ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

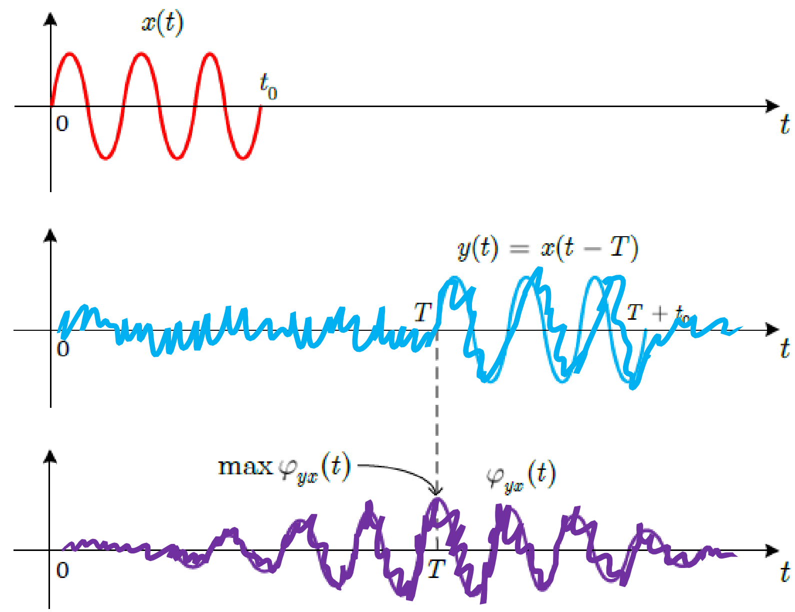
- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Ως τώρα μελετήσαμε σήματα και την επίδραση των συστημάτων επάνω τους
  - Μελετήσαμε *μεμονωμένα* σήματα και συστήματα

- Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τις *ομοιότητες* μεταξύ σημάτων

- Παράδειγμα εφαρμογής
  - Ανίχνευση απόστασης στόχου

- Έννοια της ***συσχέτισης***
  - Το ανακλώμενο σήμα πρέπει να συσχετιστεί με το εκπεμφθέν για βρεθεί τόσο η παρουσία ενός στόχου όσο και η απόστασή του από τη θέση αναφοράς
  - Βρίσκει την ***ομοιότητα*** των δυο σημάτων στο πεδίο του χρόνου



- Έννοια της ***φασματικής πυκνότητας***
  - Αποτελεί την εικόνα των συσχετίσεων στο χώρο του Fourier
  - Δείχνει την ***κατανομή της ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος ή την από κοινού κατανομή δυο σημάτων*** ανά συχνότητα

- **Συσχετίσεις**
- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**
- Η αυτοσυσχέτιση συσχετίζει ένα σήμα (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *με τον εαυτό του*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα του σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» (καθυστερήσεις) του εαυτού του
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Η ετεροσυσχέτιση συσχετίζει δυο σήματα (περιοδικά ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *μεταξύ τους*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα ενός σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» ενός άλλου σήματος
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Είναι βολικό να μελετήσουμε τις συσχετίσεις ανάλογα με το είδος του σήματος

❑ Περιοδικά σήματα

❑ Σήματα ισχύος

❑ Σήματα ενέργειας

- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Αυτοσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

$X_k = |X_k| e^{j\underline{\underline{\varphi_k}}}$ → εν γένει, μη μηδενική

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

$|X_k|^2 \in \mathbb{R}$, μηδενική φάση

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- «Τυφλή» ως προς την αρχική φάση του περιοδικού σήματος

- **Συσχετίσεις**
- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$\rightsquigarrow \ \varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, A\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta)\, dt = \cdots$$

$$\rightsquigarrow \ \text{Είναι} \quad x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\theta}}_{X_1} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\theta}}_{X_{-1} = X_1^*} e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$X_1 = \frac{A}{2}e^{j\theta}, \quad X_{-1} = \frac{A}{2}e^{-j\theta}$$

Άρα

$$\varphi_x(\tau) = |X_1|^2 e^{j2\pi f_0 \tau} + |X_{-1}|^2 e^{-j2\pi f_0 \tau}$$

$$= \frac{A^2}{4}e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4}e^{-j2\pi f_0 \tau} = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- **Συσχετίσεις**

$2\pi \frac{1}{2} t$

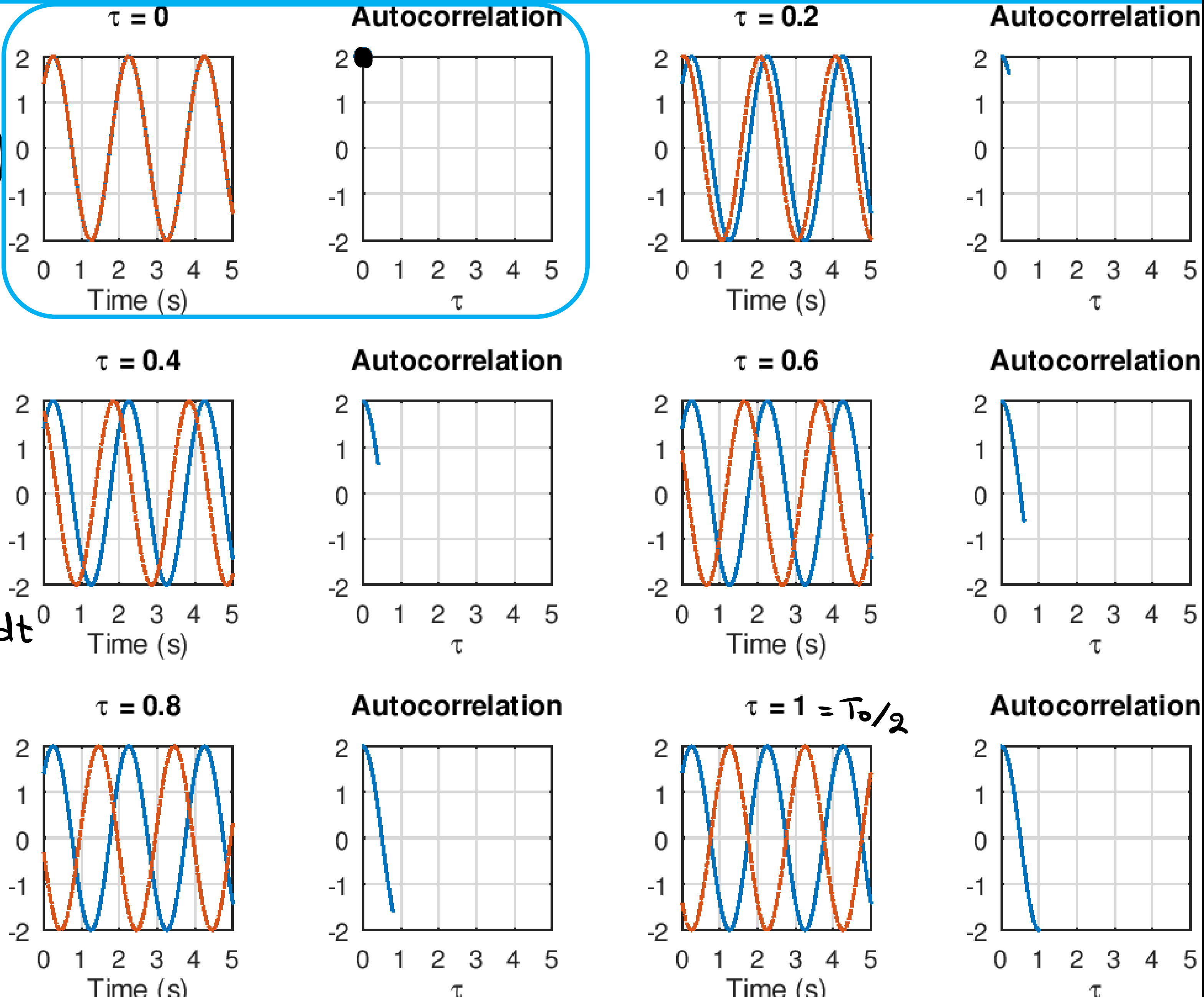
$$x(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$T_0 = 2$ sec

$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$

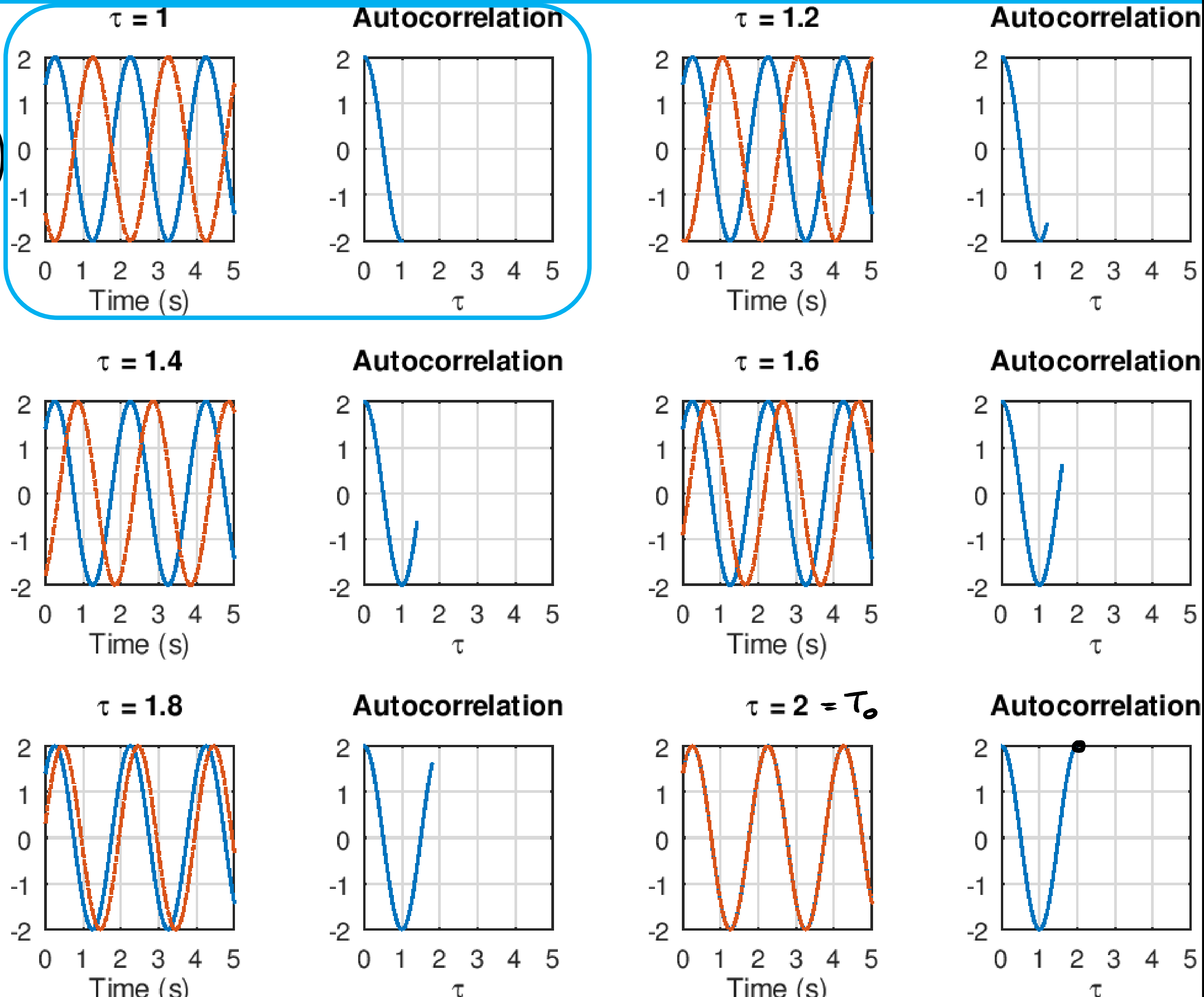
$A = 2$

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$



- **Συσχετίσεις**

$$x(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$



- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Ετεροσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad , \qquad y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k^* Y_k} e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k Y_k^*} e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- Προφανώς αν $y(t) = x(t)$ παίρνουμε τις σχέσεις της αυτοσυσχέτισης

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Είναι εμφανές ότι ο ορισμός της συσχέτισης για σήματα ενέργειας μοιάζει πολύ με τον ορισμό της συνέλιξης:

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt = x(\tau) * y(\tau)$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$$

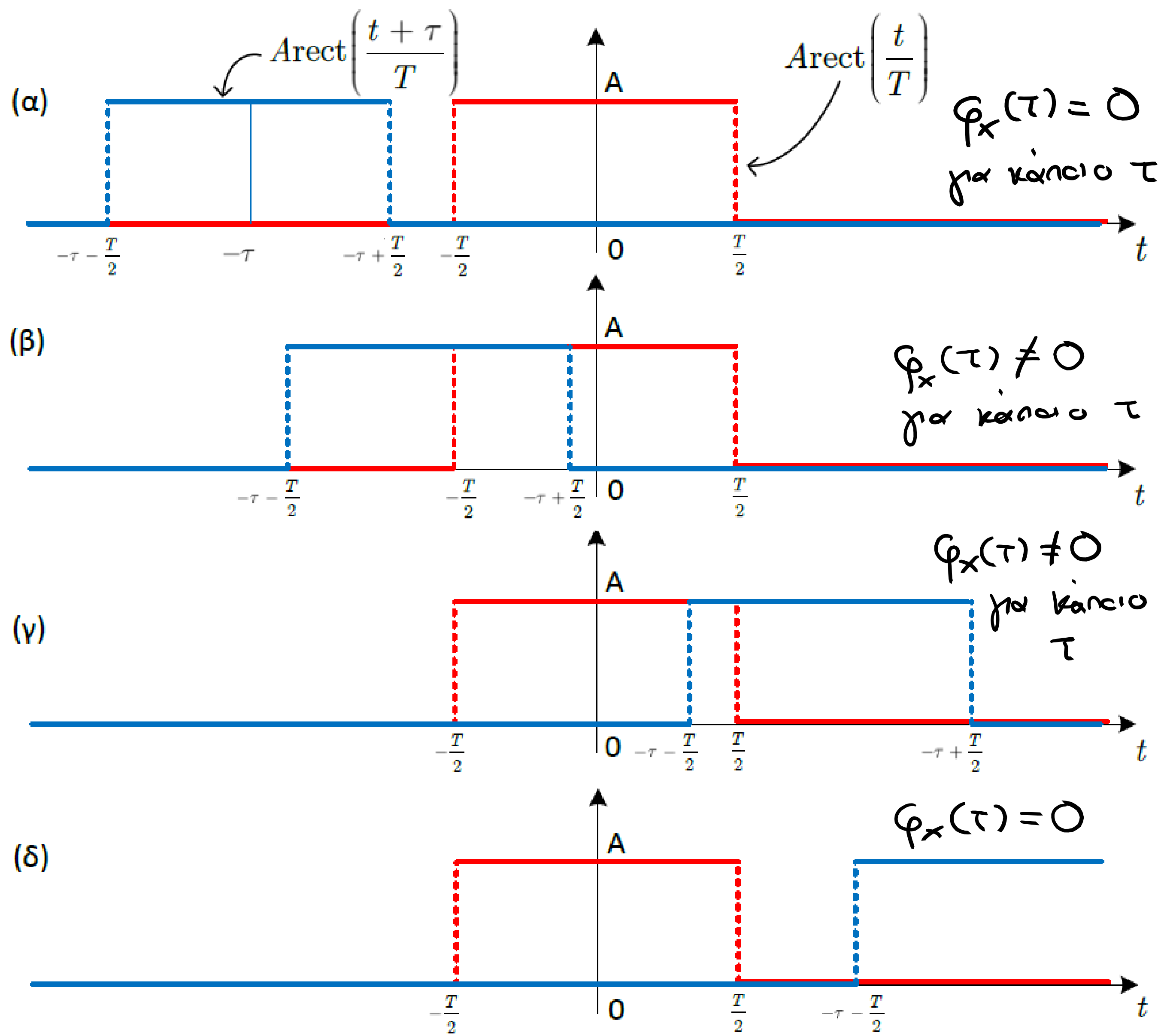
$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau)$$

Η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη **χωρίς** τη χρονική αντιστροφή στην προεργασία των πράξεων

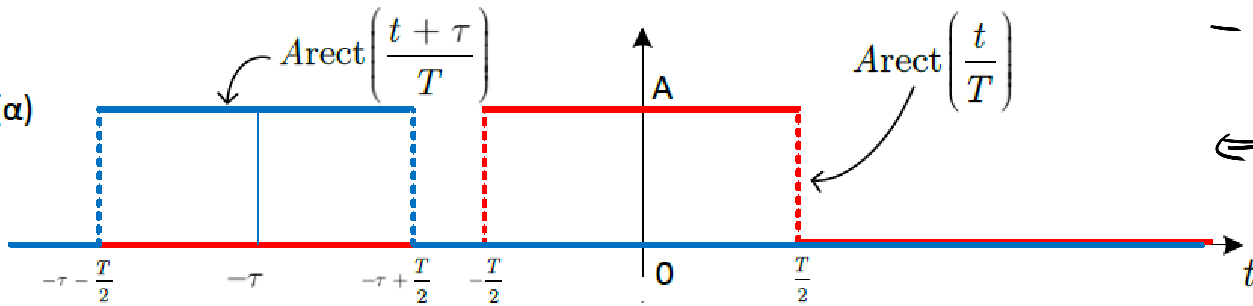
- Προφανώς αν τα σήματα είναι πραγματικά, $x^*(\tau) = x(\tau)$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(α)



$\varphi_x(\tau) = 0$, για

$-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff$

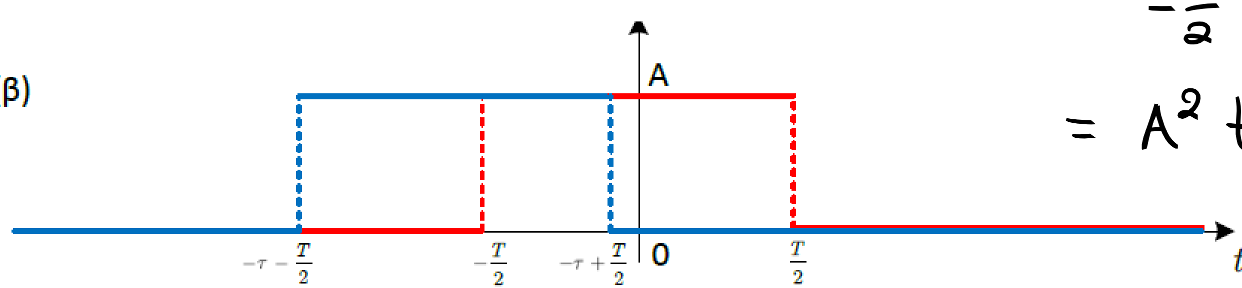
$\iff -\tau < -T \iff$

$\iff \boxed{\tau > T}$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A \cdot A \, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A^2 dt$$

$$= A^2 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} = A^2 (T - \tau),$$

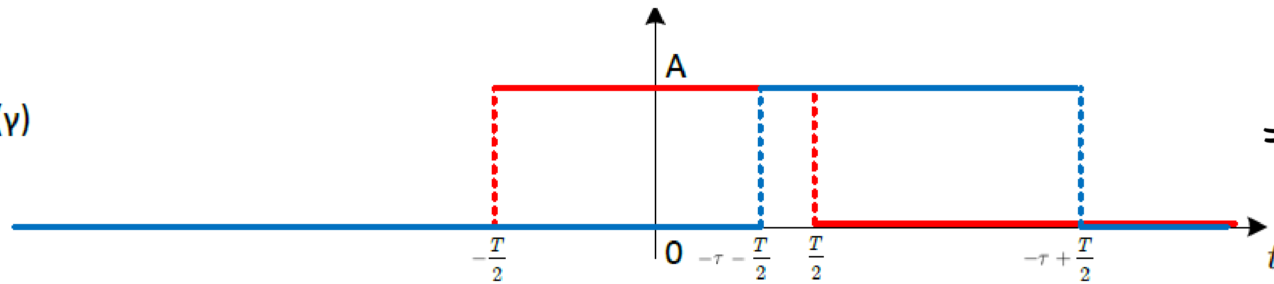
(β)



για $-\tau + \frac{T}{2} < \frac{T}{2}$ και $-\tau + \frac{T}{2} > -\frac{T}{2} \iff \boxed{0 < \tau < T}$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

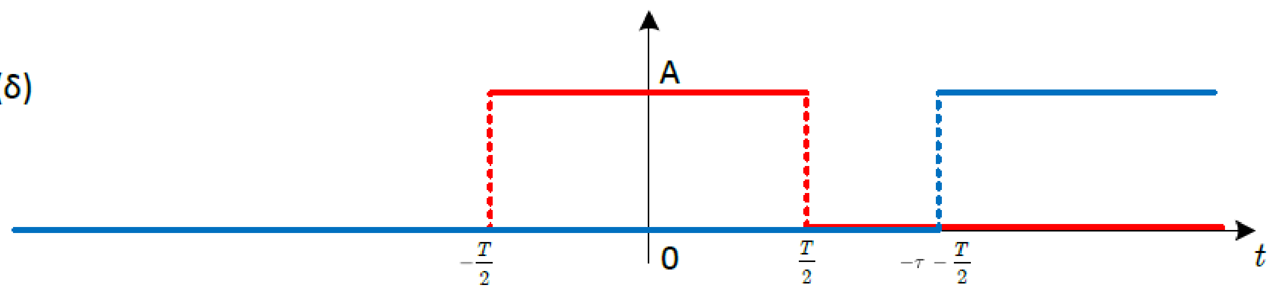
(γ)



$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot A \, dt = A^2 t \Big|_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A^2(T+\tau)$$

για $-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2}$ και $-\tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \iff \boxed{-T < \tau < 0}$

(δ)



$\varphi_x(\tau) = 0$, για

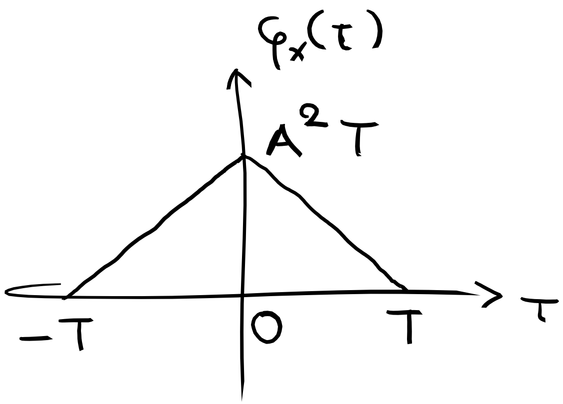
$$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \iff$$

$$\iff \boxed{\tau < -T}$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

Συνολικά:

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2(T-\tau), & 0 < \tau < T \\ A^2(T+\tau), & -T < \tau < 0 \end{cases}$$



$\sim \quad \varphi_x(\tau) = A^2 T \; tri\left(\frac{\tau}{T}\right)$

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Προφανώς το T εδώ είναι μια οποιαδήποτε διάρκεια
- Ξανά η συζυγία παραλείπεται όταν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά σήματα

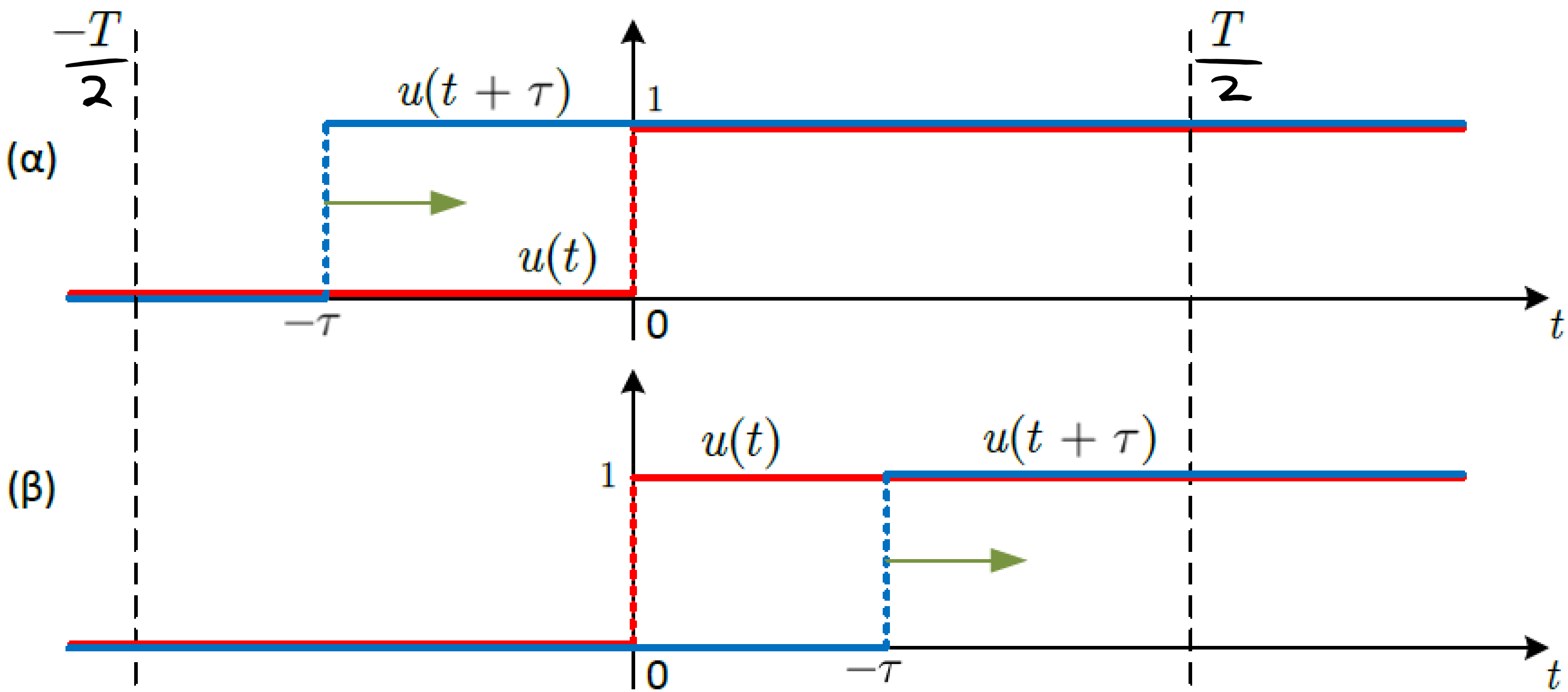
- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

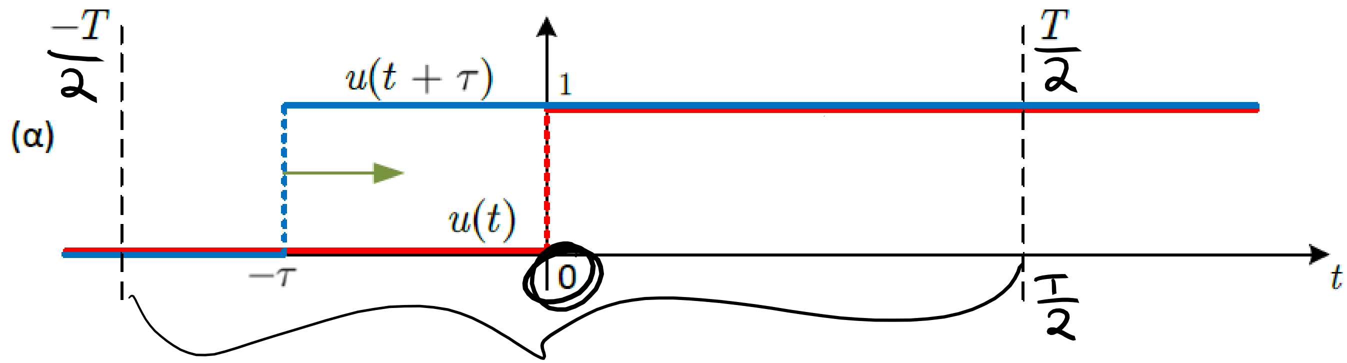
κοκκινη

μπλε

○ Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



Είναι $\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\,dt$

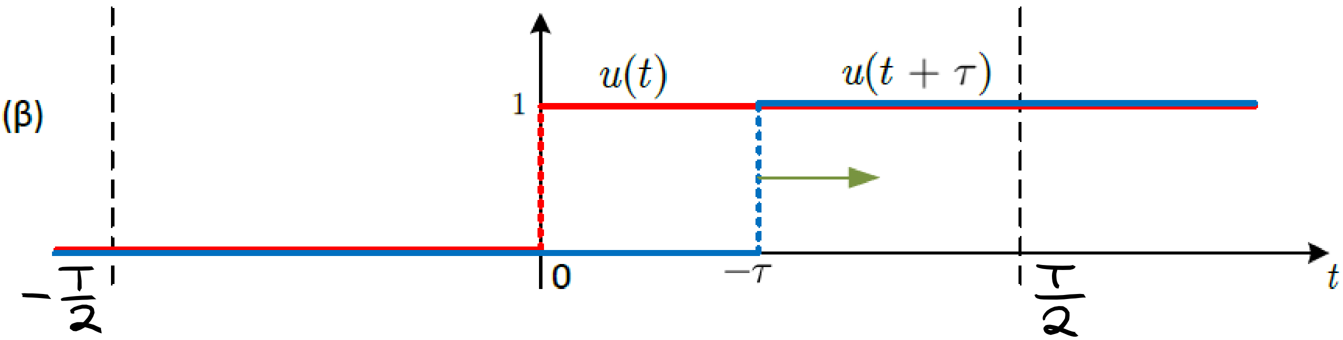
- $-\tau < 0 \Leftrightarrow \tau > 0$: $\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot 1\,dt =$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\, t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-0\right) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \tau > 0$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(β)



- $-\tau > 0 \Leftrightarrow \tau < 0$ $\qquad \varphi_x(\tau) = \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot 1 \, dt =$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \, t \Big]_{-\tau}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \tau \right) = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Άρα $\quad \varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \tau < 0$

Συνολικά:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \forall \ \tau.$$

- **Συσχετίσεις**
- **Ιδιότητες**

1) Ισχύει ότι

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau)$$

2) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = E_x$$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$\tau = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x(t+0)\,dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

για σήματα ενέργειας

3) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = P_x$$

για σήματα ισχύος

περιοδικά: $|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(kT_0)$, $k \in \mathbb{Z}$

4) Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, το ίδιο είναι και η αυτοσυσχέτισή του (με την ίδια περίοδο)

5) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση του σήματος

6) Ισχύει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

7) Αν η ετεροσυσχέτιση είναι μηδενική για κάθε $\tau \in \Re$, τα σήματα λέγονται ασυσχέτιστα

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ