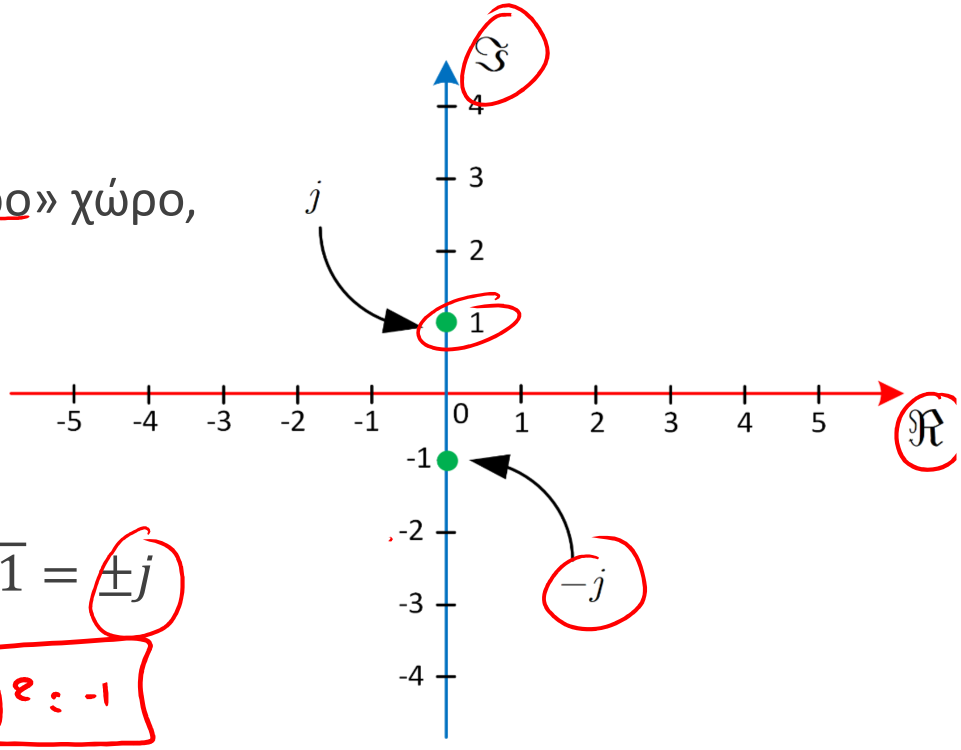
- Ο χώρος αυτός λέγεται χώρος των ***μιγαδικών αριθμών* - $\mathbb{C}$**

- Λύση:

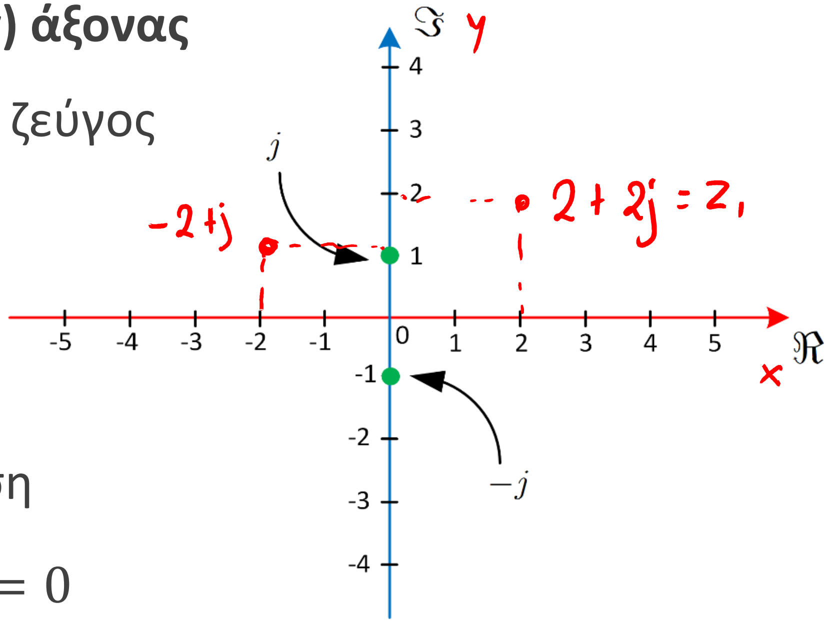
$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$

με $\sqrt{-1} = j$ τη **φανταστική μονάδα**

$\boxed{j^2 = -1}$



- Οι άξονες που συντελούν στη δημιουργία του μιγαδικού επιπέδου ονομάζονται **πραγματικός (real) και φανταστικός (imaginary) άξονας**



- Κάθε σημείο αυτού του επιπέδου αποτελεί ένα ζεύγος αριθμών (x, y)

- Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό γράφεται ως $\boxed{z = x + jy}$ και ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number)**

- Ας δούμε μια εύκολη εφαρμογή: έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης

- Όλα τα παραπάνω στο χώρο των πραγματικών αριθμών!

- Αν λύσουμε την εξίσωση στο χώρο των μιγαδικών αριθμών τότε το πράγμα αλλάζει! Ας δούμε πως:

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές (**μιγαδικές**) ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\overset{j^2}{(-1)}|\Delta|}}{2a} = \boxed{\frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

- Οπότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

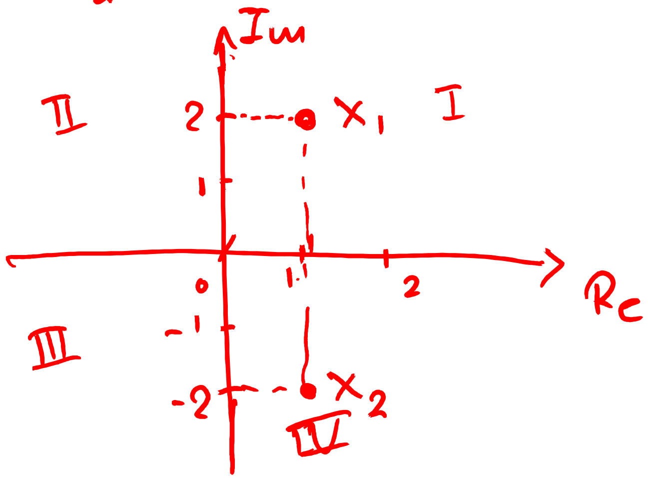
$$x_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x + 5$ ✓

$$\underset{\uparrow}{a}x^2 + \underset{\uparrow}{\beta}x + \underset{\uparrow}{\gamma}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-2)^2 - 4(1)5 = 4 - 20 = -16$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm j\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm j\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm j4}{2} = \begin{cases} \to 1 + j2 \leftarrow x_1 \\ \to 1 - j2 \quad x_2 \end{cases} \qquad x_1 = x_2^*$$



$$\left.\begin{aligned} z &= x + jy \\ z^* &= x - jy \end{aligned}\right\} \text{συζυγία}$$

$$ax^2 + \beta x + \gamma = (x - x_1)(x - x_2) \cdot a$$

$$a\left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Η μορφή $z = x + jy$ ενός μιγαδικού αριθμού ονομάζεται

καρτεσιανή

- Ορολογία:

ℜ: τελεστής
Real

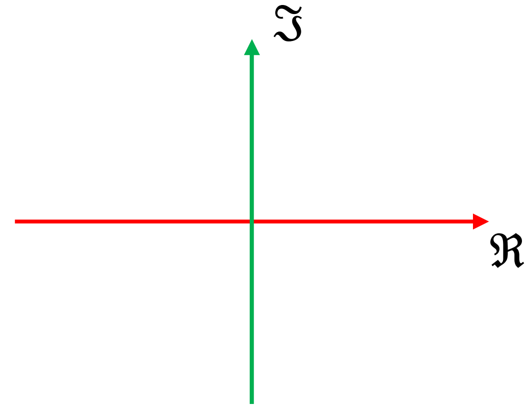
- ❑ x: τετμημένη : *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού

$$\boxed{x = \Re\{z\}}$$

- ❑ y: τεταγμένη : *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού

$$y = \Im\{z\}$$

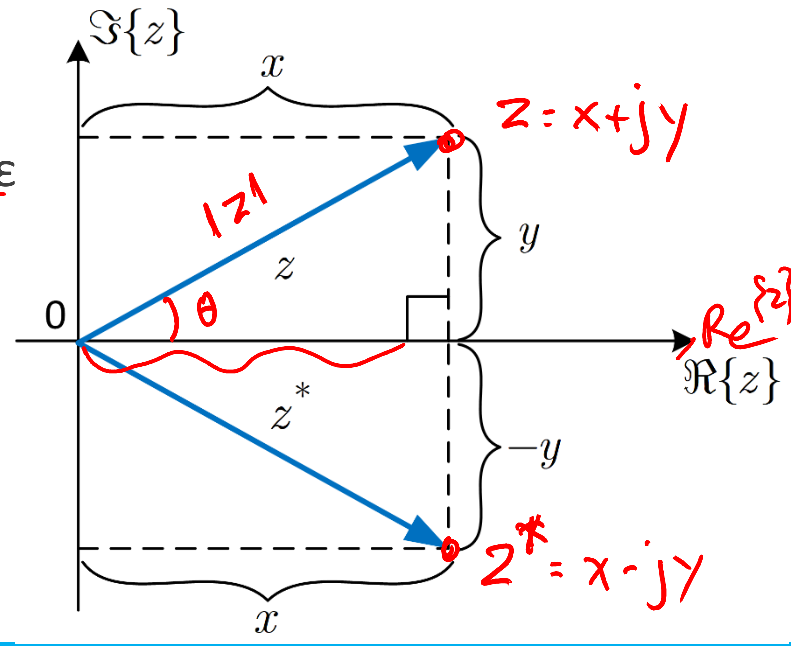
ℑ: τελεστής



- Άρα

$$z = x + jy = \Re\{z\} + j\Im\{z\}$$

- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **διάνυσμα** που ξεκινά από το $(0,0)$ και καταλήγει στις συντεταγμένες (x, y)

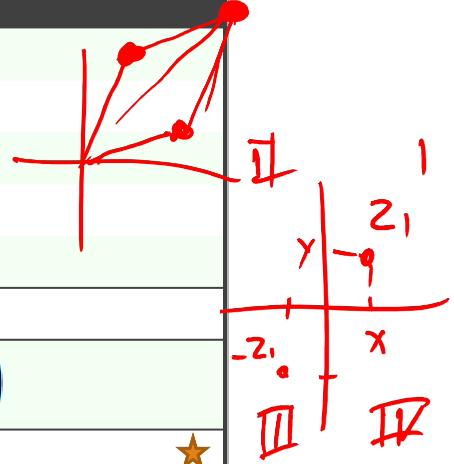


- **Συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$

$$z^* = x - jy = \Re\{z\} - j\Im\{z\}$$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\dfrac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\dfrac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$\dfrac{z_1}{z_1^*} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$
Αμοιβαιότητα	$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - j\dfrac{y}{x^2 + y^2}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$
$z \in \Re$	$z = z^*$
$z \in \Im$	$z = -z^*$



- Ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό θεώρημα λέει ότι:
- Ένα πολυώνυμο βαθμού N έχει γενικά N ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές). Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι όποιες μιγαδικές ρίζες υπάρχουν θα «έρχονται» πάντα σε συζυγή ζεύγη!
  - Το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα
- Π.χ.

$$(z+j)(z-j) = z^2+1$$

$(z+z_1)\ (z+z_1^*)$

$$\big(z+(2+j)\big)\big(z+(2-j)\big) = z^2+4z+5$$

$$\left(z+\left(-1+j\sqrt{2}\right)\right)\left(z+\left(-1-j\sqrt{2}\right)\right) = z^2+2z+3$$

$$(z+j)(z+1) = z^2+(1+j)z+j$$

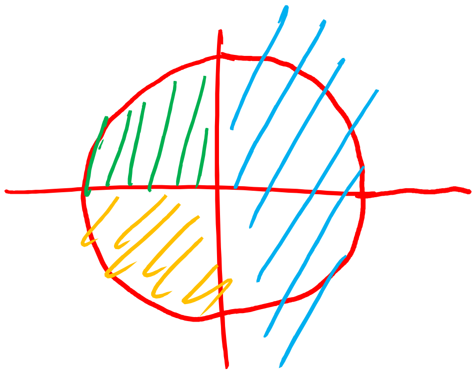
- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
  - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

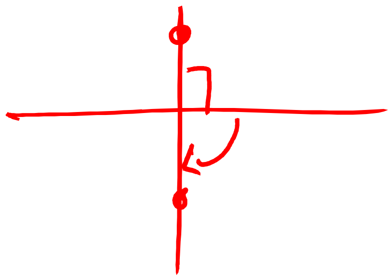
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
  - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \textit{απροσδιόριστο}, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

j2





- Αντί της καρτεσιανής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή, την **πολική**
- Η πολική μορφή χρησιμοποιεί την έννοια του μέτρου και της φάσης που είδαμε
- Από απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$z = x + jy = \rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|\overbrace{(\cos\varphi + j\sin\varphi)}^{e^{j\varphi}}$$

- Η παραπάνω πολική μορφή μπορεί να απλοποιηθεί μέσω **των σχέσεων του Euler**
- Σχέση του Euler:

$e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)}$$

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{j\varphi}}$$

$z = x + jy$

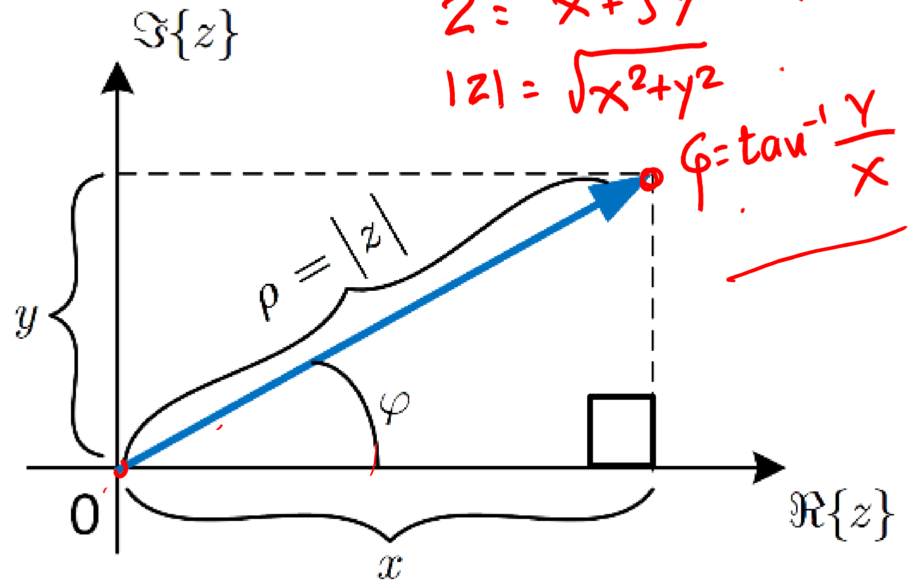
$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

- Άμεσες συνέπειες της παραπάνω σχέσης:

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}}$$

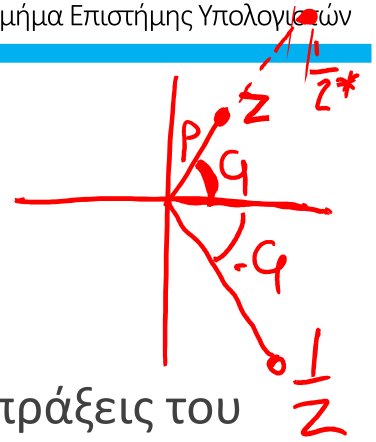
$$\boxed{\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}}$$



- Μεγάλης σπουδαιότητας σχέσεις!

- Η πολική μορφή γράφεται ως: $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{\rho} \cdot e^{-j\varphi}$

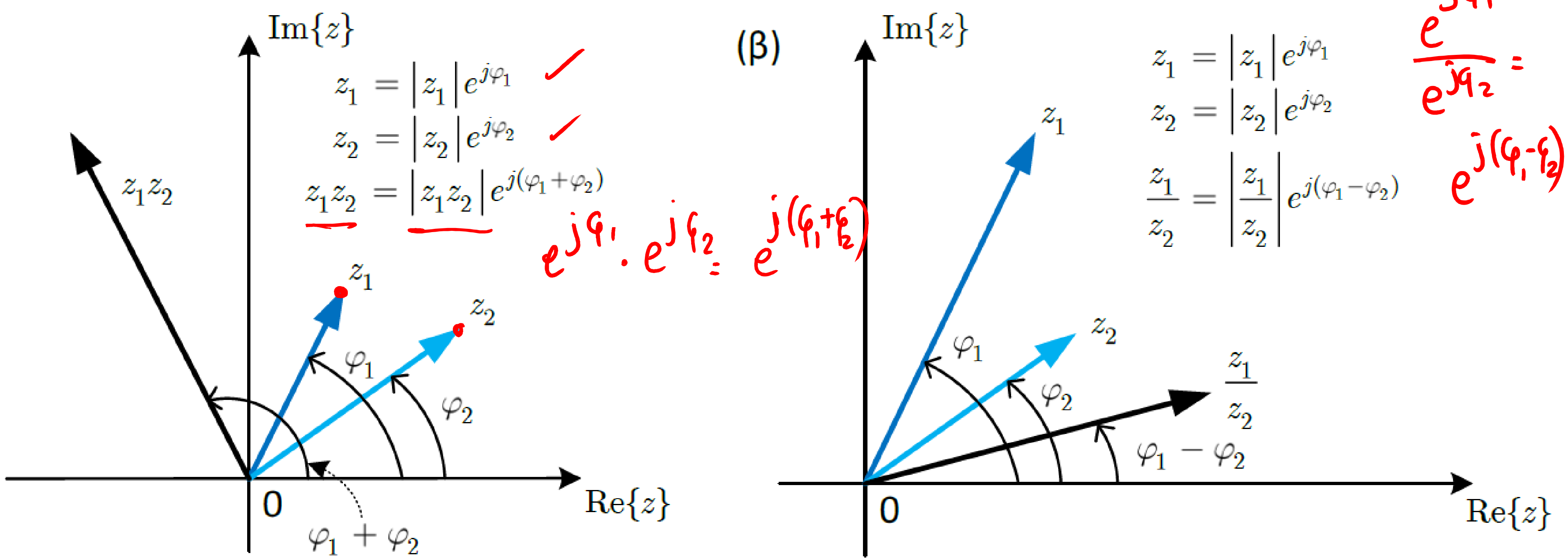
$$z = x + jy = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$$



με $|z|, \varphi$ όπως τα περιγράψαμε νωρίτερα $\frac{1}{z^*} = \frac{1}{\rho e^{-j\varphi}} = \frac{1}{\rho} e^{j\varphi}$ $\frac{1}{z}$

- Η πολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με τις πράξεις του **γινομένου** και της **διαίρεσης** μεταξύ μιγαδικών αριθμών

- Αντίθετα, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ βολική για τις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**



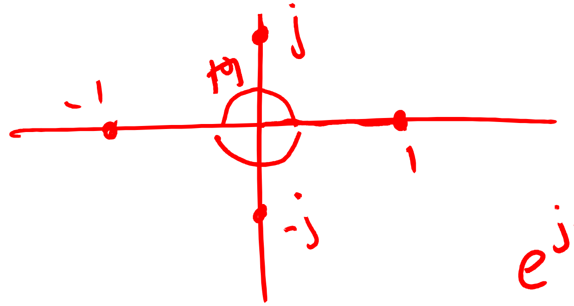
$e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}} = e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$	
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} + b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} - b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1\rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$	★
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1\rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \|z_1\|^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$	★
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1+z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1-z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1\rho_2 e^{-j(\phi_1+\phi_2)}$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$	★
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\|\rho_1\| = \|\rho_2\|$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	★

- Κάποιες πολικές μορφές εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη
- Ας τις δούμε



$e^{jk\pi} = (e^{j\pi})^k = (-1)^k$

Συνήθεις πολικές μορφές

Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

- **Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**

$z = x + jy$

- Για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ χρονοβόρα

$a = 5 = 5 + 0j = 5 \cdot e^{j0}$
$= 5 \cdot e^{j2k\pi}$

- Με πολική μορφή:

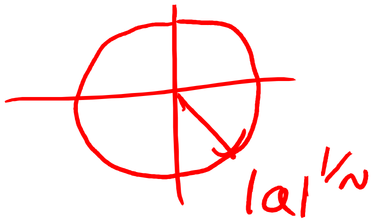
$$z^n = \left(|z|e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

- Η μορφή αυτή ονομάζεται **σχέση του De Moivre**
- Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$\boxed{z^N - a = 0,} \qquad a = |a|e^{j\theta} \in \mathbb{C}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

- Ας δούμε πως

$$z^N = a \iff |z|^N e^{jN\varphi} = |a|e^{j(\theta+2\pi k)} \iff z := \begin{cases} |z| = |a|^{\frac{1}{N}} \\ \varphi_k = \dfrac{\theta + 2\pi k}{N}, k = 0,1,\dots,N-1 \end{cases}$$



- Παράδειγμα:

  - Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 - 8 = 0$

$$z^N - a = 0$$

$$z^3 - 8 = 0 \Rightarrow z^3 = 8 \Rightarrow (\rho \cdot e^{j\theta})^3 = 8 \cdot e^{j2k\pi} \Rightarrow \rho^3 \cdot e^{j3\theta} = 8\, e^{j2k\pi}$$

$$z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = 2 \\ 3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta_k = \frac{2\pi}{3} \cdot k \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$

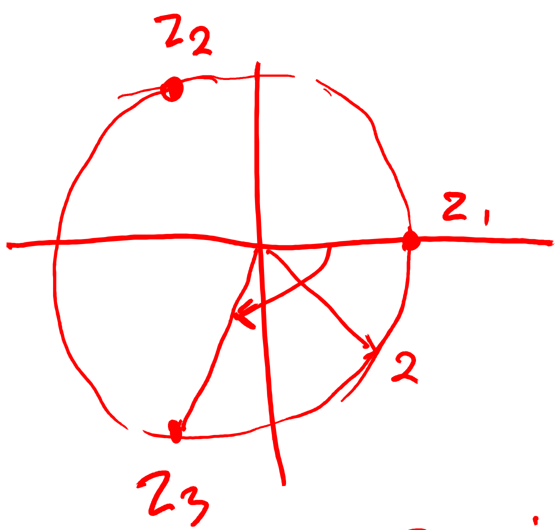
$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$z_1 = 2 \cdot e^{j0} = 2$

$z_2 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \rightarrow$

$z_3 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3} \cdot 2} = 2 e^{j\frac{4\pi}{3}} = 2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} = z_2^*$

z



Επ

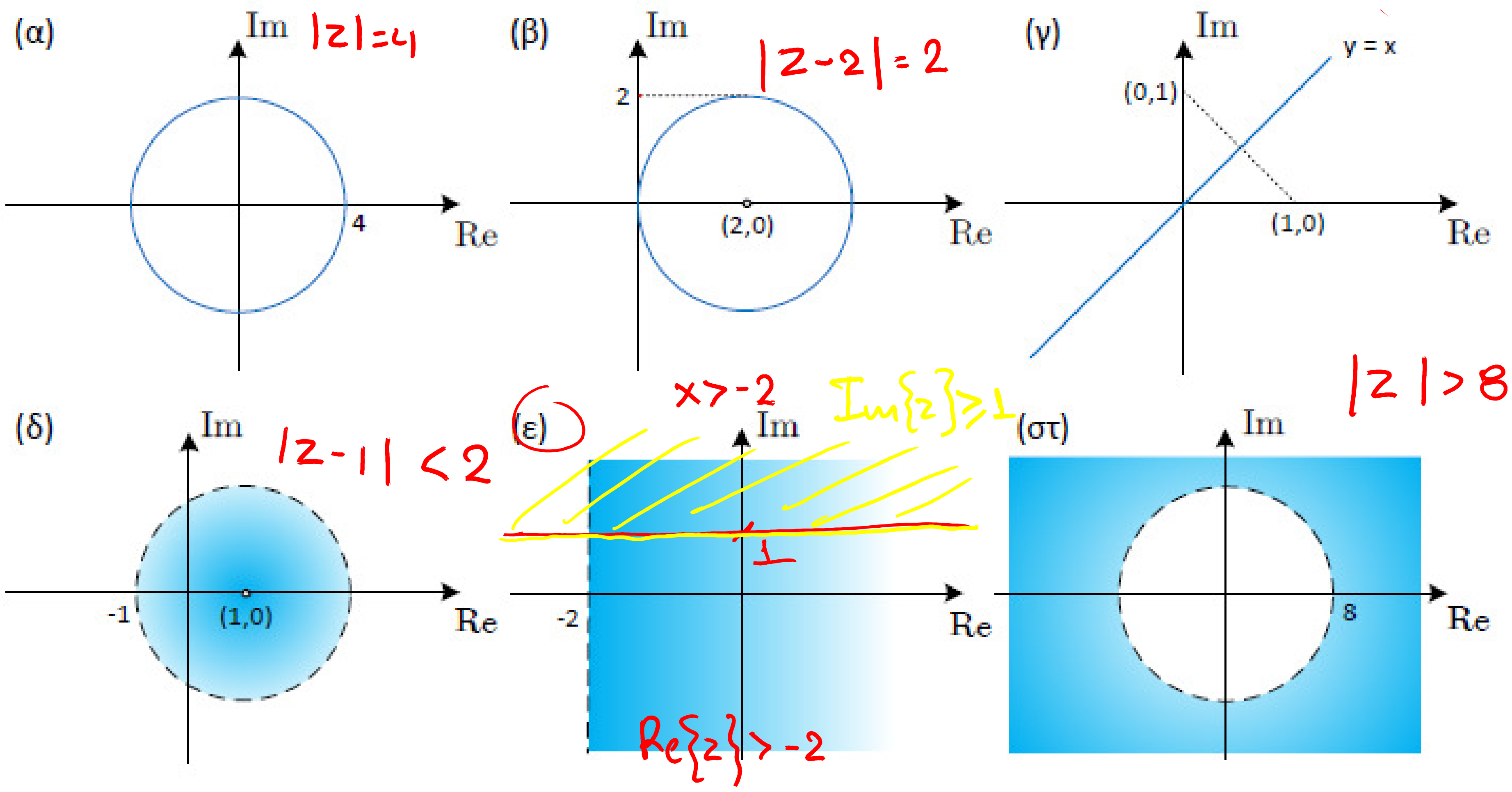
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z = x + jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |z|^2 = r^2 \Rightarrow |z| = r$$

- **Γεωμετρικοί Τόποι**

$z = x + jy \Rightarrow Re\{z\} = x$

- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν μια συγκεκριμένη (γεωμετρική, πολλές φορές) ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος**



- Παράδειγμα:

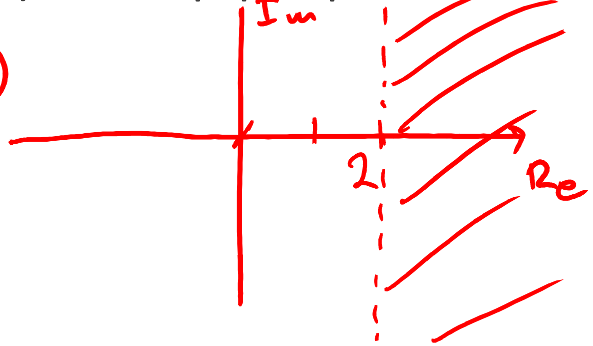
  - Βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

a) $\Re\{z\} > 2$

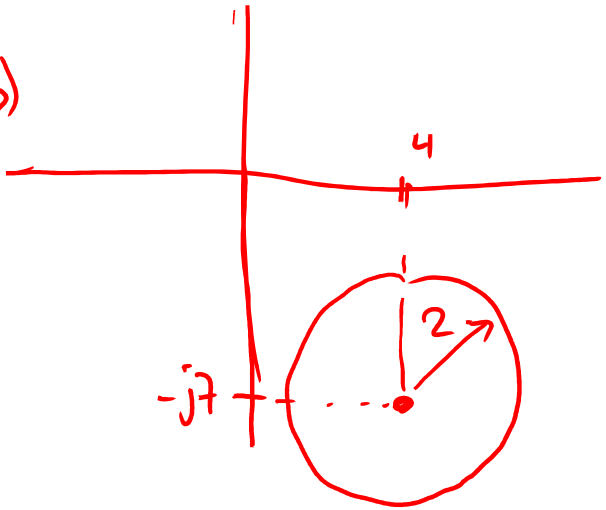
b) $|z-(4-j7)| = 2$

c) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$

a)



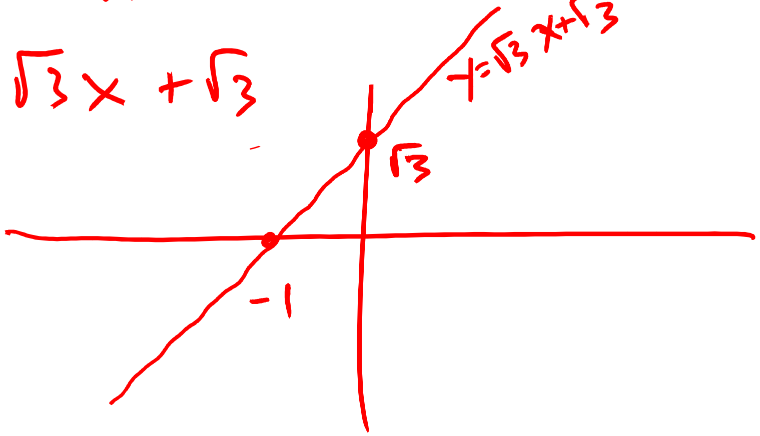
b)



c) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(x+jy+1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{y}{x+1} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$



- Παράδειγμα:

$\boxed{z = e^{j\omega}}$ $\boxed{z(t) = e^{j\omega t}}$

- **Μιγαδικές Συναρτήσεις**
- Οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν ως πεδίο ορισμού ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου και πεδίο τιμών μιγαδικούς (εν γένει) αριθμούς
- Μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι (εν γένει) τεσσάρων διαστάσεων
- Μπορούμε όμως να σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της, ή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της
- Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, και της παραγωγισιμότητας έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και διαφορές με αυτές που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις
- Μια εκτενής παρουσίαση είναι εκτός σκοπού
  - Θα αντιμετωπίσουμε τις (όποιες) μιγαδικές συναρτήσεις όταν τις συναντήσουμε
- Θα μας απασχολήσουν περισσότερο **συναρτήσεις του χρόνου t** οι οποίες (μερικές φορές) θα παίρνουν **μιγαδικές τιμές**
- Ας δούμε μια τέτοια απλή και ΠΟΛΥ σημαντική συνάρτηση **του χρόνου t**
- Τη συνάρτηση

$\omega = 2\pi f_0$

$$\boxed{x(t) = e^{j2\pi f_0 t}} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$$

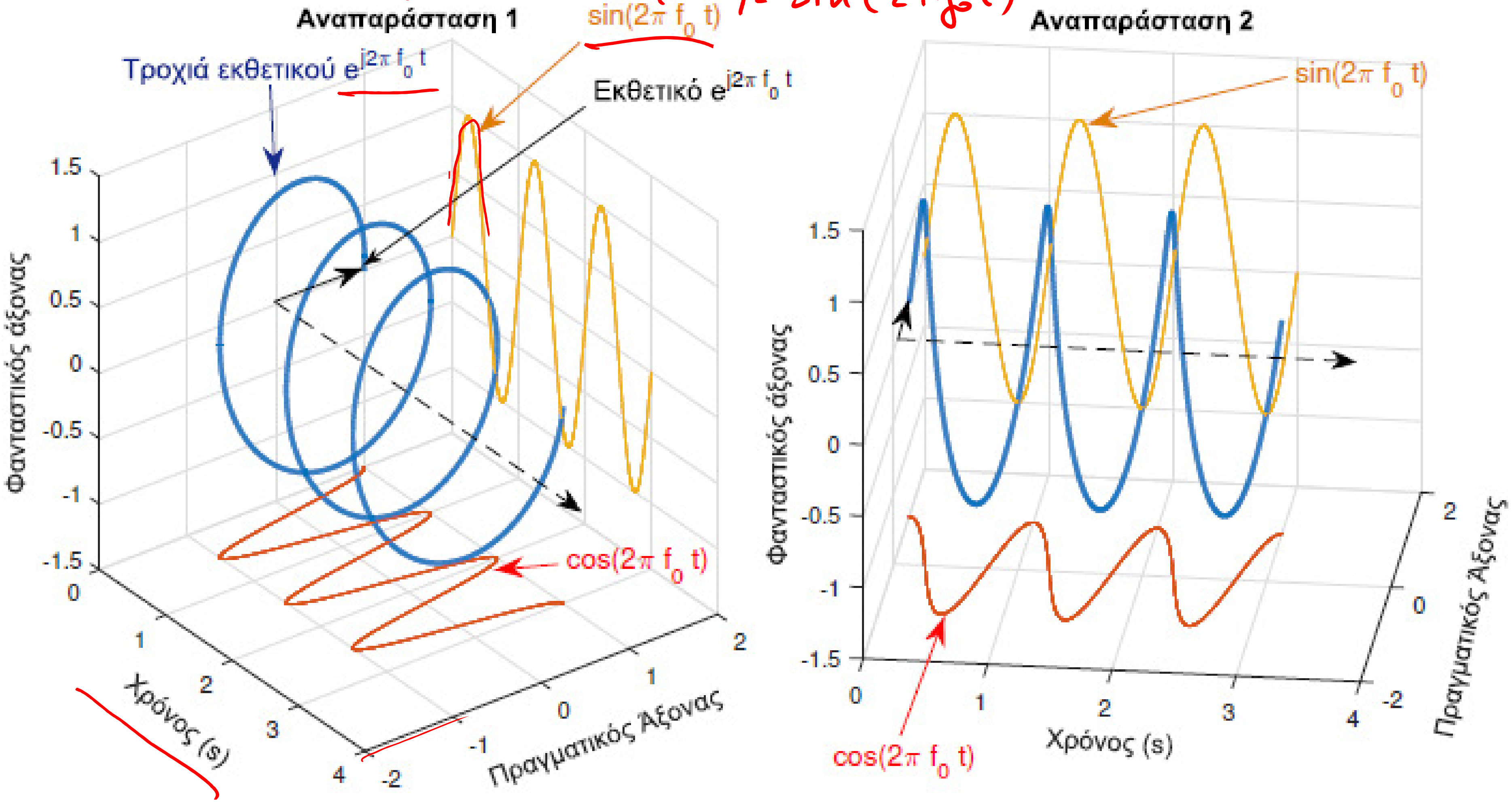
- **Η συνάρτηση $\boldsymbol{x(t) = e^{j2\pi f_0 t}}$**
- Η συνάρτηση αυτή είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία παίρνει μιγαδικές τιμές!
- Άρα για τη σχεδίασή της χρειαζόμαστε έναν άξονα t
- Επίσης, θέλουμε ένα μιγαδικό «χώρο» για να βάζουμε τις τιμές της, π.χ. $x(0), x(1), \ldots$
- Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η συνάρτηση θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα σταθερού μοναδιαίου μήκους…
  - …αφού $\left|e^{j\theta(t)}\right| = |\cos\theta(t) + j\sin\theta(t)| = \sqrt{\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta\,(t)} = 1\ldots$

το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του χρόνου σε σπειροειδή τροχιά

- Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή με συχνότητα f_0 Hz
- Ας δούμε πως μοιάζει μια τέτοια συνάρτηση…

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$** $= \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$

$Re\{x(t)\} = \cos(2\pi f_0 t)$ $Im\{x(t)\} = \sin(2\pi f_0 t)$



$Re\{x(t)\}$

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**

- Θα παρατηρήσατε ότι η προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο (χρόνος, πραγματικός άξονας) αποτελεί ένα συνημίτονο!

- Αντίθετα, η προβολή στο επίπεδο (χρόνος, φανταστικός άξονας) «σχηματίζει» ένα ημίτονο!

- Αυτό είναι συνεπές με τη σχέση του Euler:

$$\Re\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

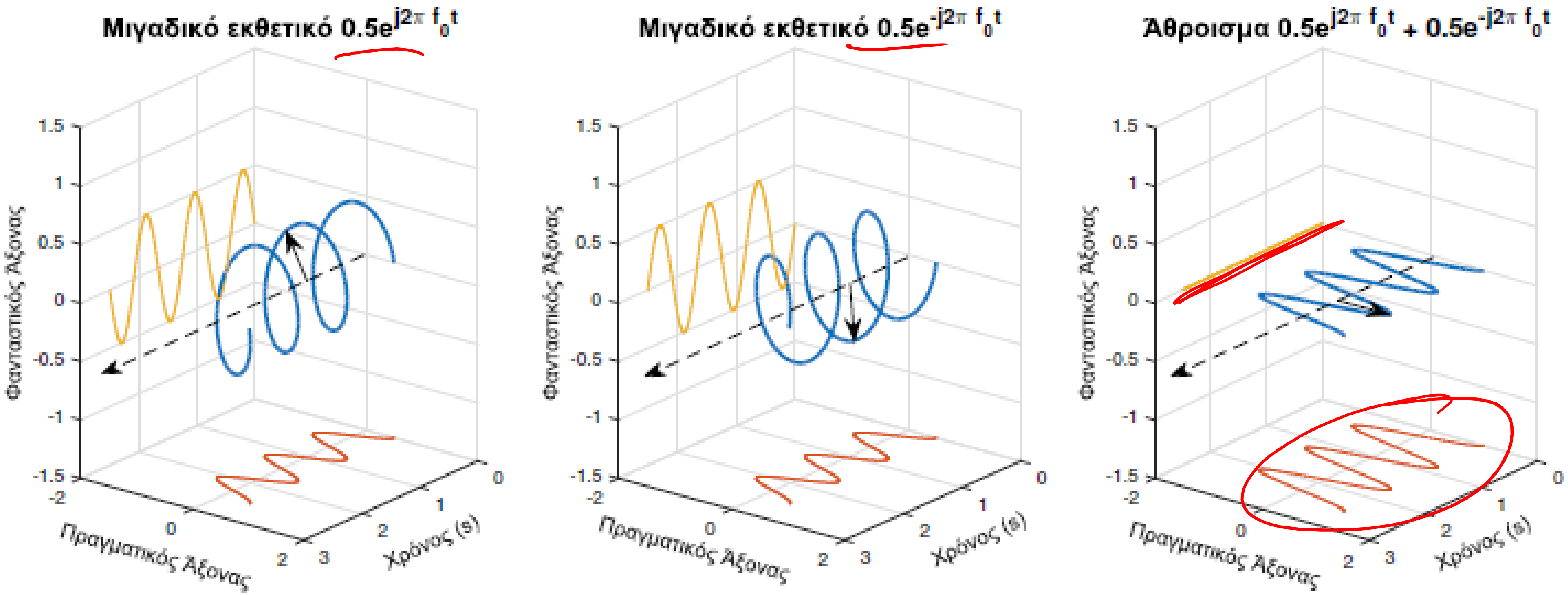
$$\Im\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπετε ότι το άθροισμα δυο συζυγών εκθετικών συναρτήσεων δίνει μια πραγματική συνάρτηση!

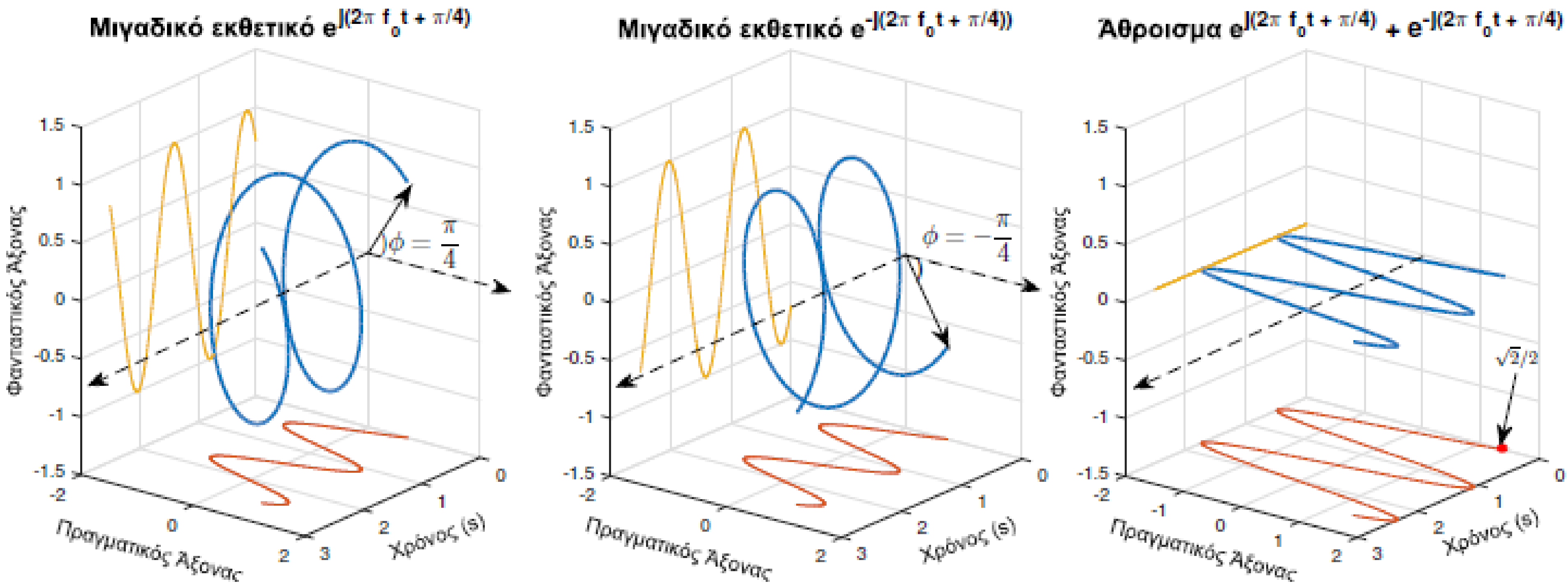
- Ας το δούμε αυτό οπτικά…

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**

$\cos(2\pi f_0 t)$



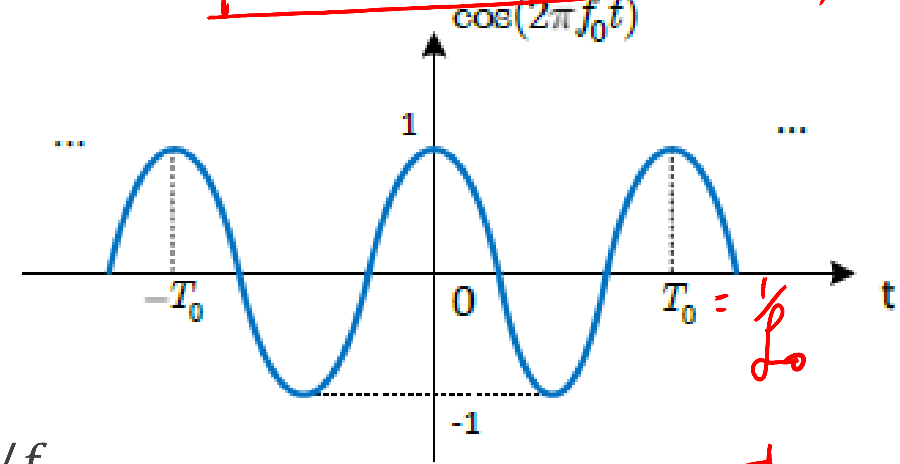
- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$**



- Στην έννοιες που θα συζητήσουμε στο μάθημα, παίζουν θεμελιώδη ρόλο οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις

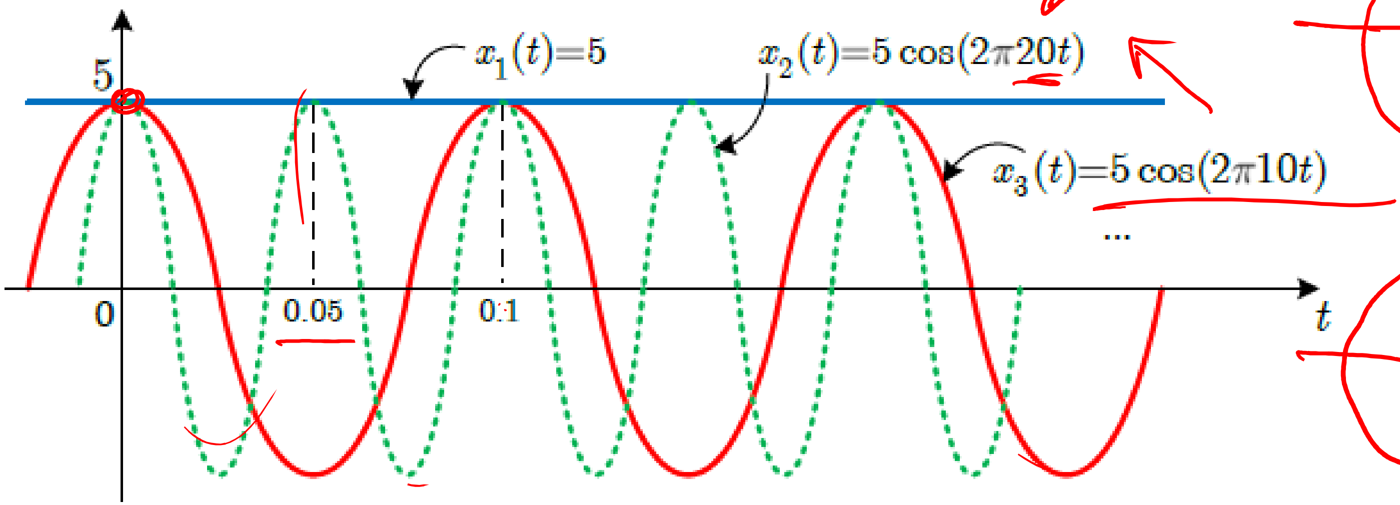
φάση

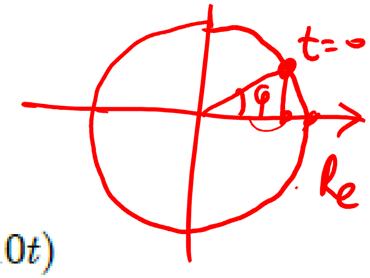
- Γενικότερα, μια ημιτονοειδής συνάρτηση ορίζεται ως $\boxed{x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)}$
- A: **πλάτος ημιτονοειδούς**
- f_0: **συχνότητα ημιτονοειδούς**
- φ: **φάση μετατόπισης ημιτονοειδούς**

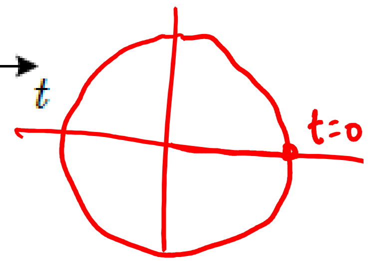


$T_0 = 1/f_0$

- Κάθε απλό ημιτονοειδές είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου, με **περίοδο** $T_0 = 1/f_0$

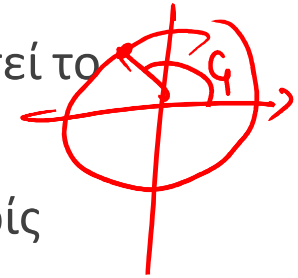






- **Μετατόπιση Φάσης**

- Η φάση μετατόπισης είναι μια τιμή που καθορίζει πόσο έχει μετατοπιστεί το ημιτονοειδές από τη θέση $t = 0$



- Αν $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)|_{\varphi=0} = A\cos(2\pi f_0 t)$ το ημιτονοειδές χωρίς μετατόπιση, τότε

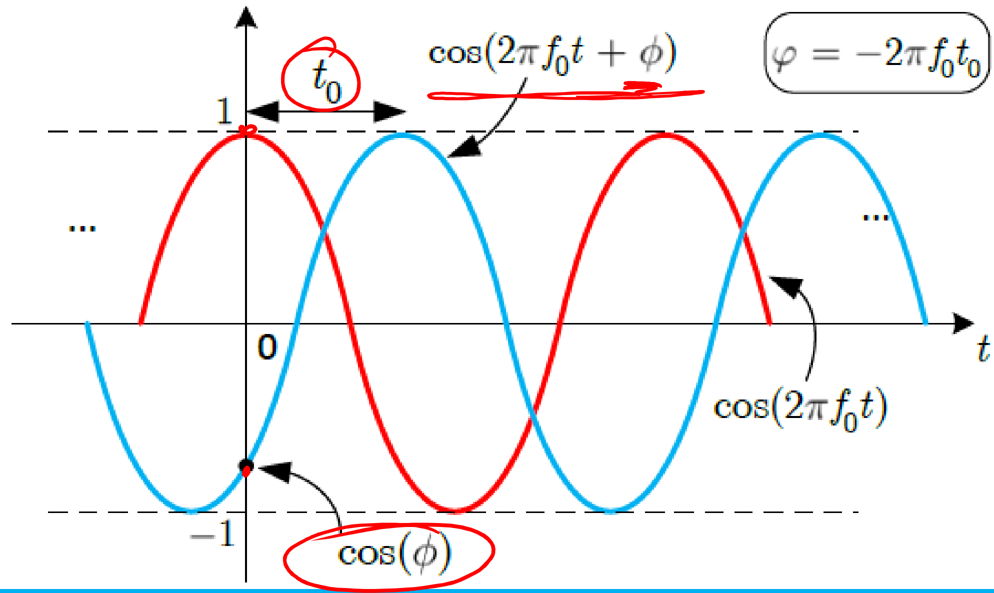
$$x_0(t - t_0) = A\cos\big(2\pi f_0(t - t_0)\big) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Μια μετατόπιση κατά t_0 δεξιά ισούται με φάση μετατόπισης

$$\boxed{\varphi = -2\pi f_0 t_0} = -\frac{2\pi t_0}{T_0}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Σχηματικά:



- **Άθροισμα Ημιτόνων**

$2\cos(2\pi f_0 t) + 5\cos(2\pi f_0 t) = 7\cos(2\pi f_0 t)$

- Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως μπορούν να απλοποιηθούν οι πράξεις μεταξύ ημιτόνων όταν περνάμε μέσα από το μιγαδικό χώρο

- Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

- Από τις σχέσεις του Euler, μπορούμε να γράψουμε:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + B\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\}$$

$$= \Re\{A\boxed{e^{j2\pi f_0 t}} + Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\}$$

$e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\pi/2}$

$$= \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$A - jB$

- Όμως: $A + Be^{-\frac{j\pi}{2}} = A - jB = \sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$

- **Άθροισμα Ημιτόνων**
- Άρα

$$x(t) = \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\}$$
$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$
$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$
$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\} = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Από την τελευταία σχέση εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$= A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

- Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται και για N ημίτονα
- Ο μιγαδικός $(A + Be^{-j\pi/2})$ ονομάζεται **φάσορας (phasor)**

- **Παράδειγμα:**

$2\pi f t$

○ Λύστε την εξίσωση $A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi 50 t + \pi) + \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{Re\{A\cdot e^{j\varphi}\, e^{j2\pi f_0 t}\}} = Re\{e^{j\pi}\cdot e^{j2\pi 50 t}\} + Re\{e^{-j\pi/3}\cdot e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$= Re\{e^{j\pi}\cdot e^{j2\pi 50 t} + e^{-j\pi/3}\cdot e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$= Re\{(e^{j\pi} + e^{-j\pi/3})\, e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$= Re\{(-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}j)\, e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$= Re\{(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}j)\, e^{j2\pi 50 t}\} = \boxed{Re\{1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}\cdot e^{j2\pi 50 t}\}}$$

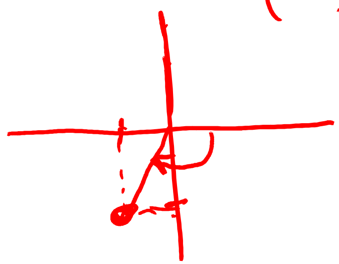
$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = x + jy = |z|\cdot e^{j\varphi}$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z| = 1$

$\tan^{-1}\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$



atan2d(y, x) = -120

$z = x + jy$

$A = 1$

$\varphi = -\frac{2\pi}{3}$

$f_0 = 50$ (Hz)

- **Παράδειγμα:**

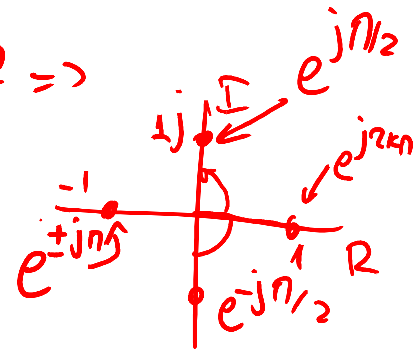
$\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$

- ○ Λύστε την εξίσωση $\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1$

$$Re\{\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}\cdot e^{j\theta}\} = -1 \Rightarrow Re\{e^{j(\theta+\pi/4)}\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2k\pi - \pi \end{cases}$$



$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad R\{(1+j)\,e^{j\pi/2}\} = R\{(1+j)\,j\} = R\{j+j^2\} = R\{j-1\} = -1$$

- **Περιοδικότητα**
- Είδαμε νωρίτερα ότι ένα απλό ημίτονο είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Άραγε το άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό?
- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα:
- Έστω $x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)\,, \quad f_1 \neq f_2$
- Έστω ότι είναι περιοδικό. Τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάποιο $T_0 > 0$
- Άρα

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t + T_0) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t + T_0) + \phi_2)$$

- Πρέπει

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 T_0 &= 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T_0 &= 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Οπότε

$$\boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{k}{l} = \lambda\acute{o}\gamma o\varsigma\ \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota\omega\nu}$$

- **Παράδειγμα:**

$A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi)$

  - Ελέγξτε αν τα παρακάτω αθροίσματα είναι περιοδικά

α) $$x(t) = 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2\pi 250t - \frac{\pi}{4}\right)$$ ✓

β) $$x(t) = \cos\left(2\pi 100t - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(400t + \frac{\pi}{3}\right)$$ ✗

$\cancel{2}\pi f \cancel{t} = \overset{200}{\cancel{400}}\cancel{t} \Rightarrow f = \frac{200}{\pi}$

α) $f_1 = 100$, $f_2 = 250$ $\qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{10}{25}$ λόγο ακεραίων.

β) $f_1 = 100$, $f_2 = \frac{200}{\pi}$ $\qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{200}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ