ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 17Η

- Δειγματοληψία

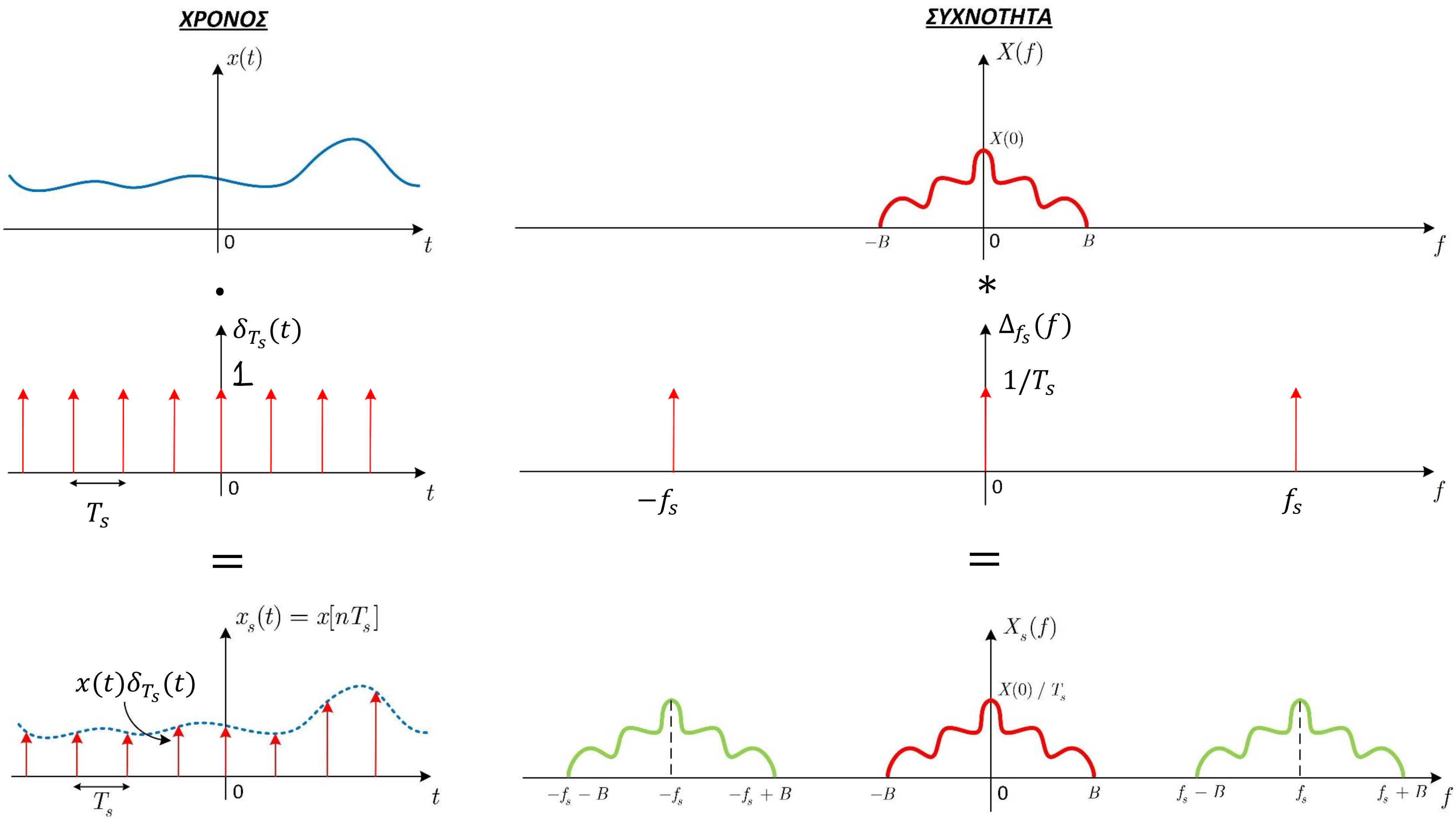
- **Δειγματοληψία (review…)**

- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα - samples*) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)

- Ας δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό…

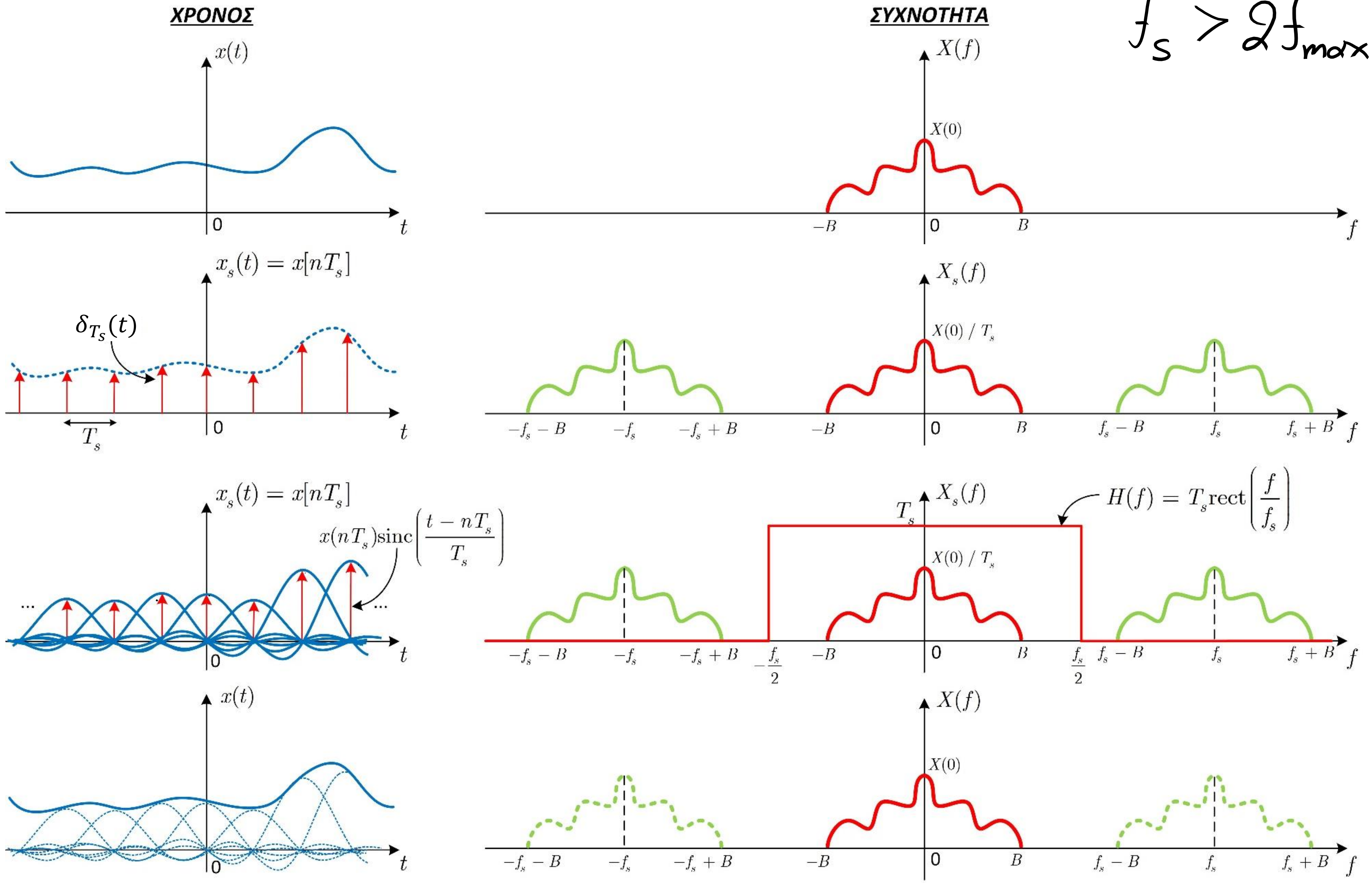
- **Δειγματοληψία (review…)**



- **Δειγματοληψία και Ανακατασκευή (review…)**
- Συγκεντρωτικά:

Shannon:

$$f_s > 2f_{max}$$

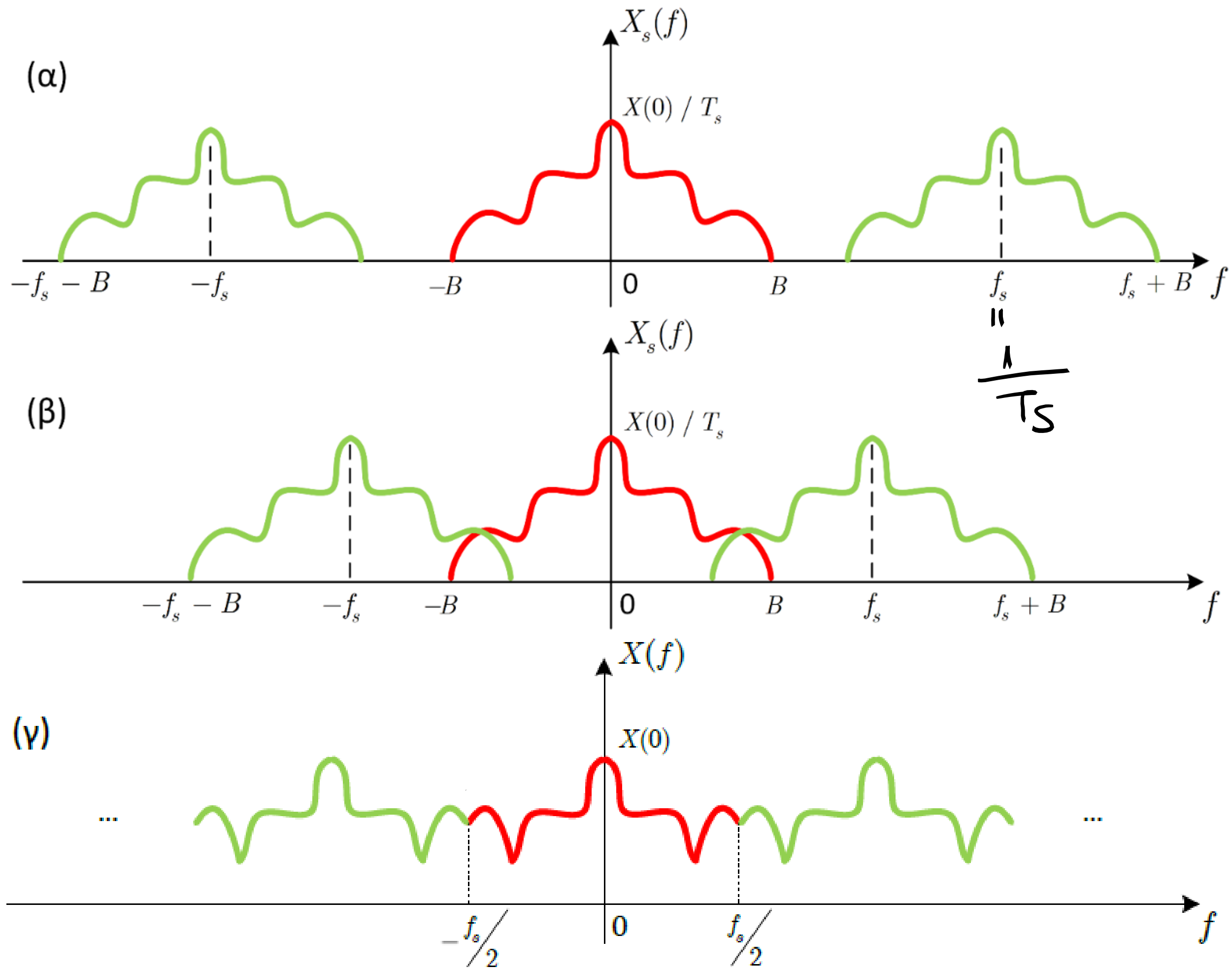


- **Δειγματοληψία – Aliasing (review…)**

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
  - **Ψευδωνυμία** ή **Αναδίπλωση** (in Greek)

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** ενώ η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**



- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

  - Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

$2\pi 2200 t$

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Αντικαθιστώ $t \leftarrow nT_s = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{4000}$

Οπότε

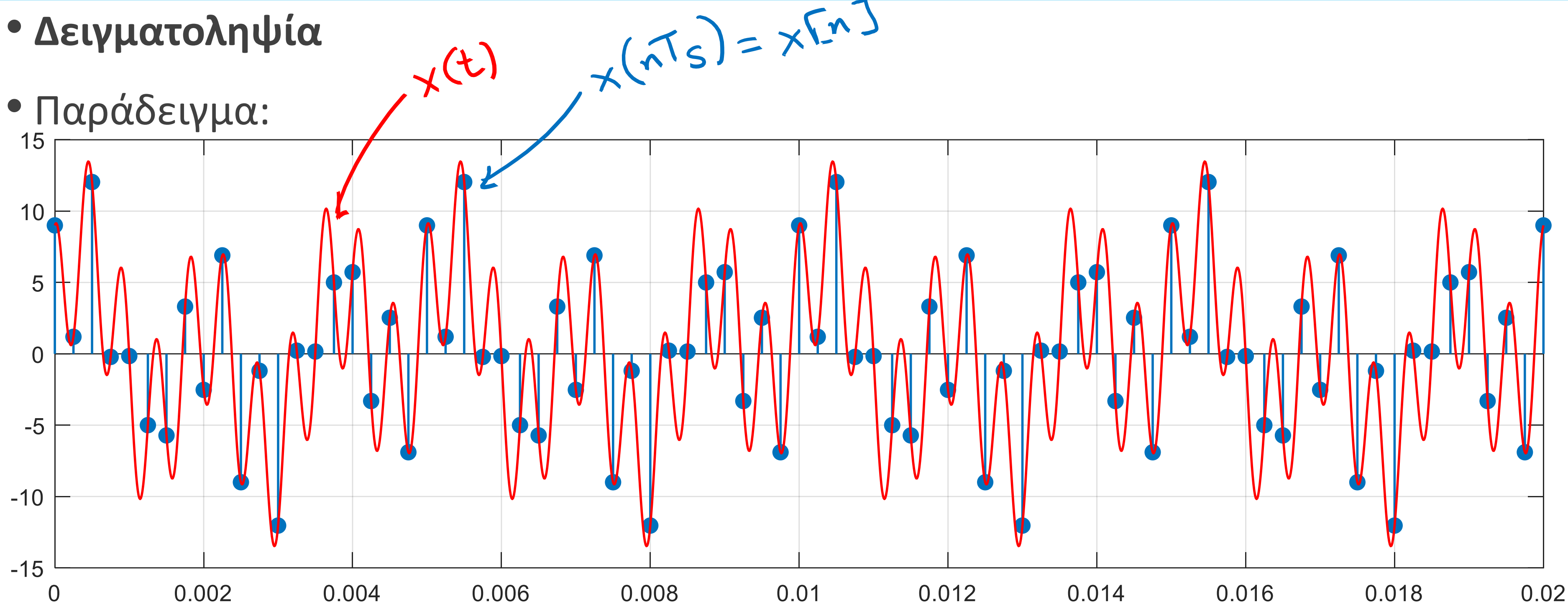
$$x(nT_s) = 3\cos\left(4\cancel{00}\pi \frac{n}{4\cancel{000}}\right) + 5\sin\left(12\cancel{00}\pi \frac{n}{4\cancel{000}}\right) + 6\cos\left(44\cancel{00}\pi \frac{n}{4\cancel{000}}\right)$$

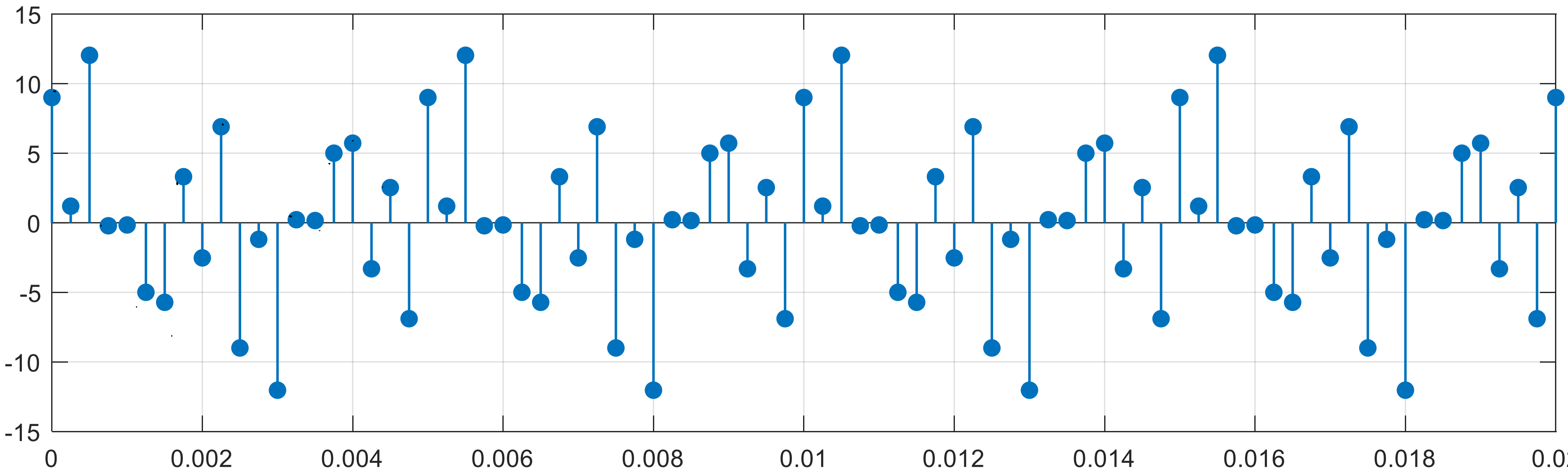
$$= 3\cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6\cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right)$$

Παρατηρούμε ότι $f_s < 2f_{max} = 2 \cdot 2200 = 4400$ Hz

- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

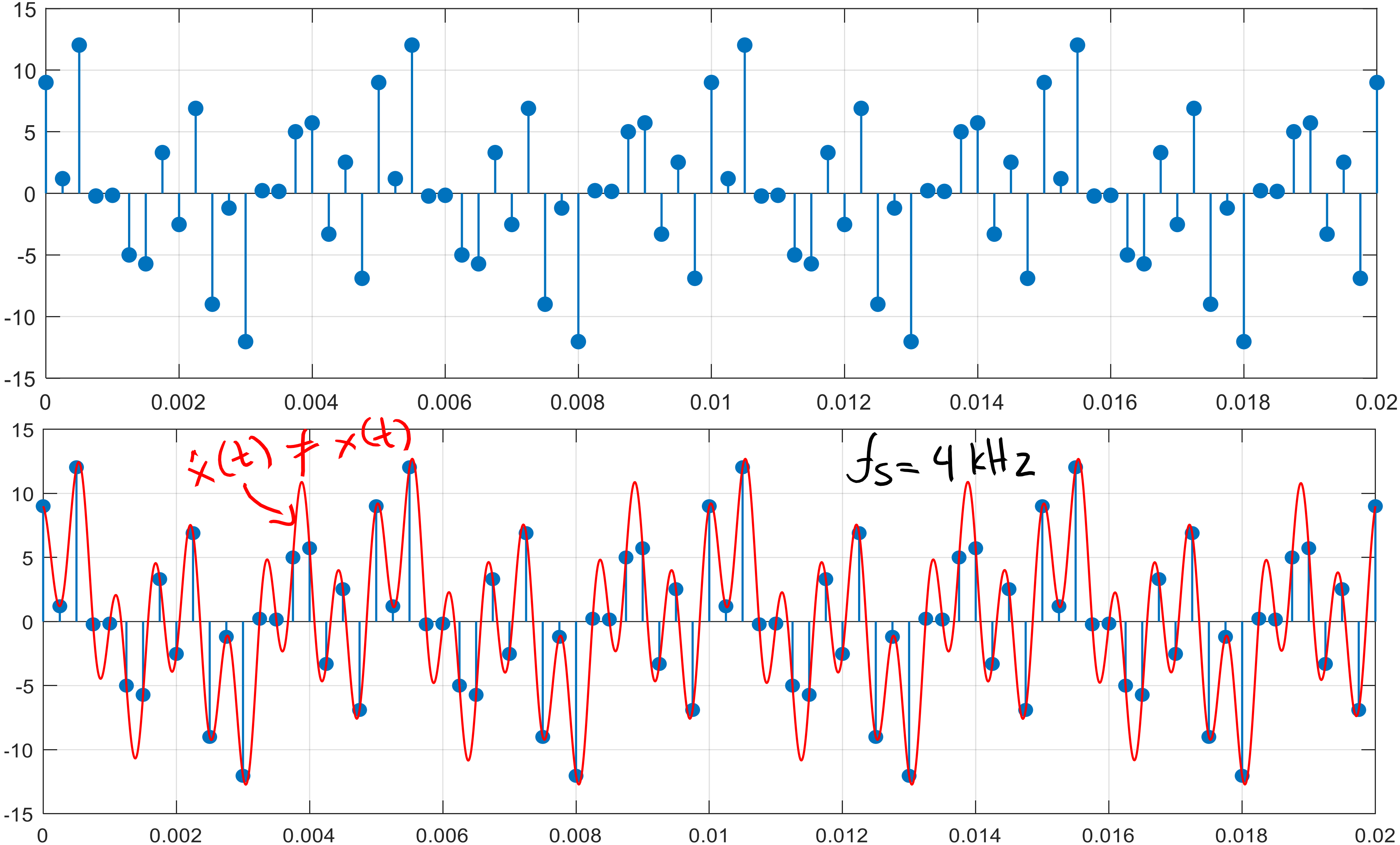




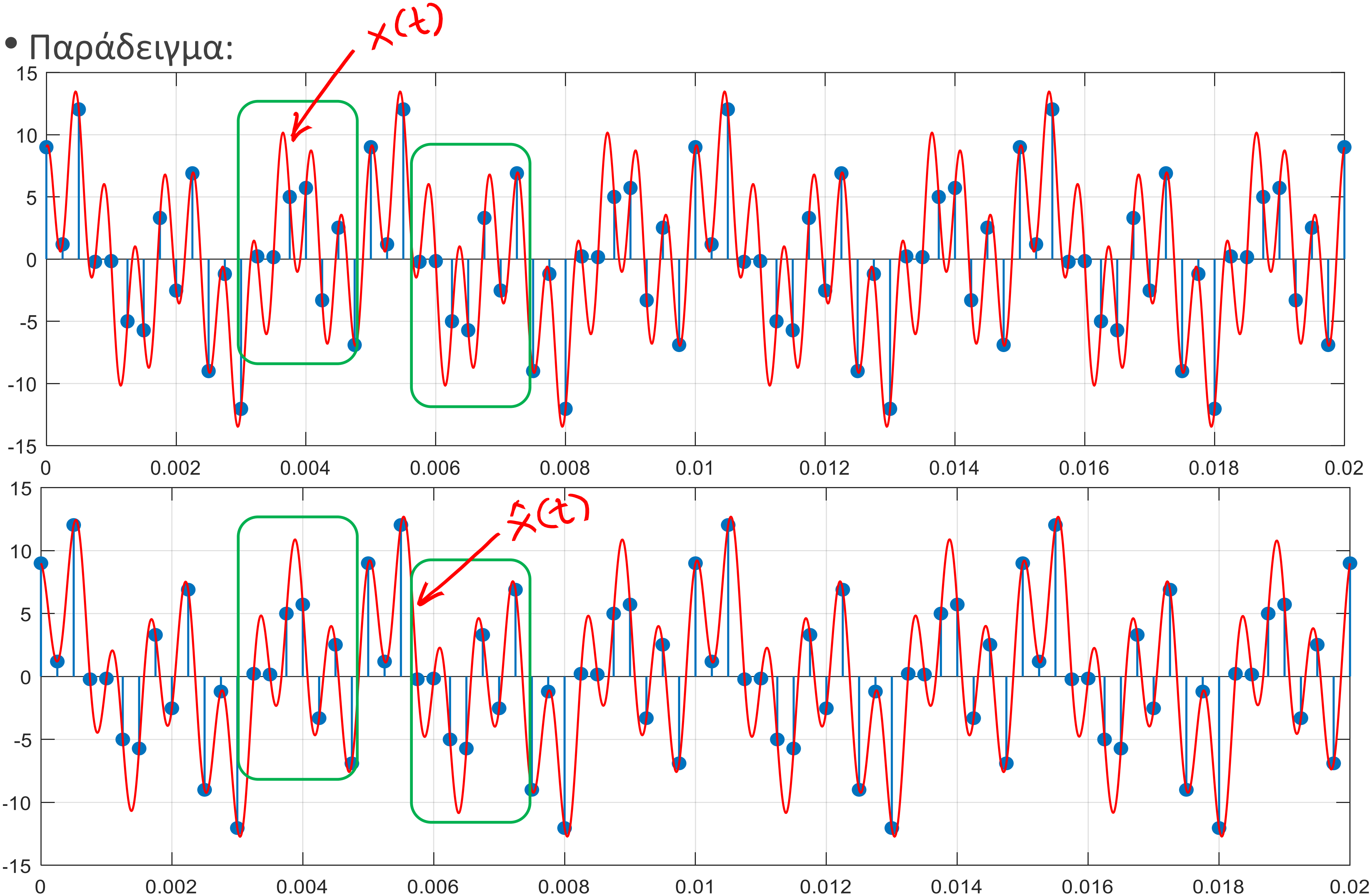
- **Δειγματοληψία**

$$T_s = \frac{1}{f_s} \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

- Παράδειγμα:



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:

ρυθμός Nyquist $:= 2f_{max}$

○ Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α′) $x(t)$

(β′) $x(t-t_0)$

(γ′) $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ′) $x(t-t_0)+x(t+t_0)$

(ε′) $\dfrac{dx(t)}{dt}$

(ϛ′) $x(t)x(t)$

(ζ′) $x(t)*x(t)$

(α) Είναι ρυθμός Nyquist $= 2f_{max} = 2B$

(β) Είναι $F\{x(t-t_0)\} = \underbrace{X(f)}_{[-B,B]}\underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{(-\infty,+\infty)}$, άρα ρυθμός Nyquist $=$ $= 2B$

(γ) Είναι $F\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f-f_0)$, άρα ρυθμός Nyquist $= 2(f_0+B)$

(δ) Είναι $F\{x(t-t_0)+x(t+t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}X(f) + e^{j2\pi f t_0}X(f) =$

$= 2\underbrace{\cos(2\pi f t_0)}_{(-\infty,+\infty)}\underbrace{X(f)}_{[-B,B]}$, ρυθμός $= 2B$

- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α′) $x(t)$

(β′) $x(t-t_0)$

(γ′) $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ′) $x(t-t_0)+x(t+t_0)$

(ε′) $\dfrac{dx(t)}{dt}$

(ϛ′) $x(t)x(t)$

(ζ′) $x(t)*x(t)$

(ε) Είναι $F\{x'(t)\} = (j2\pi f)X(f)$, ξανά ρυθμός Nyquist $= 2B$

(στ) Είναι $F\{x^2(t)\} = X(f) * X(f)$, από ιδιότητα εύρους της συνέλιξης, ο ρυθμός Nyquist $= 4B$.

(ζ) Είναι $F\{x(t)*x(t)\} = X(f)\cdot X(f) = X^2(f)$, άρα ρυθμός Nyquist $= 2B$

- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:

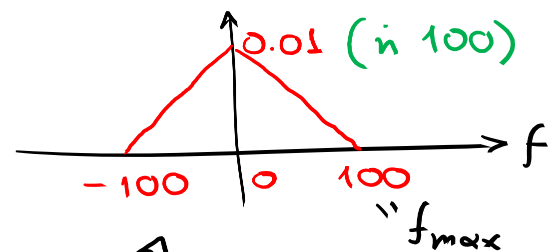
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α′) $\mathrm{sinc}^2(100t)$ (β′) $\frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t)$ (γ′) $\mathrm{sinc}(100t) + 3\mathrm{sinc}^2(60t)$ (δ′) $\mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

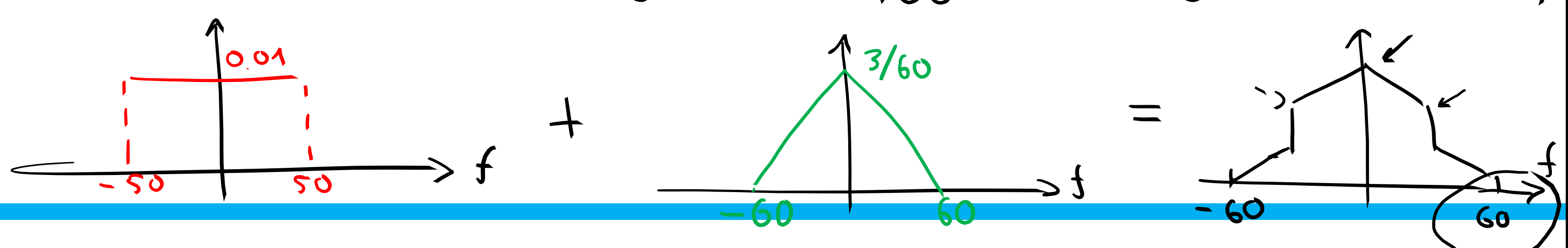
(α) $\mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow[\text{δυϊκότητα}]{F} \frac{1}{100}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$



Επειδή $f_{max} = 100$ Hz, ρ.N. = 200 Hz

(β) $\frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow[\text{δυϊκότητα}]{F} 100\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$, επειδή το $\frac{1}{100}$ δεν αλλάζει το διάστημα που ο M.F του $\mathrm{sinc}^2(\cdot)$ είναι μη-μηδενικός έχουμε $f_{max} = 100$ Hz, $\Rightarrow$ ρ.N = 200 Hz.

(γ) $\mathrm{sinc}(100t) + 3\mathrm{sinc}^2(60t) \xleftrightarrow[\text{δυϊκότητα}]{F} \frac{1}{100}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + \frac{3}{60}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{60}\right)$



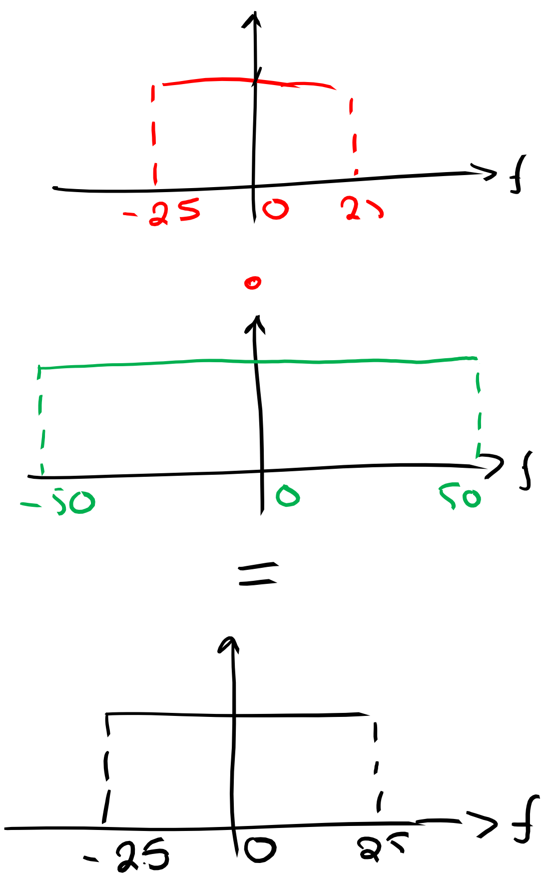
- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

άρα $f_{max} = 60$ Hz, οπότε ρ.N. = 120 Hz

(δ) $\mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t) \underset{\text{δυϊκότητα}}{\overset{F}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{50}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \frac{1}{100}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$

$$\frac{1}{5000}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$$

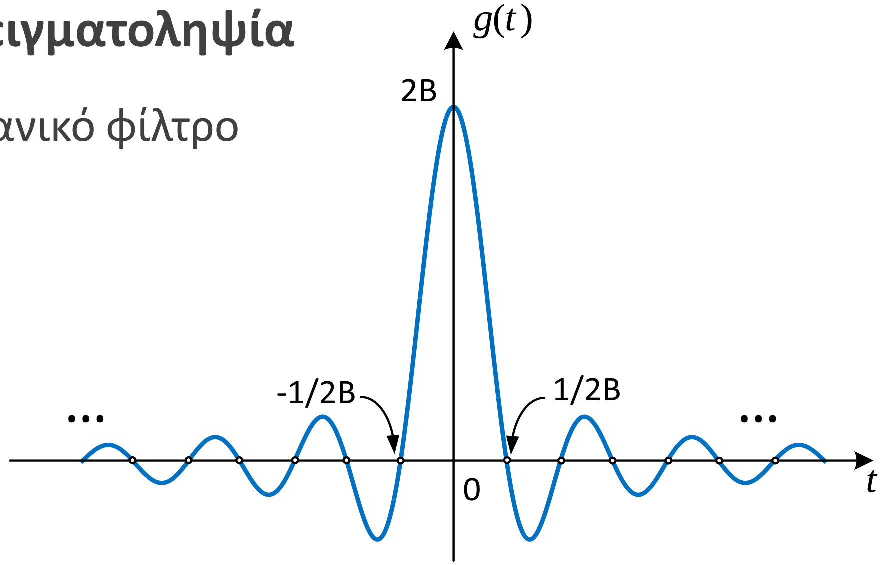


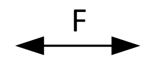
Άρα $f_{max} = 25$ Hz $\Rightarrow$ ρ.N = 50 Hz

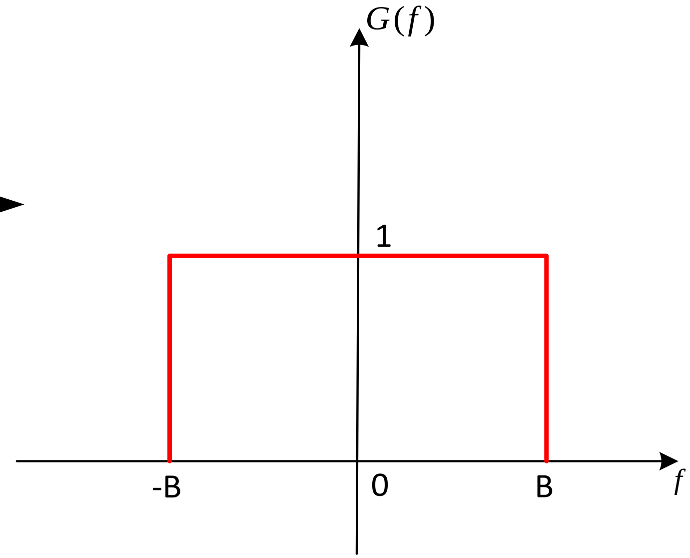
- **Δειγματοληψία**
- Πρακτικά προβλήματα:

1. Κανένα πραγματικό σήμα δεν είναι βασικής ζώνης
   - Αφού ένα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων σήμα πρέπει να είναι άπειρης διάρκειας στο χρόνο!
   - Εφαρμόζουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για να μετατρέψουμε το φάσμα του σήματος σε βασικής ζώνης
2. Οι συναρτήσεις Δέλτα δεν υπάρχουν στην πράξη
   - Μπορούν να προσεγγιστούν από στενούς τετραγωνικούς παλμούς
     - **Φυσική Δειγματοληψία**
     - **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**
3. Το χαμηλοπερατό φίλτρο που αποκόπτει το βασικό φάσμα δεν μπορεί να υλοποιηθεί (ιδανικό φίλτρο)
   - Ούτε η κρουστική του απόκριση (συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$), αφού είναι άπειρης διάρκειας και μη αιτιατή!
   - Μπορεί να προσεγγιστεί από μη ιδανικά φίλτρα
     - Από κρουστικές αποκρίσεις πεπερασμένης διάρκειας και αιτιατές

- **Δειγματοληψία**
- Ιδανικό φίλτρο

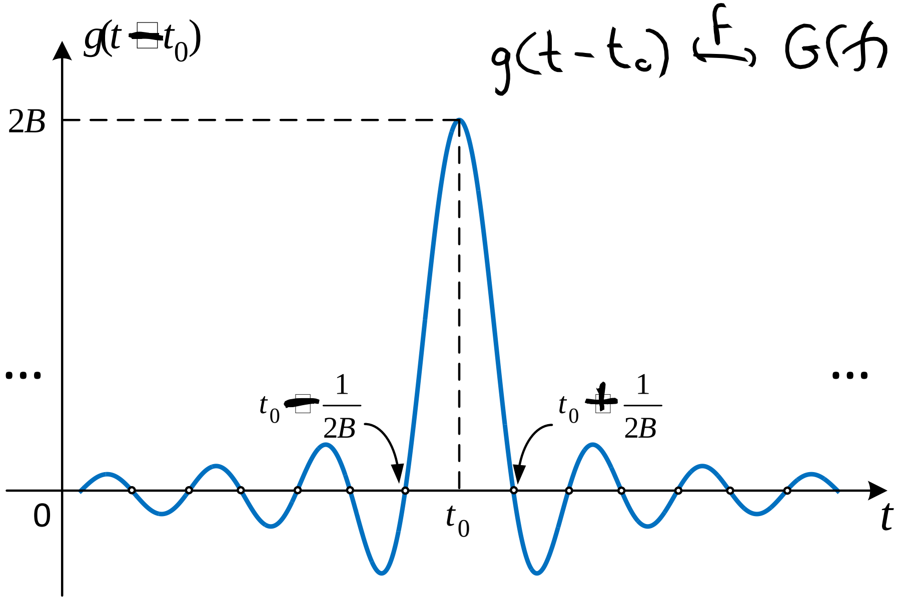


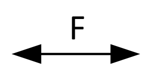


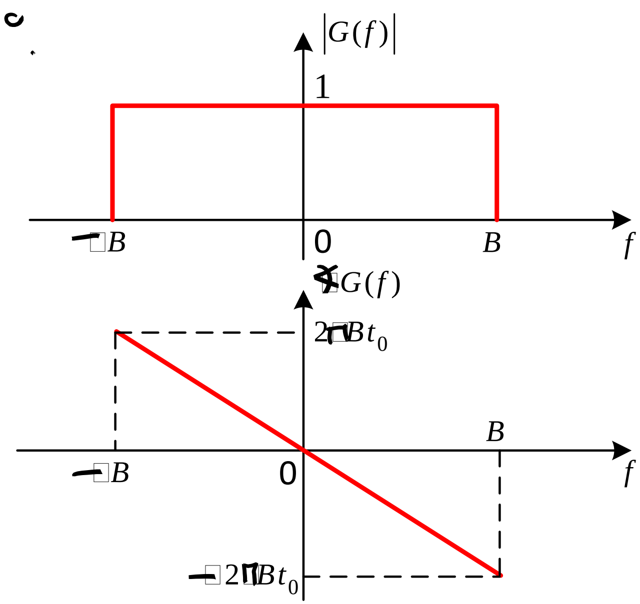


- Το μετατοπίζουμε προς τα δεξιά κατά t_0 έτσι ώστε η περισσότερη ενέργειά του να βρίσκεται στις θετικές χρονικές στιγμές

$g(t-t_0) \xleftrightarrow{F} G(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

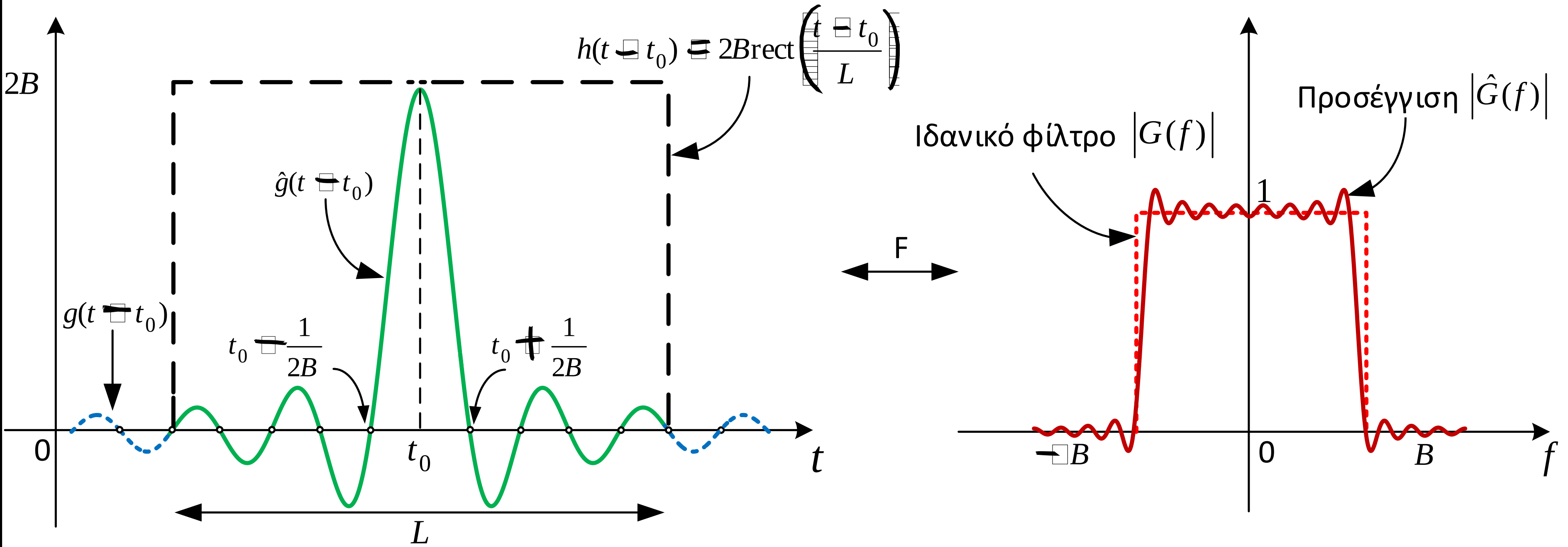






- **Δειγματοληψία**

- Ακόμα και μετά τη μετατόπιση, ένα τμήμα της κρουστικής απόκρισης είναι μη αιτιατό



- Εφαρμόζουμε ένα χρονικό παράθυρο διάρκειας L για να αποκόψουμε ένα τμήμα της

- Ο Μετασχ. Fourier του μη ιδανικού φίλτρου θα είναι

$$F\{\hat{g}(t-t_0)\} = \hat{G}(f)e^{-j2\pi f t_0} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) * 2B\mathrm{sinc}(fL)e^{-j2\pi f t_0}$$

- L μικρό: σφάλμα στην προσέγγιση μεγάλο, αλλά εύκολα και γρήγορα πραγματοποιήσιμο

- L μεγάλο: σφάλμα στην προσέγγιση μικρό, αλλά «αργό» στην πραγματοποίηση

- **Φυσική Δειγματοληψία**
- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα, μια σειρά από τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας D

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t-\frac{D}{2}}{D}\right)$$

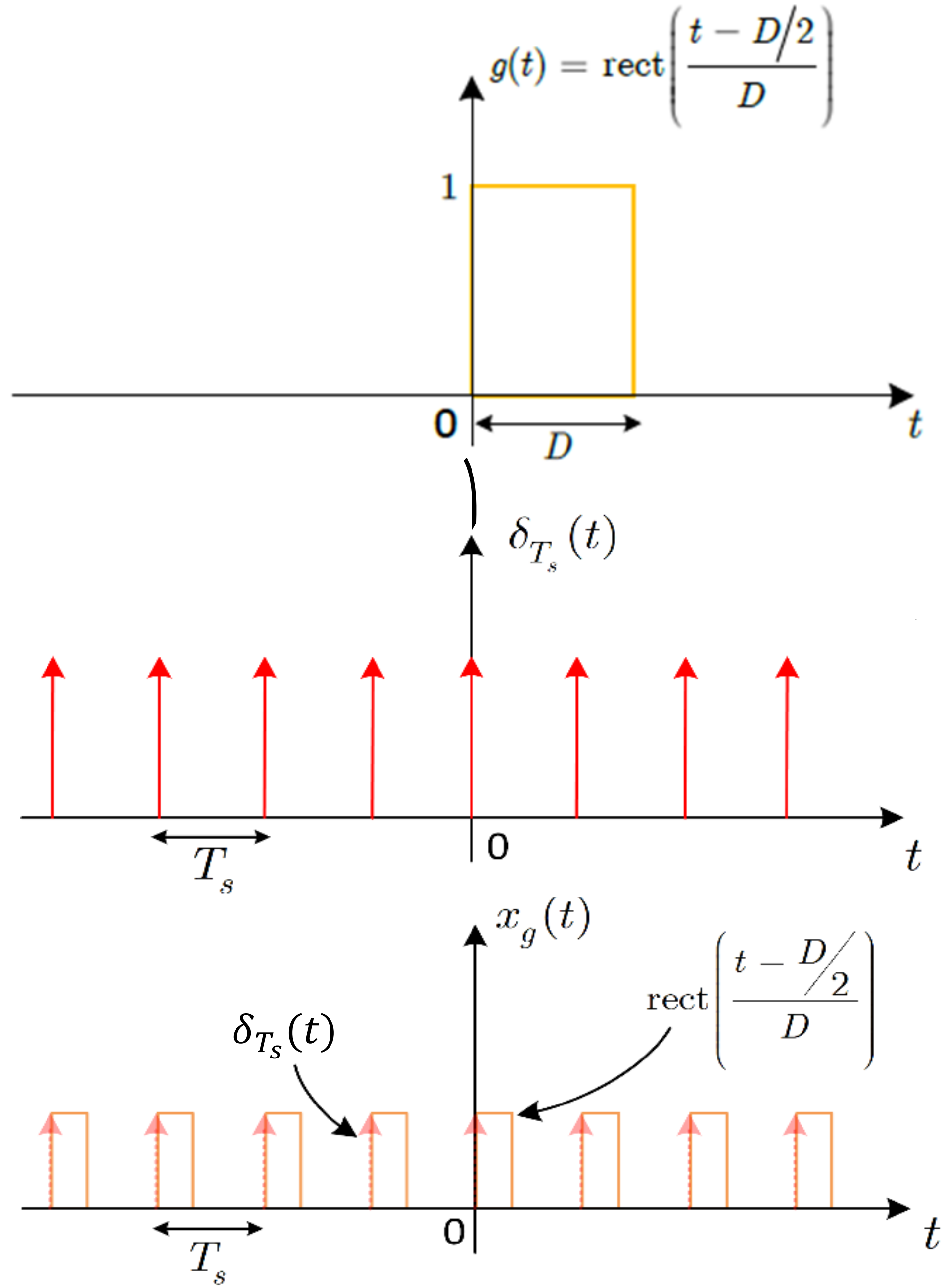
με μετασχ. Fourier

$$G(f) = D\text{sinc}(fD)e^{-j\pi fD}$$

- Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα είναι

$$x_g(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-nT_s)$$

- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα αυτή συνάρτηση δειγματοληψίας

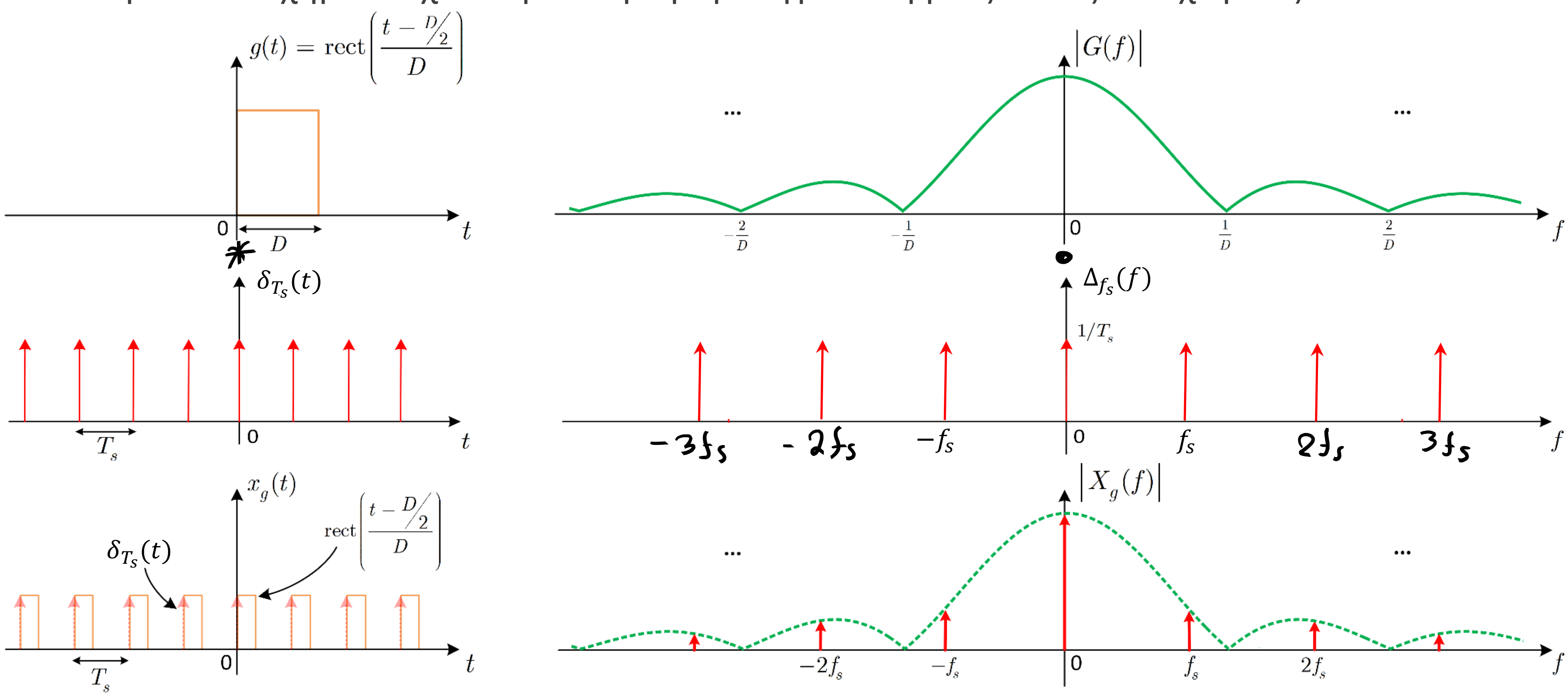


• Φυσική Δειγματοληψία

• Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα έχει μετασχ. Fourier

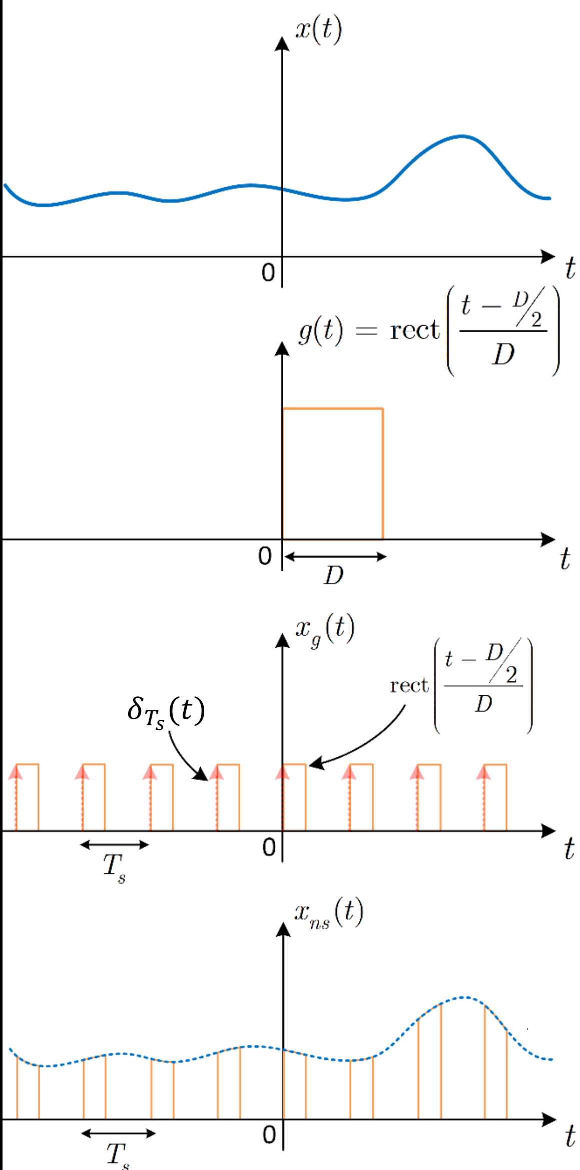
$$X_g(f) = G(f)\Delta_{f_s}(f) = G(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}G(kf_s)\delta(f-kf_s)$$

• Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη συνάρτηση δειγματοληψίας στους δυο χώρους

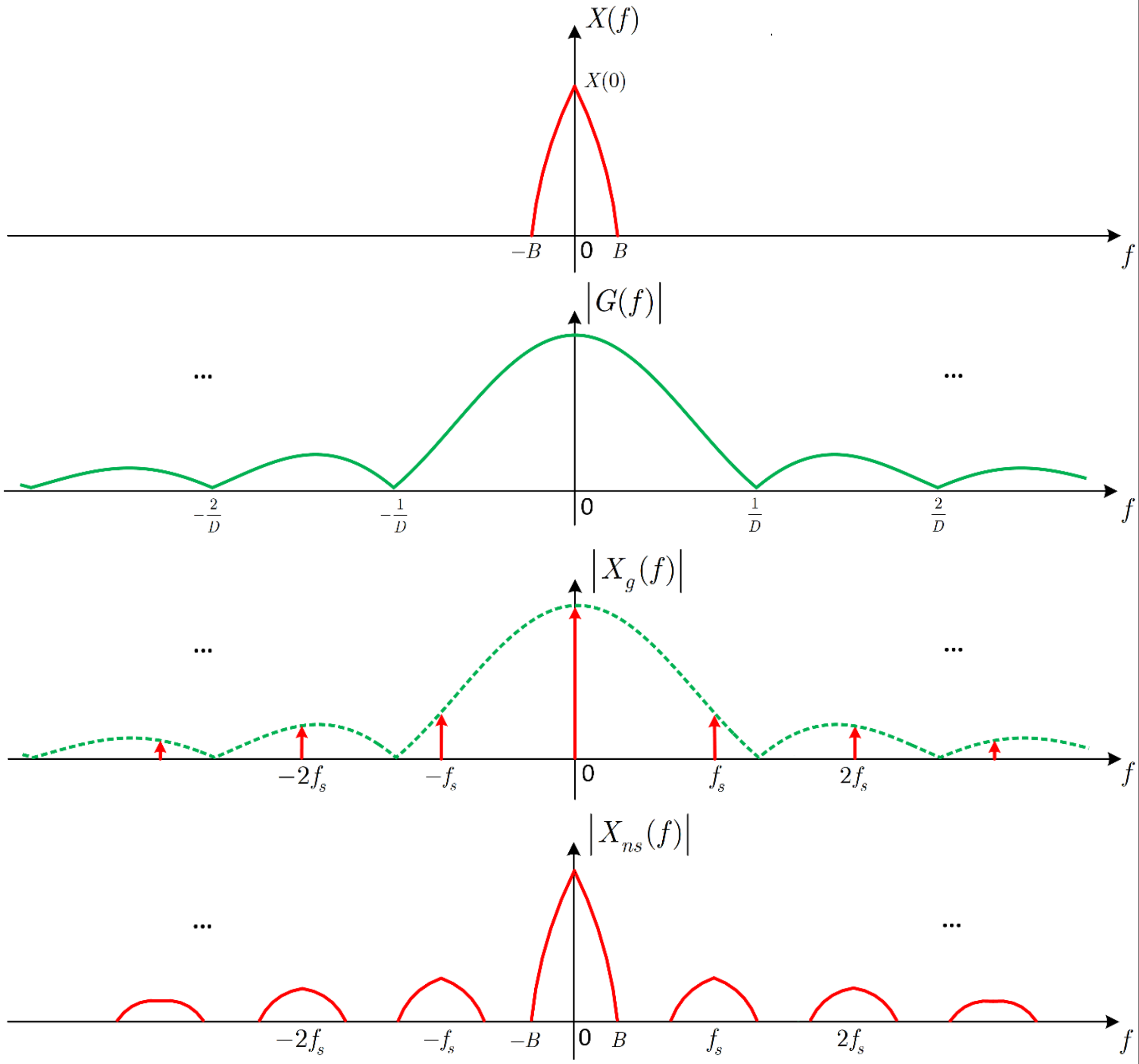


• Φυσική Δειγματοληψία

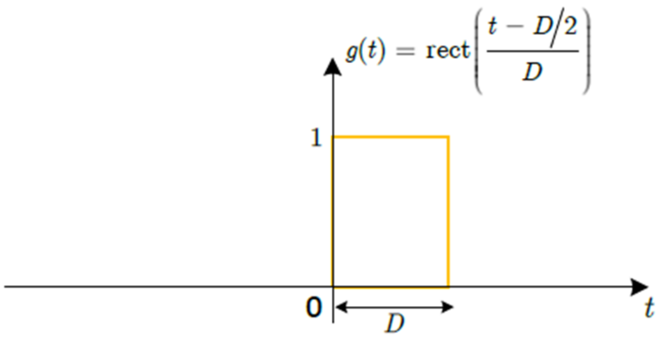
ΧΡΟΝΟΣ



ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

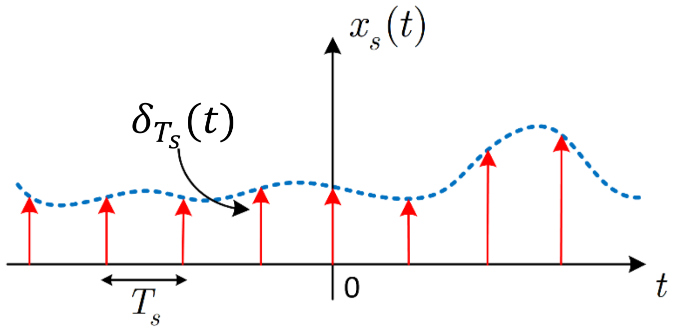


- **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**



- Πολλές φορές προτιμάται η σειρά παλμών να διατηρεί σταθερό το πλάτος κάθε παλμού σύμφωνα με τη χρονική στιγμή της δειγματοληψίας

- Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή αναπαρίσταται από μια εναλλαγή των πράξεων της φυσικής δειγματοληψίας

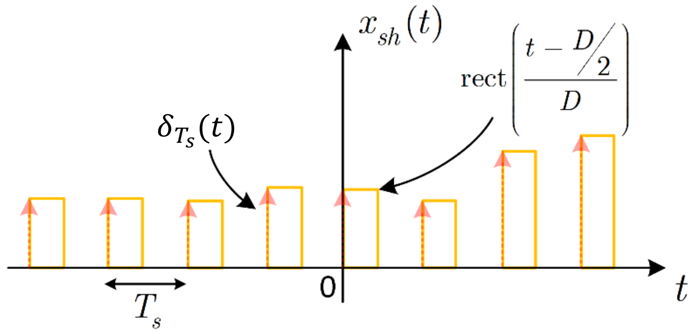


- Στη φυσική δειγματοληψία είχαμε

$$x_{ns}(t) = \left[\delta_{T_s}(t) * g(t)\right]x(t)$$

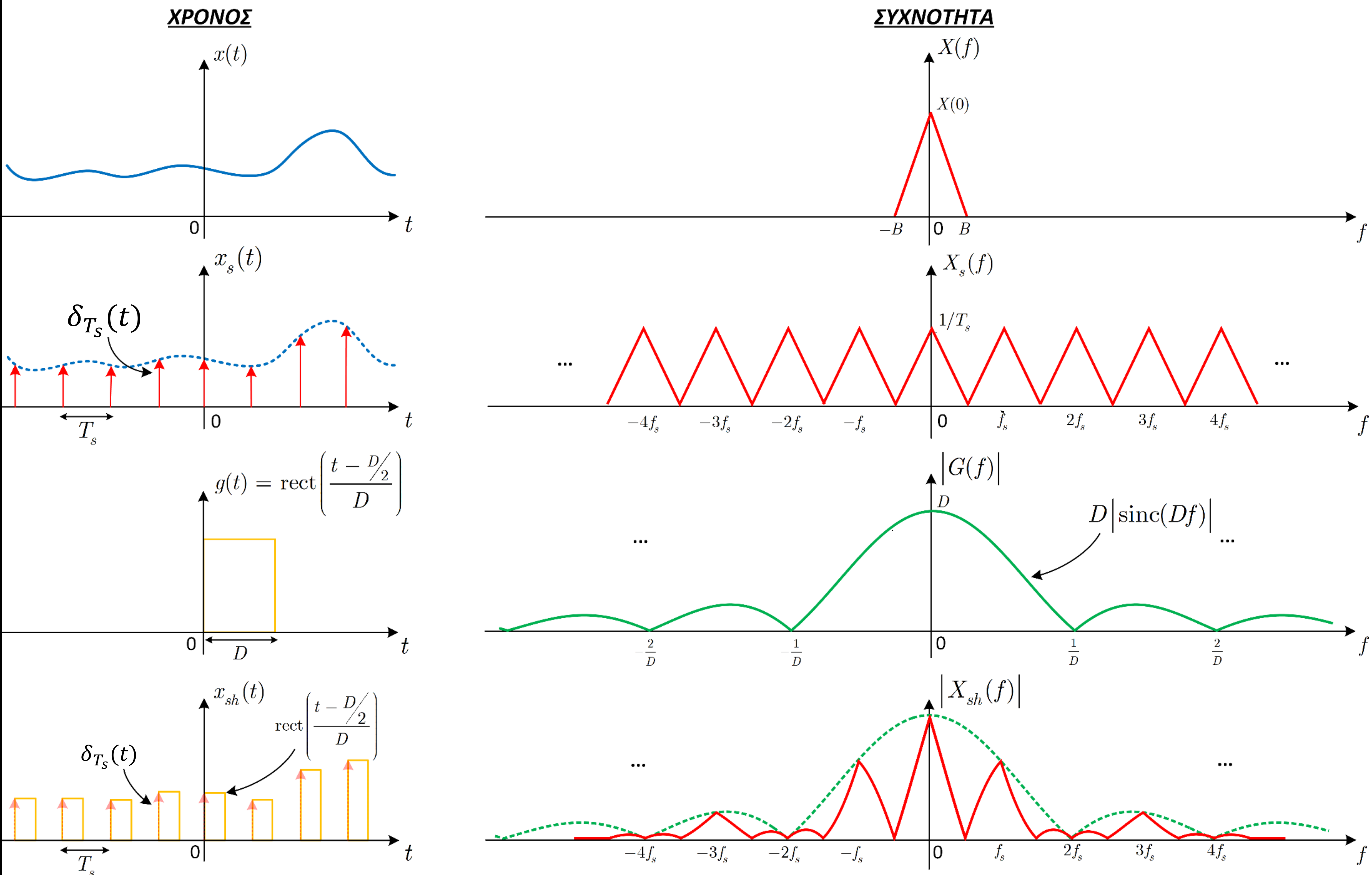
ενώ τώρα

$$x_{sh}(t) = \left[x(t)\delta_{T_s}(t)\right] * g(t)$$



- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα διαδικασία

• Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ