ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

- Δειγματοληψία

- **Δειγματοληψία**

- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα - samples*) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)

- Ας δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό…

- **Δειγματοληψία**

- Θέλουμε να αποθηκεύσουμε ένα σήμα $x(t)$ σε έναν Η/Υ

- Προφανώς δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις *άπειρες* τιμές του
  - Ακόμα κι αν αυτό είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα

- Πρέπει να πάρουμε μερικά **δείγματα** του σήματος $x(t)$
  - Τιμές: $x(-20), x(-1), x(0), x(10), x\left(\sqrt{152}\right), x(62.7)$, κ.ο.κ

- Τα δείγματα αυτά θέλουμε να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ξανά ***ακριβώς*** το σήμα συνεχούς χρόνου

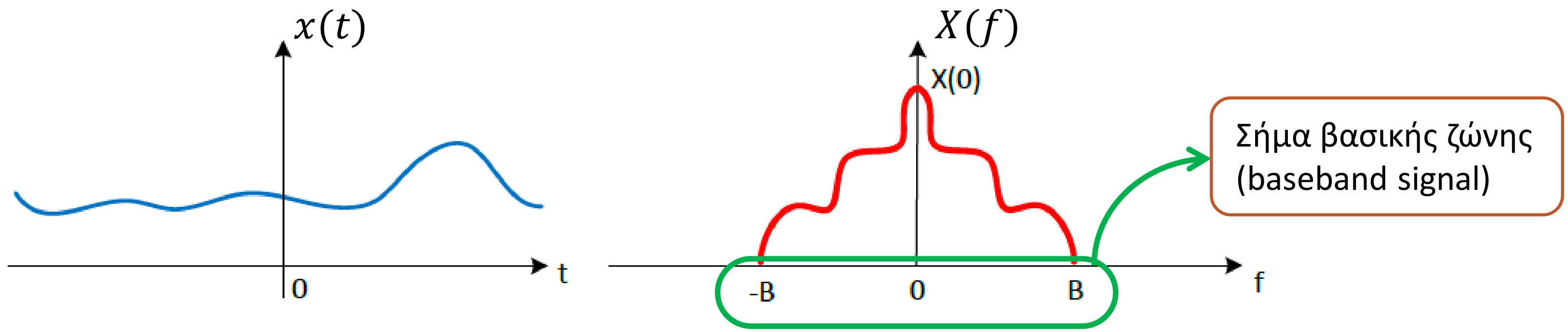
- **Ερώτημα Ι**: *ποιες* τιμές πρέπει να πάρουμε;
  - Όποιες θέλουμε? Κάποιες συγκεκριμένες? Έχει σημασία?

- **Ερώτημα ΙΙ**: *πόσο συχνά* πρέπει να τις πάρουμε;
  - Μια τιμή-δείγμα κάθε δευτερόλεπτο? Πιο συχνά? Λιγότερο συχνά? Έχει σημασία?

- Ας υποθέσουμε ότι θα δειγματοληπτήσουμε ***ομοιόμορφα*** και ότι το σήμα μας είναι σήμα ***βασικής ζώνης (baseband signal)***
  - Δηλ. με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος είναι μη μηδενικός γύρω από ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, π.χ. $X(f) \neq 0, \;\; f \in [-B, B]$

- **Δειγματοληψία**

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ και ο μετασχ. Fourier του $X(f)$ όπως στο σχήμα



- Για να «τραβήξουμε» δείγματα από το σήμα $x(t)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη δειγματοληπτική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Ας ορίσουμε μια **συνάρτηση δειγματοληψίας με περίοδο δειγματοληψίας T_s**

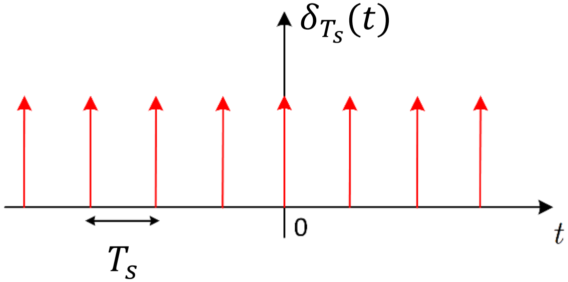
$1/T_s$ $= 1/T_s$

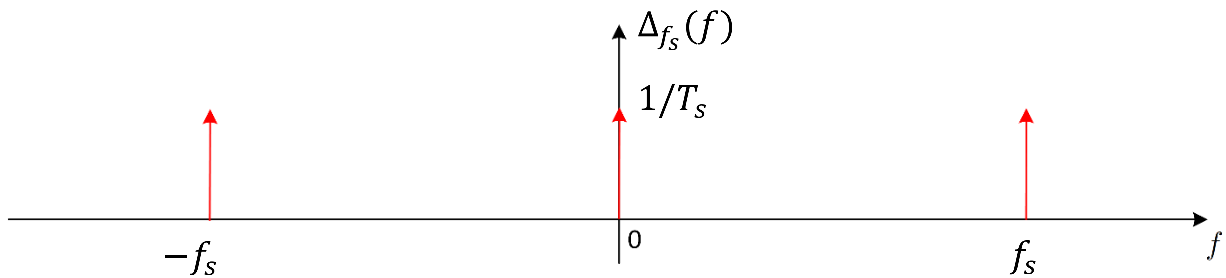
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** είναι $f_s = 1/T_s$

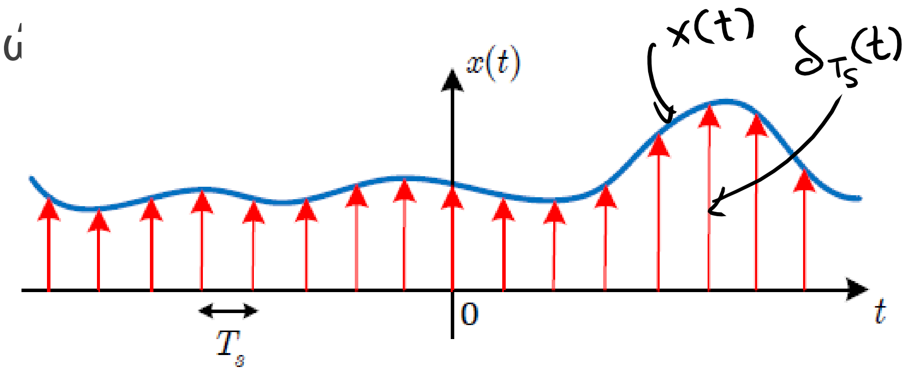
- **Δειγματοληψία**

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

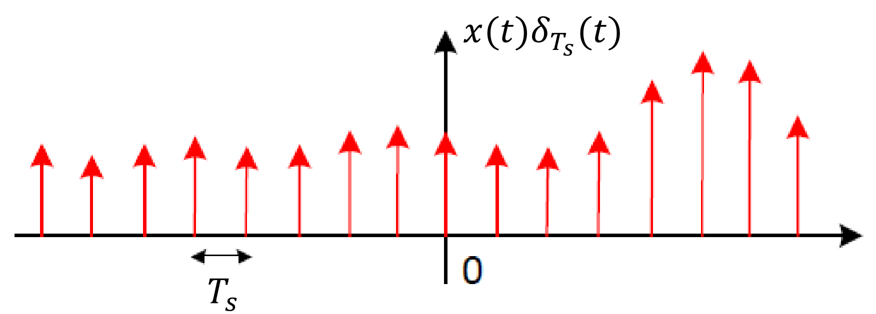




- Το γινόμενο της $\delta_{T_s}(t)$ με το σήμα $x(t)$ θα δώ
μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με *μη μοναδιαίους* συντελεστές
  - Συναρτήσεις δέλτα που η επιφάνειά τους έχει αλλάξει με βάση το σήμα



- Τα δείγματα απέχουν χρόνο T_s μεταξύ τους
  - Ας υποθέσουμε ότι αυτή η τιμή είναι «αρκετά μικρή»
  - Οπότε η $f_s = 1/T_s$ «αρκετά μεγάλη»



- **Δειγματοληψία**

- Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των δυο σημάτων στο χρόνο θα μετατραπεί σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας

- Δηλ.

$$x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

και

$$X(f) * \Delta_{f_s}(f) = \overbrace{\boxed{X(f)}}^{M.F.\ x(t)} * \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f - kf_s)}_{M.F.\ \delta_{T_s}(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}X(f - kf_s)$$

λόγω της ιδιότητας

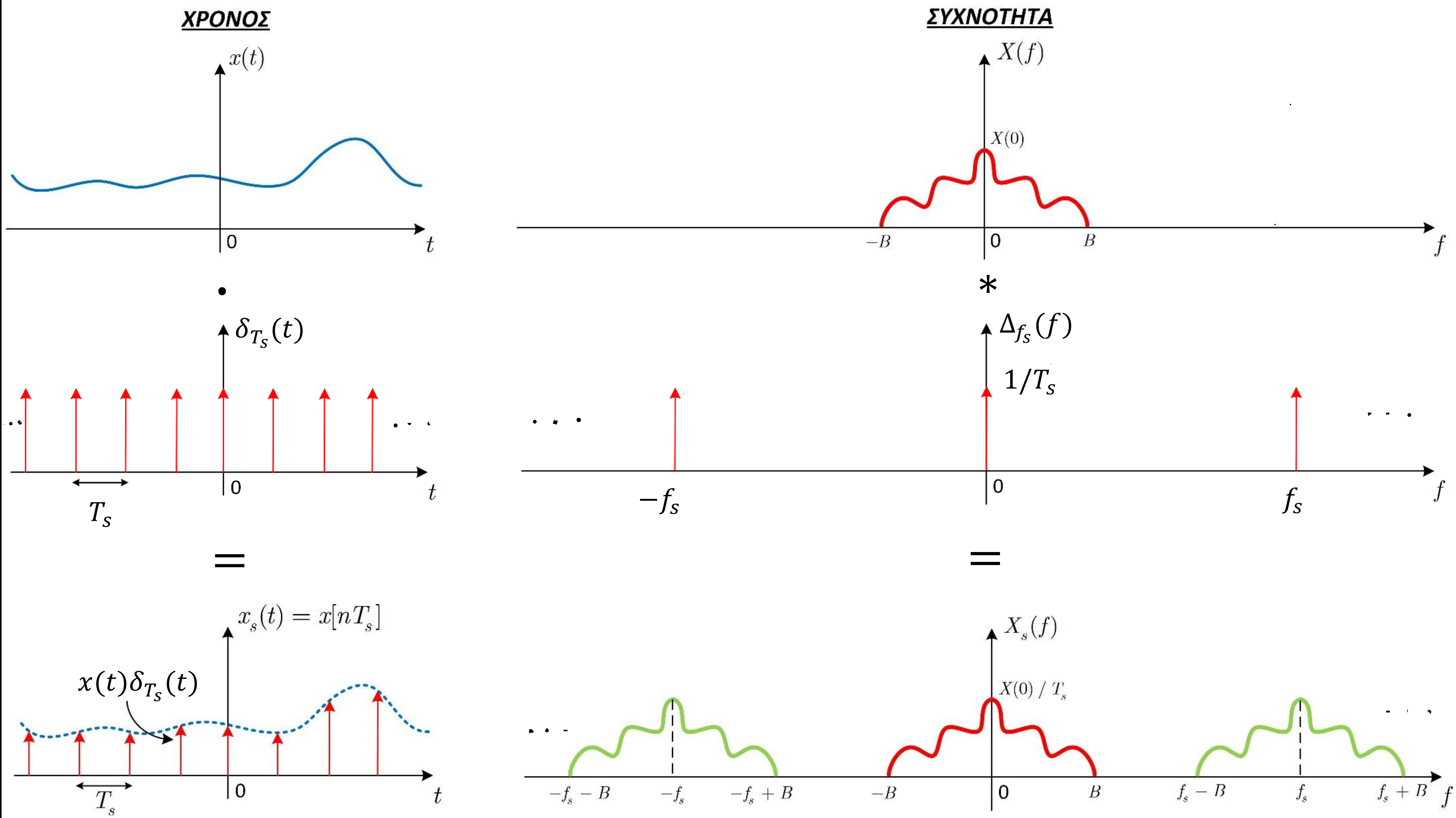
$$X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$$

- Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα από τους μετασχηματισμούς Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου, τοποθετημένους σε απόσταση f_s (ανά δυο) μεταξύ τους!!

- Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι **περιοδικός** στη συχνότητα με περίοδο f_s!!!

• Δειγματοληψία

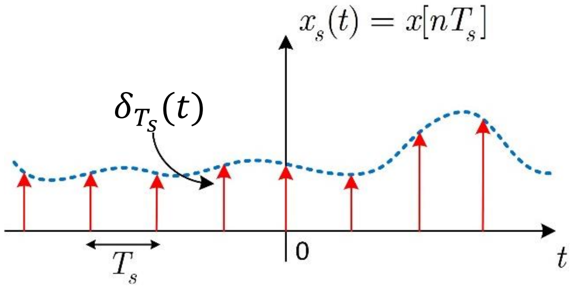
• Σχηματικά, έχουμε την παρακάτω εικόνα:

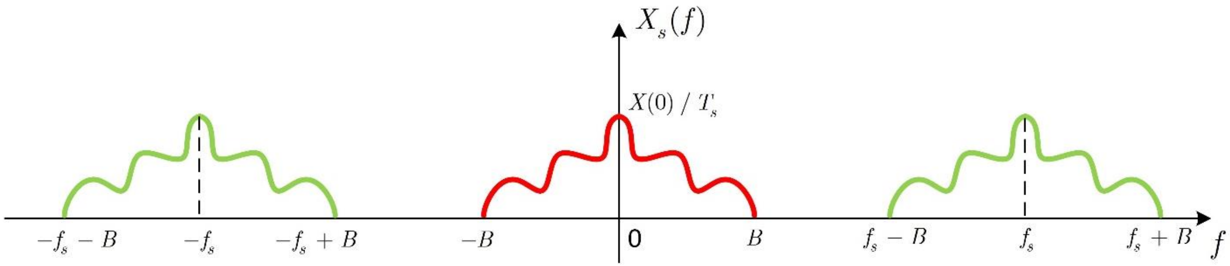


- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**

- Έχουμε τώρα τα δείγματα από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου
  - Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου

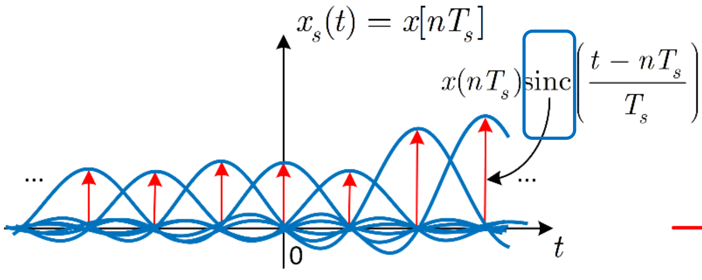
- Πως θα ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?

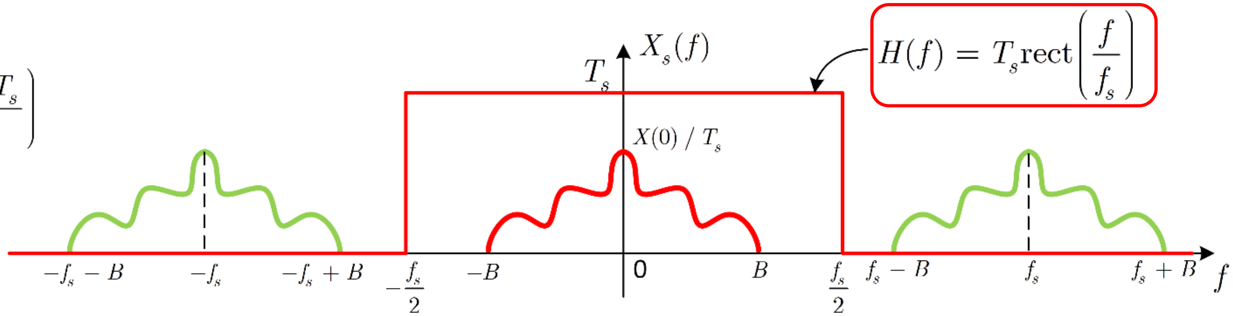




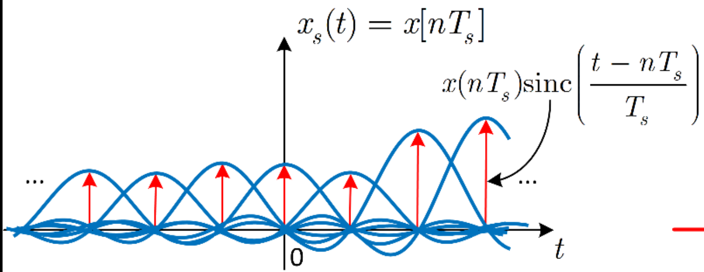
- Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θα μπορούσε να απομονώσει το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου

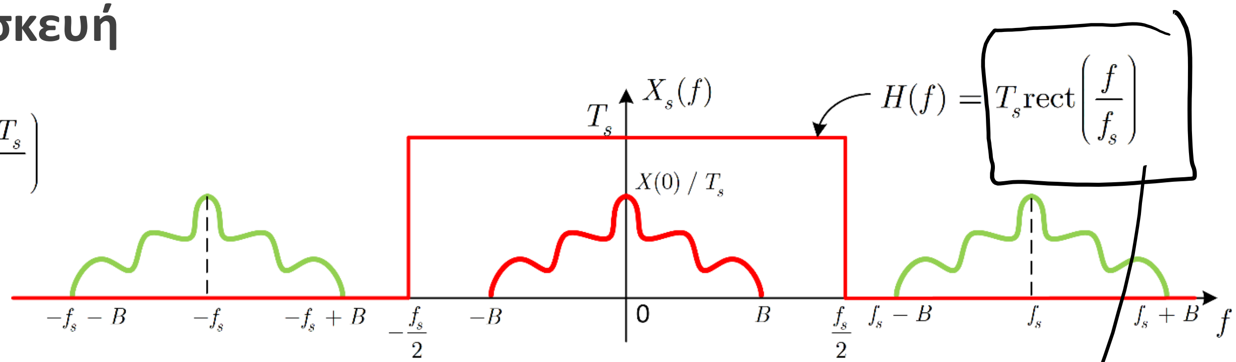
- Το γινόμενο του φίλτρου με το φάσμα στη συχνότητα αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο χρόνο των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση $\boxed{\mathrm{sinc}(.)}$!!!!





• Δειγματοληψία – Ανακατασκευή





F^{-1}

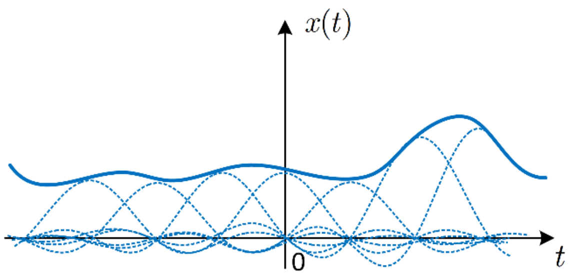
• Με μαθηματικά:

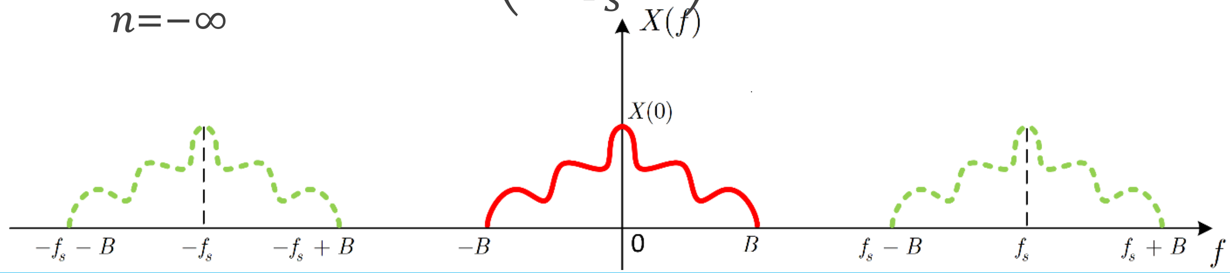
$$[X(f) * \Delta_{f_s}(f)]H(f) = [X(f) * \Delta_{f_s}(f)]T_s\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = X(f)$$

• Στο πεδίο του χρόνου:

$$\left(x(t)\delta_{T_s}(t)\right) * h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

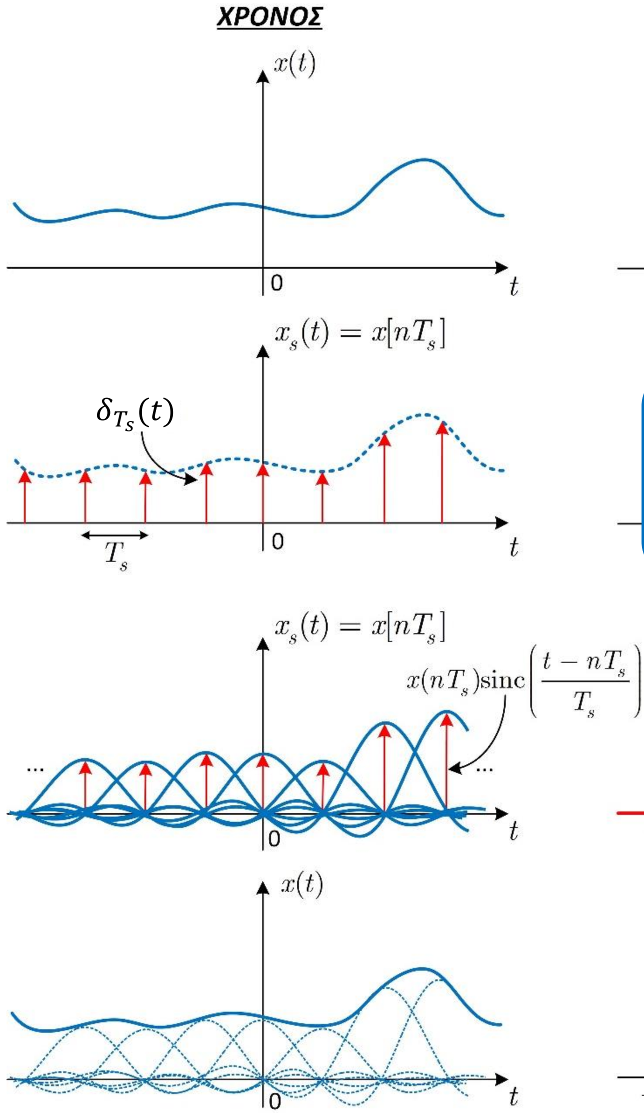
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) = x(t)$$

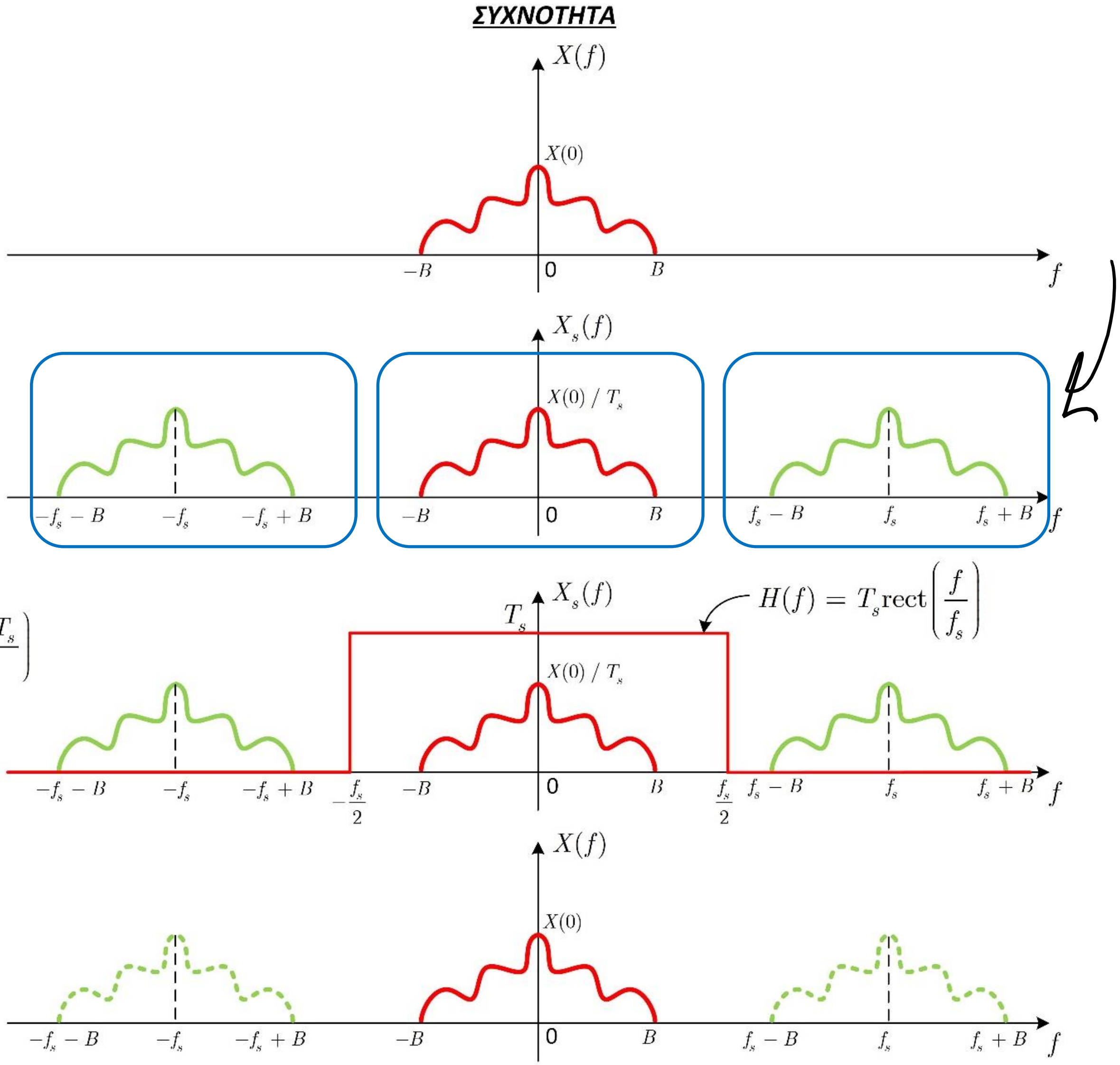




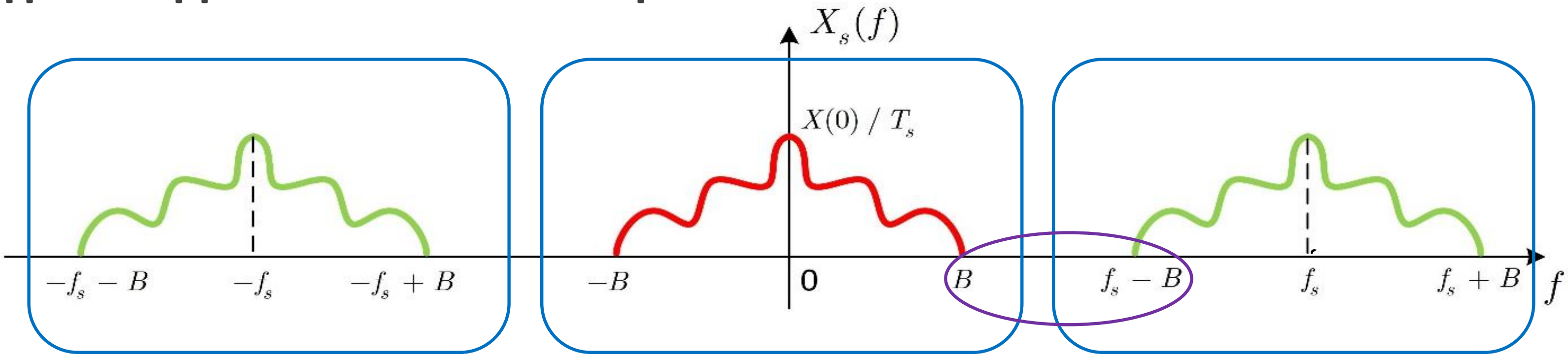
- **Δειγματοληψία και Ανακατασκευή**

- Συγκεντρωτικά:





- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**



- Για να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, πρέπει το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος να μην έχει επικαλύψεις!
  - Η **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s να είναι «αρκετά μεγάλη»
  - Πόσο μεγάλη?

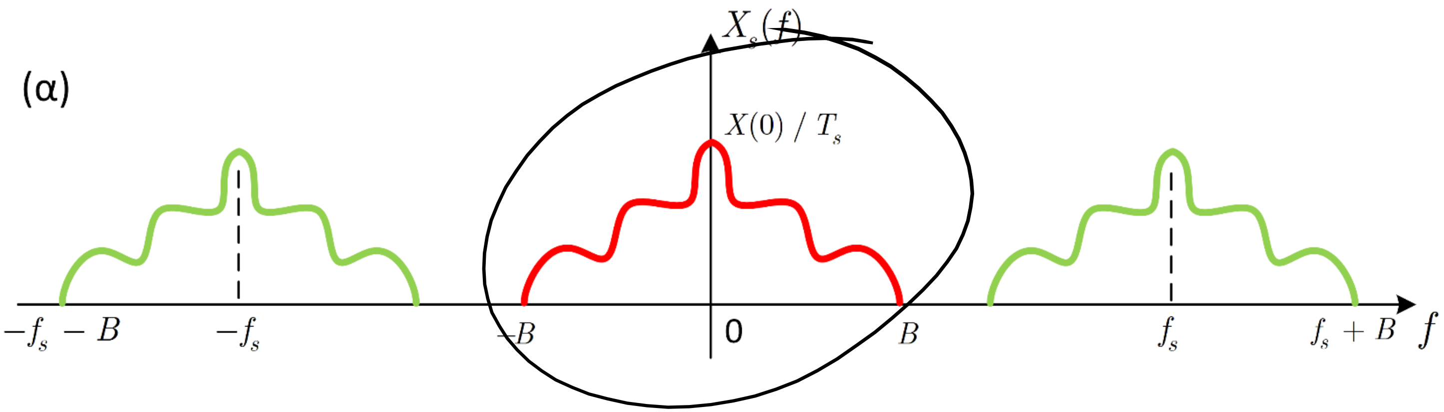
- Αρκεί

$$\boxed{f_s - B > B \Leftrightarrow f_s > 2B = 2f_{max}}$$

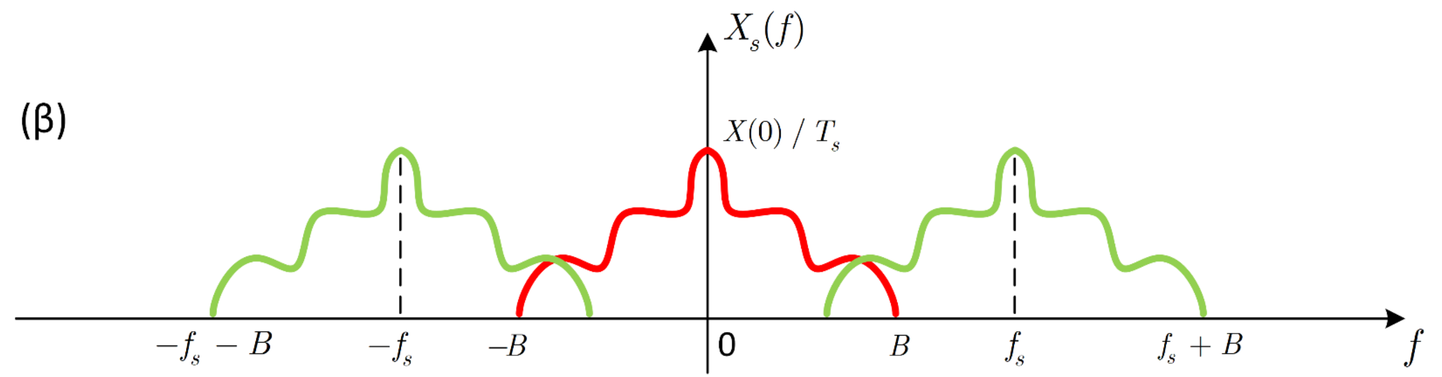
που αποτελεί και το θεώρημα της Δειγματοληψίας

- Με άλλα λόγια, **μπορούμε να ανακατασκευάσουμε <u>πλήρως και ακριβώς</u> το σήμα συνεχούς χρόνου από μια δειγματοληπτημένη έκδοσή του (ένα σήμα *διακριτού* χρόνου) αν τα δείγματα έχουν ληφθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $2B$ Hz, με $2B$ τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος**

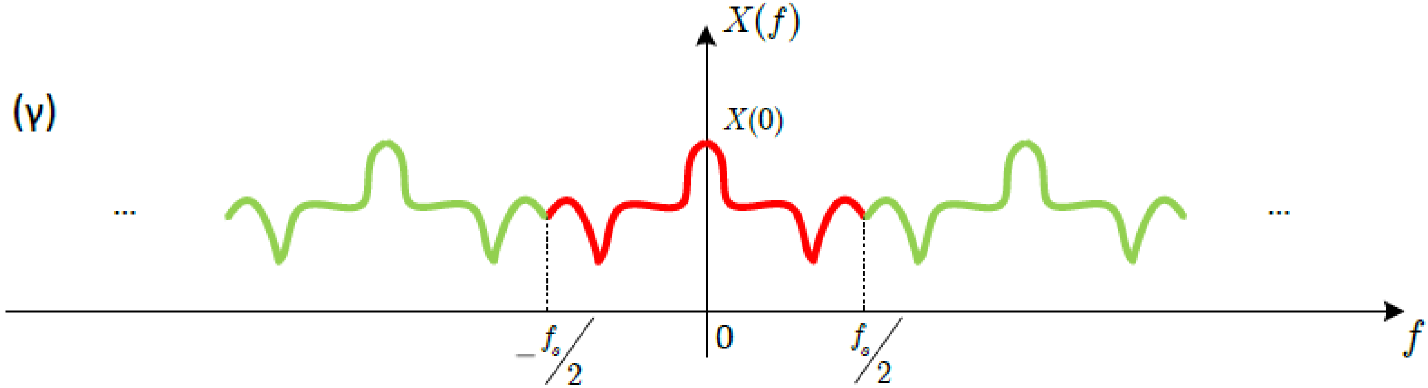
- **Δειγματοληψία – Aliasing**
- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?
- Αν $f_s > 2f_{max}$, τότε:



- Αν όμως $f_s < 2f_{max}$, τότε:



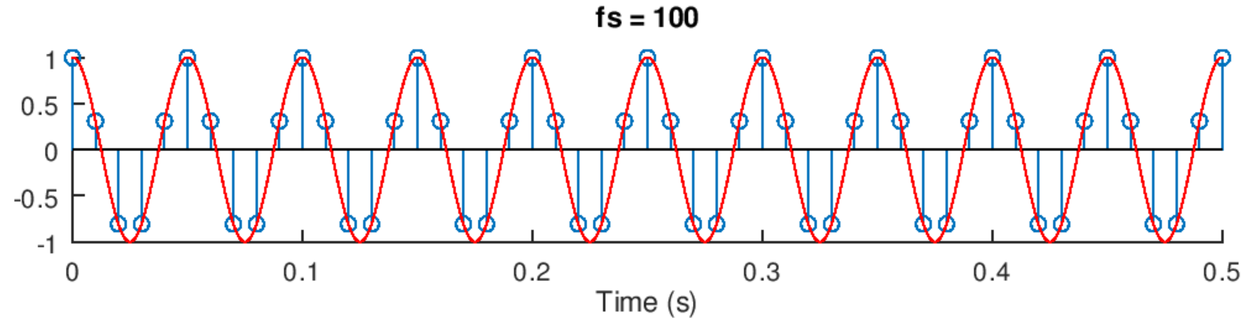
- **Δειγματοληψία – Aliasing**
- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?
- Το φάσμα που θα αποκόψει το χαμηλοπερατό φίλτρο θα μοιάζει με το παρακάτω:



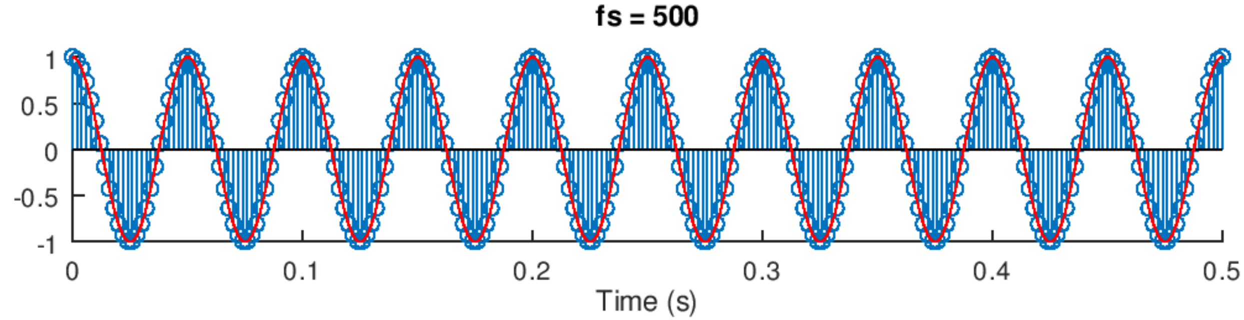
- Το φάσμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα εντελώς διαφορετικό σήμα στο χρόνο, σε σχέση με αυτό που δειγματοληπτήθηκε!!
- Βλέπετε ότι έχουν εισαχθεί (και αλλοιώσει) το φάσμα συχνότητες που δεν ανήκουν σε αυτό (ξένες συχνότητες)
  - … οι οποίες προέρχονται από το άθροισμα συχνοτήτων του ίδιου του σήματος και των γειτονικών αντιγράφων του
- Οι συχνότητες αυτές λέγονται **ψευδώνυμες** συχνότητες (**aliased** frequencies)
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
  - **Ψευδωνυμία** ή **Αναδίπλωση** (in Greek)

- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Έστω ένα απλό ημίτονο με $f_0 = 20$ Hz το οποίο δειγματοληπτείται με συχνότητες δειγματοληψίας

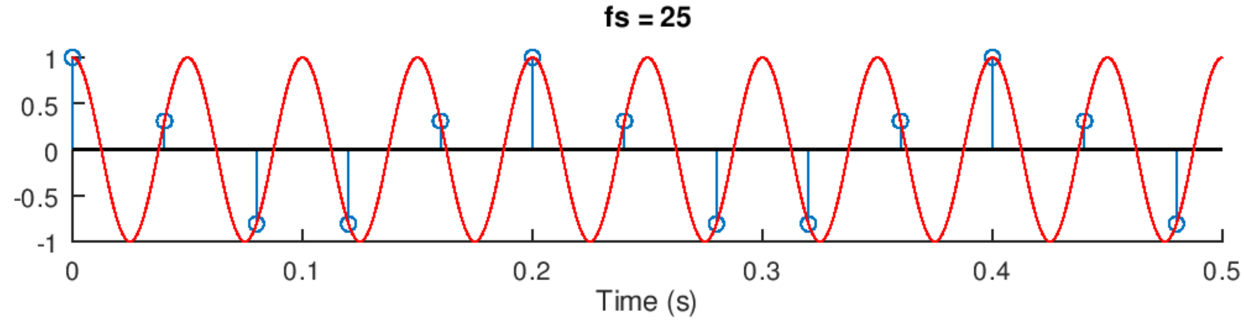
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz

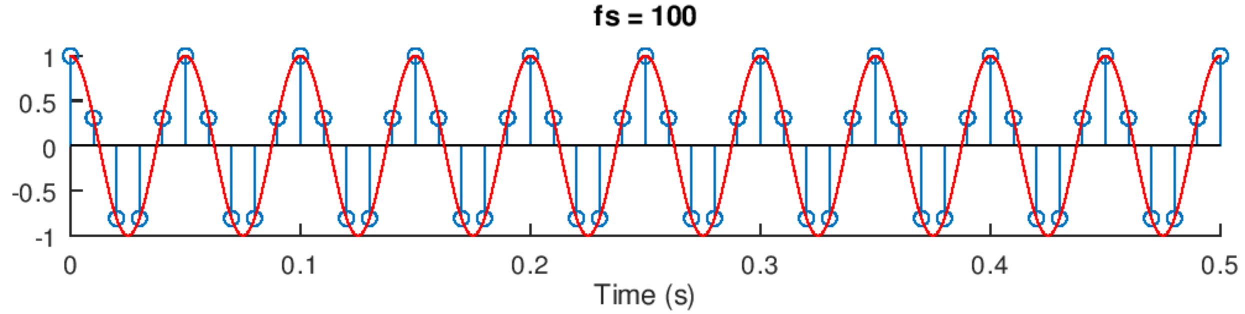


❑ $f_s = 25$ Hz

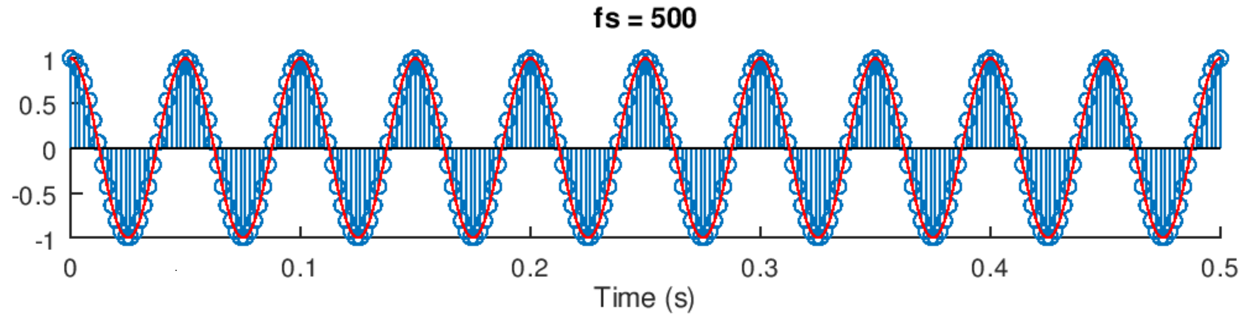


- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ποιο είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται στην τελευταία περίπτωση?

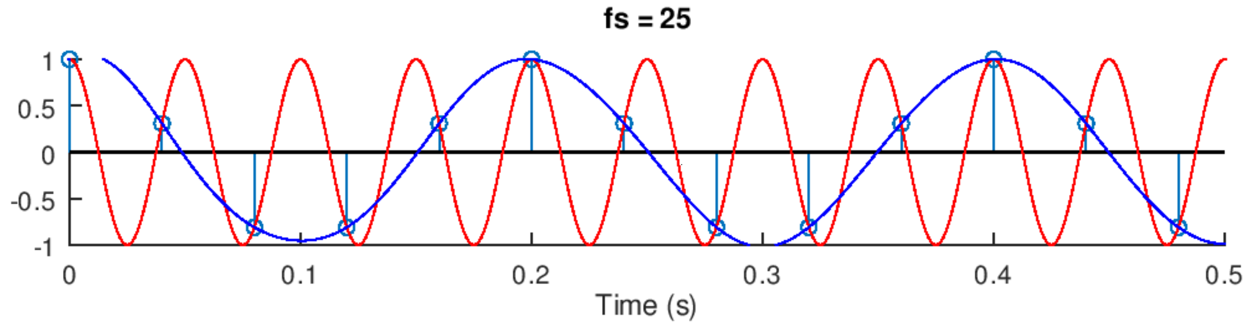
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz



❑ $f_s = 25$ Hz



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:
  - Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

$$x(t) = 3\cos(\underbrace{400\pi t}_{200Hz}) + 5\sin(\underbrace{1200\pi t}_{600Hz}) + 6\cos(\underbrace{4400\pi t}_{2200Hz})$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Αντικαθιστώ όπου t το $nT_s \Rightarrow t := nT_s$

Οπότε

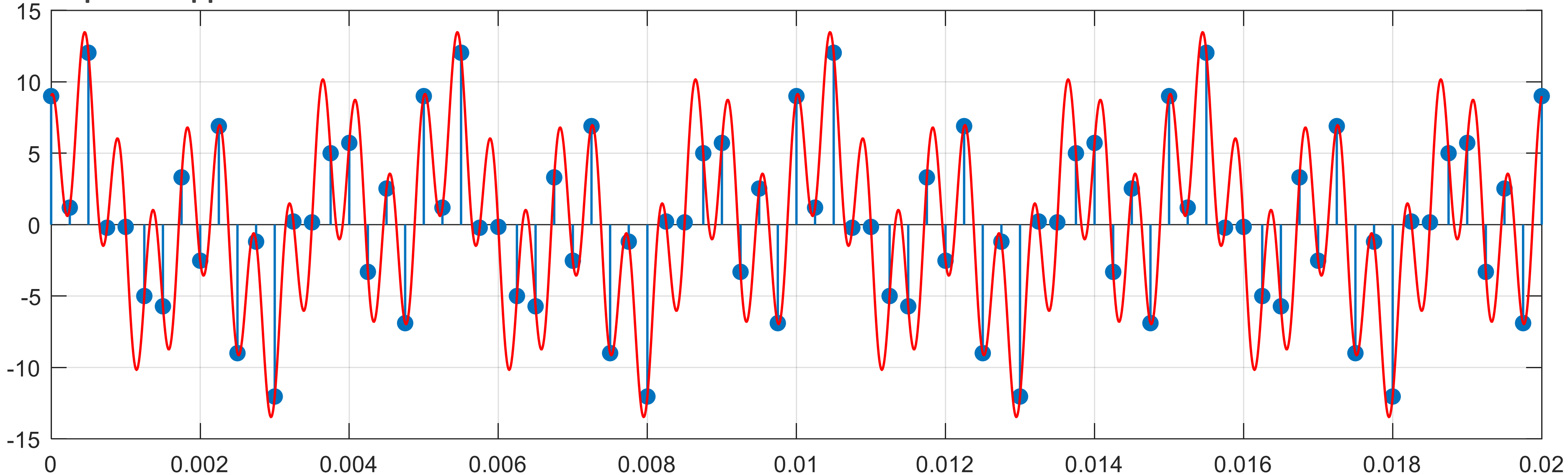
$$x(nT_s) = 3\cos(400\pi nT_s) + 5\sin(1200\pi nT_s) + 6\cos(4400\pi nT_s)$$

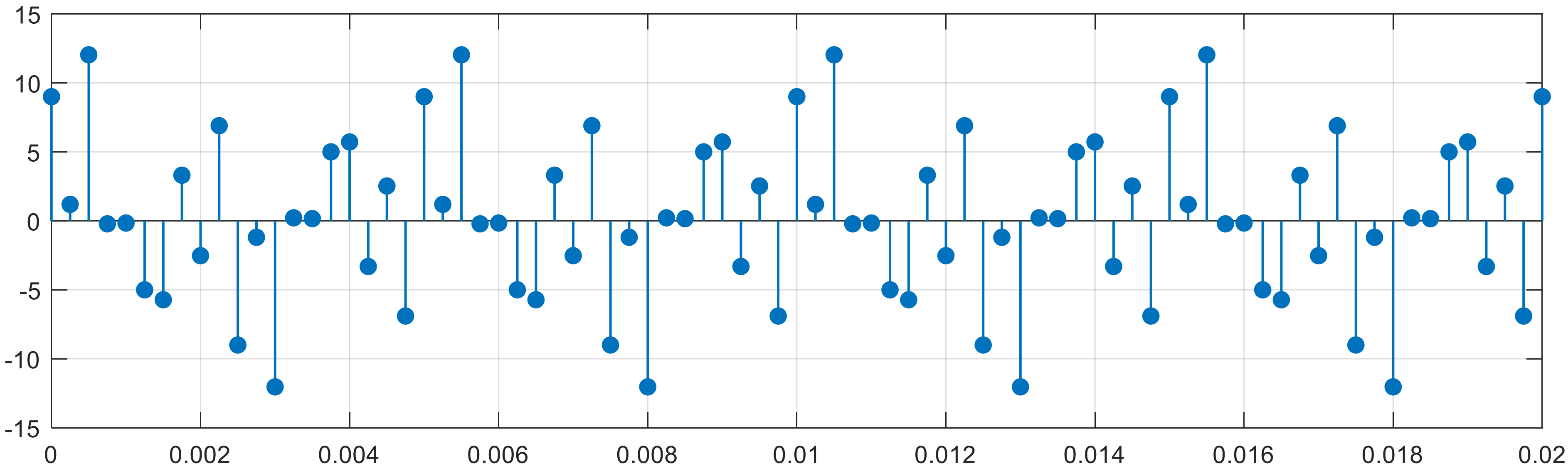
$$= 3\cos\left(\frac{400\pi n}{4000}\right) + 5\sin\left(\frac{1200\pi n}{4000}\right) + 6\cos\left(\frac{4400\pi n}{4000}\right)$$

$$= 3\cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6\cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right)$$

- **Δειγματοληψία**

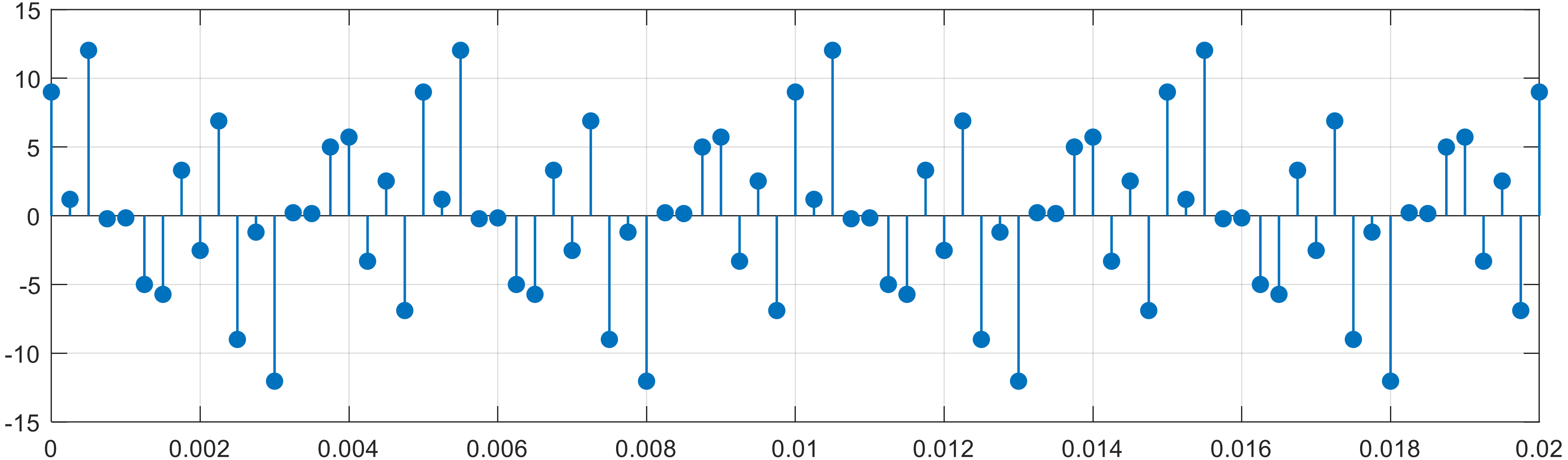
- Παράδειγμα:

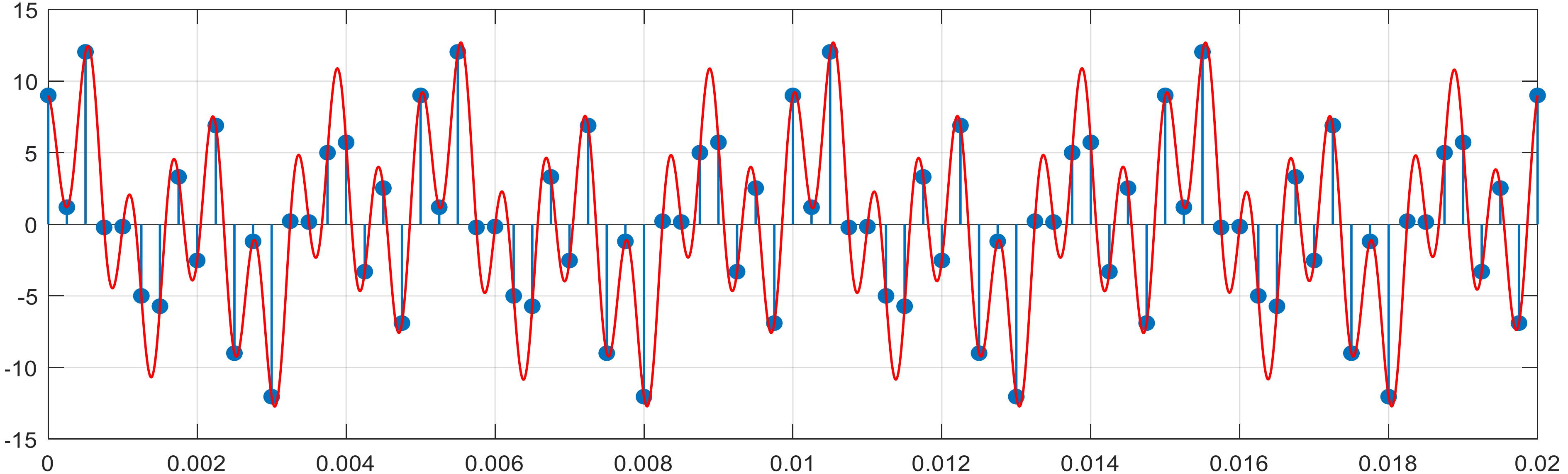




- **Δειγματοληψία**

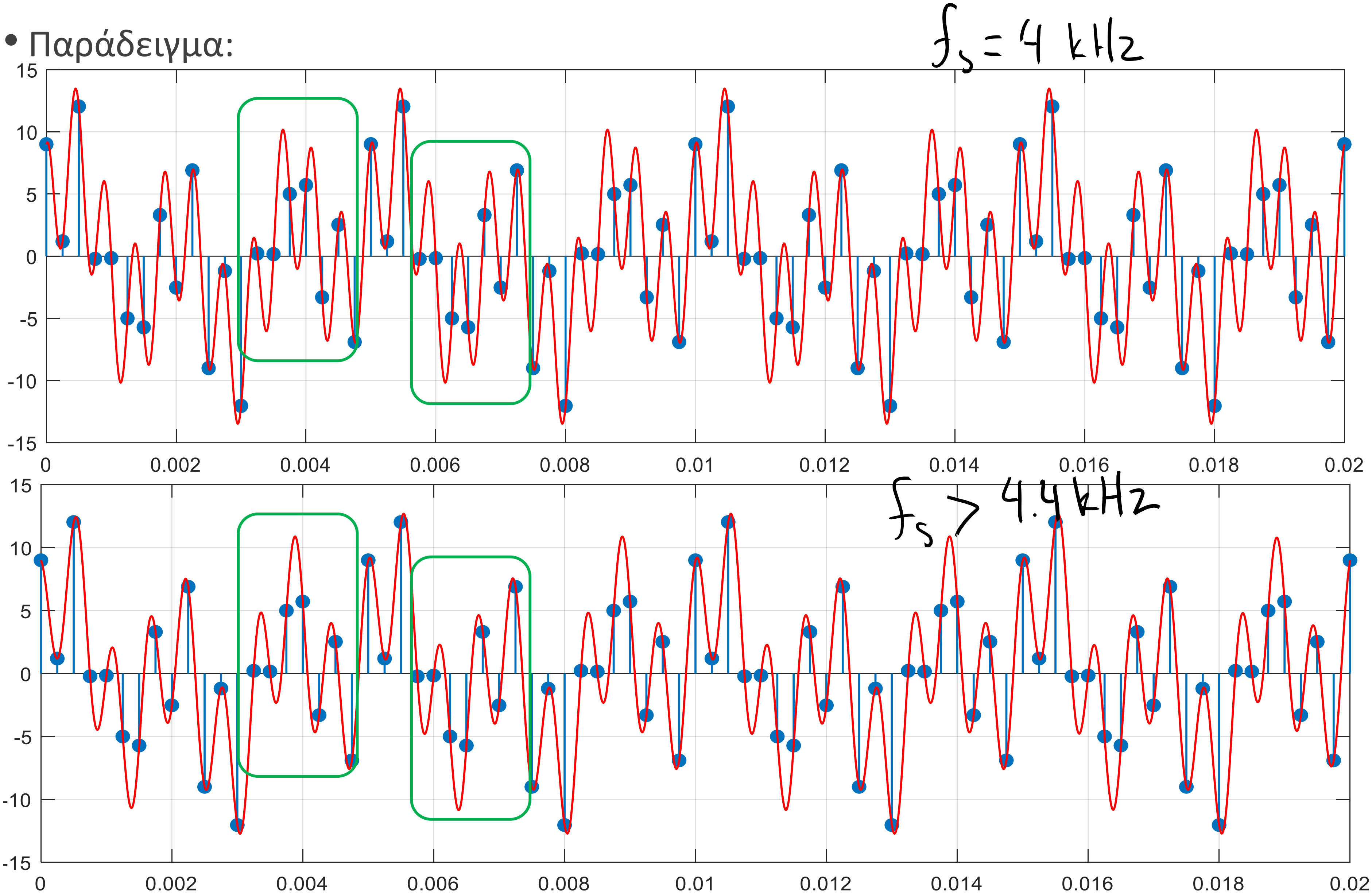
- Παράδειγμα:





- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

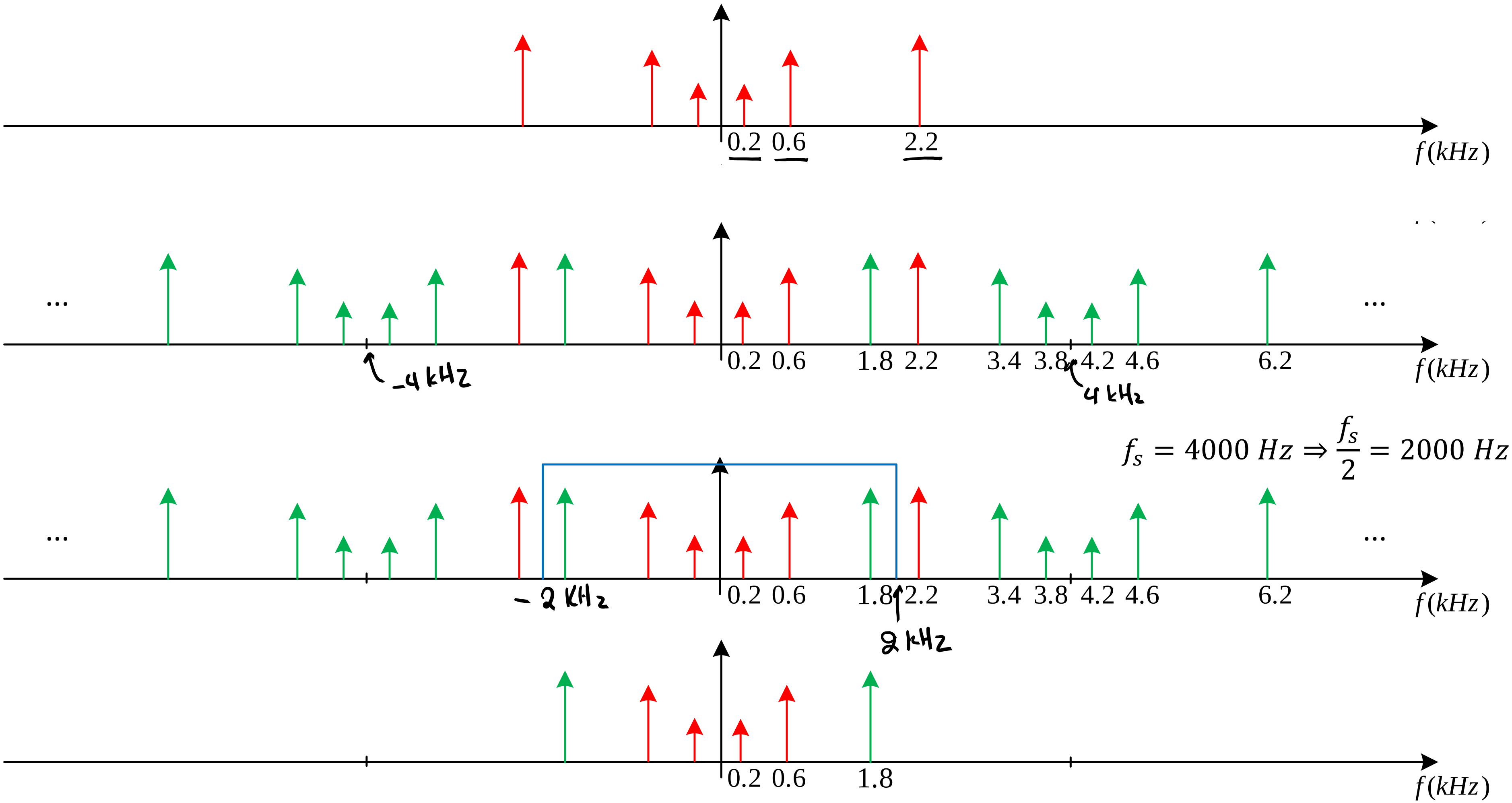


- **Δειγματοληψία**

$\frac{3}{2}\delta(f-200) + \frac{3}{2}\delta(f+200)$

- Ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο του ανακατασκευασμένου σήματος?

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$



$$x_r(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(3600\pi t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ