ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Περιοδικά Σήματα**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ενέργειας**

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων
- Θα λάβουμε ιδιαίτερη βοήθεια σχετικά με τα σήματα ισχύος που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
    - Εξίσου σημαντικές είναι όμως και για τα σήματα ενέργειας
- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι φασματικές πυκνότητες σχετίζονται με τους *μετασχηματισμούς Fourier* των σημάτων
- Ας ξεκινήσουμε με τα τελευταία (σήματα ενέργειας)
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή*** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$x(\tau+t_0) \xleftrightarrow{F} X(f)\,e^{j2\pi f t_0}$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(X(f) e^{j2\pi f t} \right) dt$$

$$= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Άρα ο μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ισούται με $|X(f)|^2$

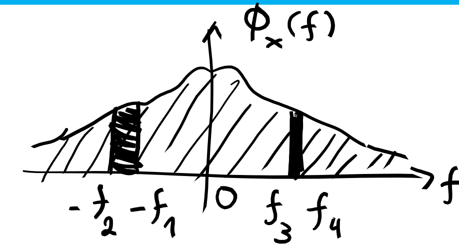
$$\boxed{\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2}$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος
- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \qquad x(t) \in \Re$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \qquad \forall f$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**



- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \,\Big|_{\tau=0} = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df} = E_x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x}$$

- **Βλέπουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)$$

- Παρατηρήστε ότι αφού

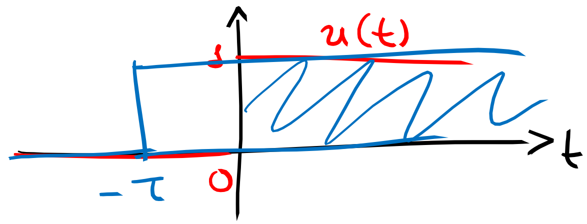
$$\boxed{\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)}$$, για $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

ισχύει ότι

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**



○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-2at}u(t), \qquad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

(α) Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)\cdot e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-2at}\cdot e^{-2a\tau}u(t)u(t+\tau)\,dt$$

$$= e^{-2a\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at}u(t)u(t+\tau)\,dt \quad (1)$$

Είναι $u(t) = 1$, $\boxed{t>0}$, ενώ $u(t+\tau) = 1$, $t+\tau>0 \Rightarrow \boxed{t>-\tau}$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

- $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt$

$$= e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} e^{-3at} \right) \Big]_{-\tau}^{+\infty} = e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-3at} - e^{3a\tau} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left(0 - e^{3a\tau} \right) = \frac{1}{3a} e^{a\tau}, \ \tau < 0 = \frac{1}{3a} e^{a\tau} u(-\tau).$$

- $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt$

$$= e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} e^{-3at} \right) \Big]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-3at} - 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left(0 - 1 \right) = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau}, \ \tau > 0 = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau} u(\tau).$$

Συνολικά, $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a} \left(e^{-2a\tau} u(\tau) + e^{a\tau} u(-\tau) \right)$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Παράδειγμα:

$$X^*(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

(β) $\varphi_{xy}(\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$

Είναι $x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \dfrac{1}{a + j2\pi f}$

$y(t) = e^{-2at}u(t),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f) = \dfrac{1}{2a + j2\pi f}$

Άρα $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \dfrac{1}{(a - j2\pi f)(2a + j2\pi f)} =$

$= \dfrac{A}{a - j2\pi f} + \dfrac{B}{2a + j2\pi f}$, μπορούμε να βρούμε ότι $A = \dfrac{1}{3a} = B$

Οπότε $\Phi_{xy}(f) = \dfrac{1}{3a}\dfrac{1}{a - j2\pi f} + \dfrac{1}{3a}\dfrac{1}{2a + j2\pi f}$, κι από πίνακες

έχουμε $\varphi_{xy}(\tau) = \dfrac{1}{3a}\left(e^{a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau)\right)$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Για τα περιοδικά σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων
  - Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση
- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

Parseval ξανά!:

$$\phi_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $|X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπτώντας τη φασματική πυκνότητα *ενέργειας* **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος, δηλ.

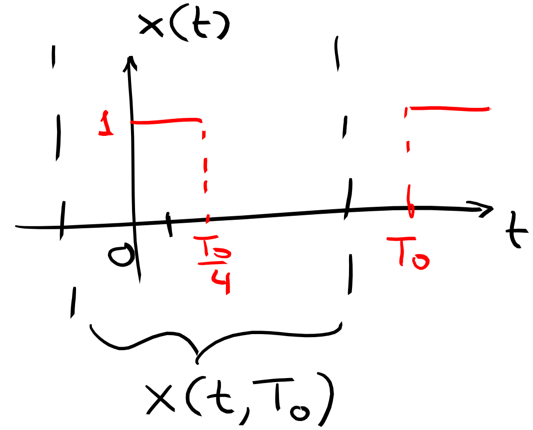
$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f = k f_0}$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

  - Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t,T_0)=\begin{cases}1, & 0<t<\frac{T_0}{4}\\ 0, & \frac{T_0}{4}<t<T_0\end{cases}$$



Θεωρούμε τη μια περίοδο του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ. την $x(t,T_0)$. Είναι:

$$x(t,T_0)=\text{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{8}}{\frac{T_0}{4}}\right)\overset{F}{\longleftrightarrow} X(f,T_0)=\frac{T_0}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)e^{-j\pi f\frac{T_0}{4}}$$

Άρα $$\Phi_x(f,T_0)=|X(f,T_0)|^2=\left(\frac{T_0}{4}\right)^2\left|\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2\left|\cancel{e^{-j\pi f\frac{T_0}{4}}}\right|^2 \; 1$$

$$=\frac{T_0^2}{16}\left|\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2=\frac{T_0^2}{16}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right).$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

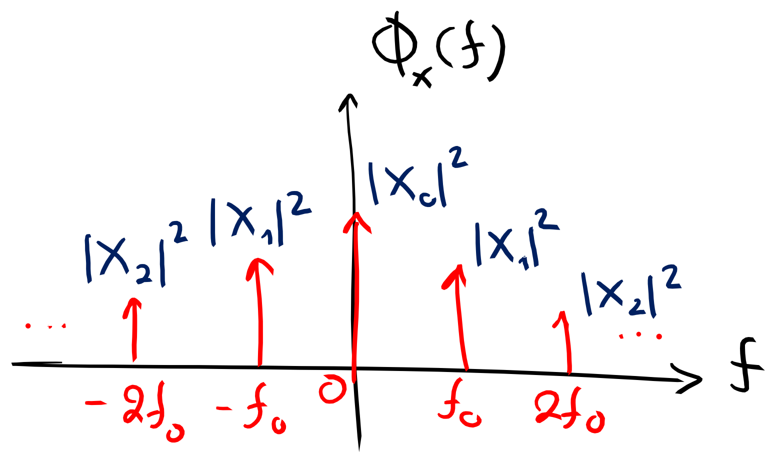
- Παράδειγμα:

Άρα $|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\,\Phi_x(f,T_0)\Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{\cancel{T_0^2}}\,\frac{\cancel{T_0^2}}{16}\,\operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right)\Big|_{f=kf_0}$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}kf_0\right) \overset{f_0T_0=1}{=\!=\!=} \frac{1}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = |X_k|^2$$

Οπότε

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2\,\delta(f-kf_0) = \frac{1}{16}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$$



Την κατανομή της ισχύος του περιοδικού σήματος στη συχνότητα

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα

- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος αποτελεί το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο περιοδικών σημάτων

$$\underline{\Phi_{xy}(f)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k^* Y_k}\, \delta(f - kf_0)$$

$$\underline{\Phi_{yx}(f)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k Y_k^*}\, \delta(f - kf_0)$$

με

$$\boxed{\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} X(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} \\ Y_k &= \frac{1}{T_0} Y(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} \end{aligned}}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

$$= \frac{1}{T_0^2} X^*(f,T_0) Y(f,T_0)\Big|_{f=kf_0}$$

ή

$$\frac{1}{T_0^2} X(f,T_0) Y^*(f,T_0)\Big|$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι φασματικές πυκνότητες μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων
- Για απεριοδικά σήματα ισχύος, κάτι τέτοιο δεν ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για σήματα ισχύος ισχύει η σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2$$

με

$$X(f,T) = F\left\{x(t)\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

δηλ. το μετασχ. Fourier ενός τμήματος του σήματος ισχύος, διάρκειας T

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να μην υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η μελέτη των σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους
  - …και όχι μέσω του μετασχ. Fourier των ίδιων των σημάτων ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- **Παράδειγμα:**

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος $x(t) = u(t)$

Δείξαμε ότι $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \ \forall \ \tau.$

$$\Big\updownarrow F$$

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f) = F\{\varphi_x(\tau)\}$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την απόκριση συχνότητας $H(f)$, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$

- Θα συμβολίζουμε με $\phi_x(\tau), \phi_y(\tau)$ τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με $\Phi_x(f), \Phi_y(f)$ τις αντίστοιχες πυκνότητες

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_y(\tau) &= y(\tau) * y(-\tau) \\ &= \big(x(\tau) * h(\tau)\big) * \big(x(-\tau) * h(-\tau)\big) \\ &= \big(x(\tau) * x(-\tau)\big) * \big(h(\tau) * h(-\tau)\big) \\ &= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)\end{aligned}$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για σήματα ενέργειας:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2$$

όπως αναμενόταν

- Για περιοδικά σήματα:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\,\delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2\,\delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2|H(kf_0)|^2\,\delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για σήματα ισχύος:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

μια και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ