- **Αντίστροφο Σύστημα**

- Το αντίστροφο σύστημα ενός δοθέντος ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\underline{h(t) * h_{inv}(t)} = \boxed{\delta(t)}$$

$x(t) * (h(t) * h_{inv}(t)) =$

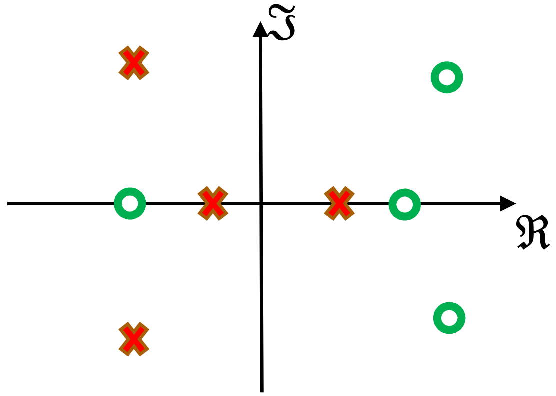
$= x(t) * \delta(t) = x(t)$

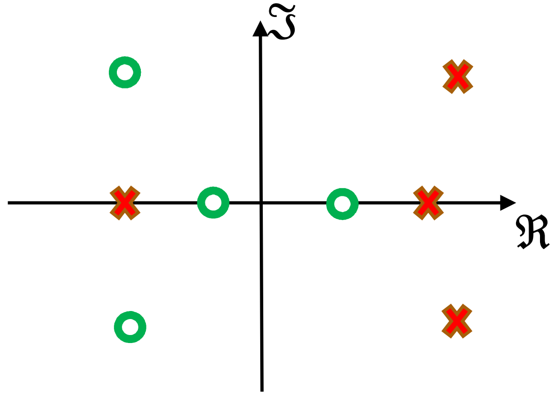
- Στο χώρο του Laplace:

$$H(s)H_{inv}(s) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset$$

- Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται μηδενικά και πόλοι του αντιστρόφου συστήματος, αντίστοιχα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \rightarrow H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}$$

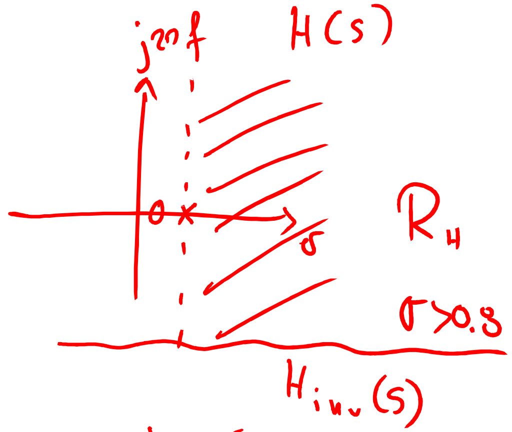


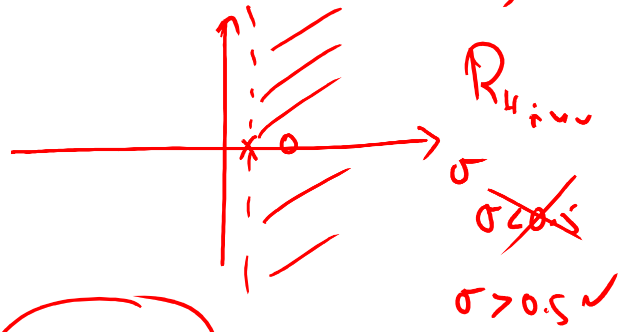


- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s - \frac{4}{5}}, \qquad \sigma > \frac{4}{5} = 0.8$$





Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

$$H_{inv}(s) = \frac{s - 4/5}{s - 1/2}$$

$R_{H_{inv}}: \sigma > 0.5$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{s} - 4/5 & s - 1/2 \\ \hline -\cancel{s} + 1/2 & 1 \\ \hline -3/10 & \end{array}$$

$$\Rightarrow H_{inv}(s) = 1 - \frac{3}{10} \frac{1}{s - 1/2} \Rightarrow \sigma > 1/2$$

$$\Rightarrow h_{inv}(t) = \delta(t) - \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t)$$

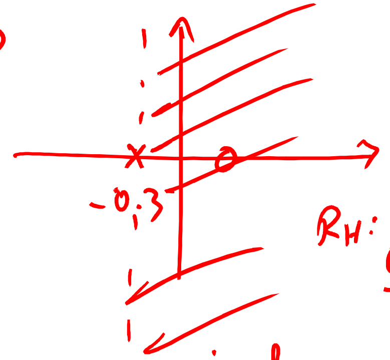
- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

→ Είναι Ευσταθές ΚΑΙ Αιτιατό

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{3}{10}}, \qquad \sigma > -\frac{3}{10}$$

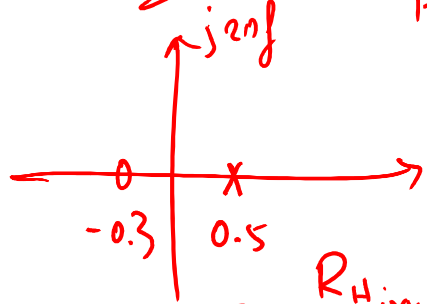
Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.



H(s)

R_H: $\sigma > -0.3$

$H_{inv}(s)$



$$H_{inv}(s) = \frac{s+0.3}{s-0.5}$$

① $R_H \cap R_{inv}(s)$: $\sigma > 0.5$

② $R_H \cap R_{inv}(s)$: $-0.3 < \sigma < 0.5$

⇒ $R_{H_{inv}}(s)$:

① $\sigma > 0.5$

② $\sigma < 0.5$

⇒ ① → Αιτιατό, αλλά όχι Ευσταθές

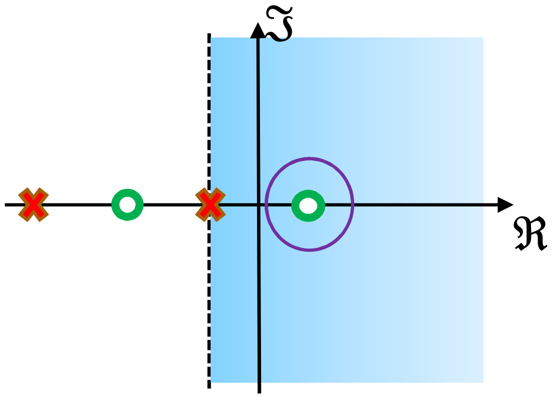
② → Μη Αιτιατό, αλλά Ευσταθές

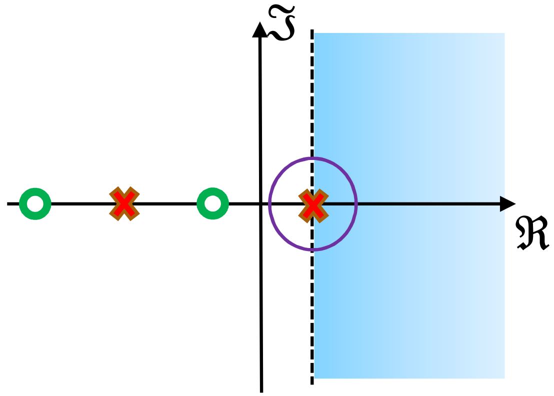
- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Από το προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι μπορεί να μην μπορούμε να έχουμε ευσταθές **και** αιτιατό *αντίστροφο* σύστημα (ταυτόχρονα), ακόμα κι αν το σύστημά μας είναι ευσταθές **και** αιτιατό!

- **Ερώτηση**: *τι πρέπει να ισχύει για ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έτσι ώστε αν αυτό είναι ευσταθές και αιτιατό, να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα?*

- Ας το δούμε με ένα παράδειγμα





- **Ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα μόνον όταν όλοι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!**

- Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ελάχιστης φάσης (minimum phase)**
  - …για λόγους που δεν είναι εμφανείς ☺

- **Συστήματα All-pass**

- Μια επίσης σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα all-pass
  - Ολοπερατά (in Greek ☺), δηλ. αφήνουν να περάσουν **όλες** οι συχνότητες στην έξοδο

- Η απόκριση πλάτους τους δίνεται ως

$$\boxed{|H_{ap}(f)| = 1,} \quad \forall \ f$$

- Προφανώς η απόκριση φάσης τους είναι μη σταθερή

$a_k = \sigma_k + j2\pi f_k$

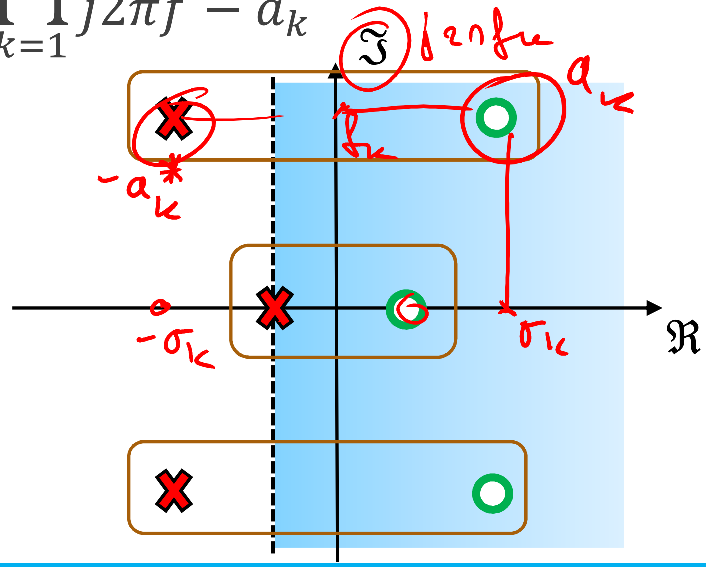
$-a_k = -\sigma_k - j2\pi f_k$

$-a_k^* = -\sigma_k + j2\pi f_k$

- Στο χώρο του Laplace:

$$\boxed{H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^{M} \frac{s + a_k^*}{s - a_k}} \Rightarrow H_{ap}(f) = \prod_{k=1}^{M} \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k}$$

- Οι πόλοι και τα μηδενικά ενός all-pass συστήματος βρίσκονται σε ζεύγη $(a_k, -a_k^*)$, δηλ. εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα
  - Με ίδιο φανταστικό αλλά αντίθετο πραγματικό μέρος



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση x All-pass**

$H(s) = H_{min}(s) \cdot H_{All}(s)$

- Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κάθε ΓΧΑ σύστημα σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass:

$$H(s) = H_{ap}(s)H_{min}(s)$$

- Γιατί είναι χρήσιμη μια τέτοια παραγοντοποίηση?
- Απόκριση πλάτους:

$$|H(s)|\Big|_{s=j2\pi f} = |H_{ap}(s)||H_{min}(s)|\Big|_{s=j2\pi f}$$

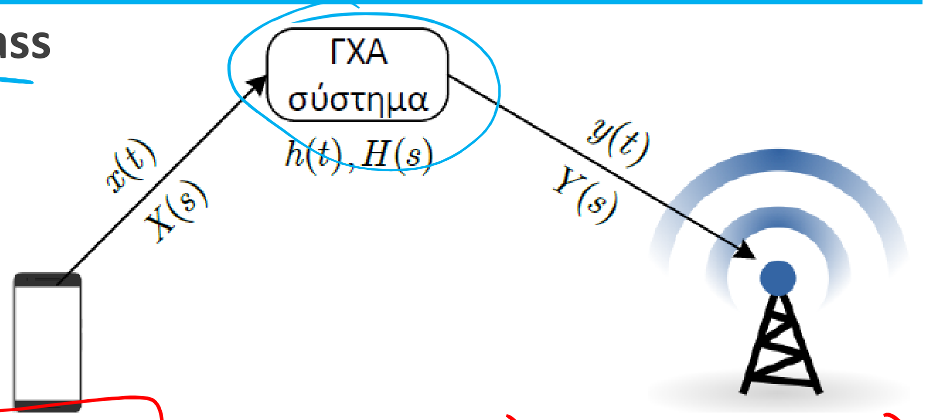
δηλ:

$$|H(f)| = |H_{ap}(f)||H_{min}(f)| = 1 \cdot |H_{min}(f)| = |H_{min}(f)|$$

- Το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει **την ίδια απόκριση πλάτους** με το ΓΧΑ σύστημα!
  - Προφανώς όμως δε θα έχει την ίδια απόκριση φάσης
- Απόκριση φάσης:

$$\angle H(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle H_{min}(f)$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**



$H(s) = H_{min}(s) \cdot H_{ap}(s)$

- Επιστρέφοντας στο πρόβλημα…
- Αν το σύστημα $\frac{1}{H(s)}$ δεν είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε δεν μπορούμε να το υλοποιήσουμε
- Μπορούμε όμως να υλοποιήσουμε το $\boxed{\frac{1}{H_{min}(s)}}$!!
- Εγγυημένα, το σύστημα αυτό θα είναι ευσταθές και αιτιατό! ☺

$$\boxed{x(t)} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{H_{min}(s)}} \rightarrow y'(t)$$

- Τι συμβαίνει στην έξοδο της παραπάνω διάταξης?

$$\cancel{H_{min}(s)} \cdot H_{ap}(s)$$

$$Y'(s) = \boxed{Y(s)}\frac{1}{H_{min}(s)} = H(s)X(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = \left[H(s)\frac{1}{\cancel{H_{min}(s)}}\right]X(s) = H_{ap}(s) \cdot X(s)$$

- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = |H_{ap}(f)|\,|X(f)| \Rightarrow |Y'(f)| = |X(f)|$$

$$|Y'(f)| = |\cancel{H(f)}|\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Στο χώρο του Fourier:

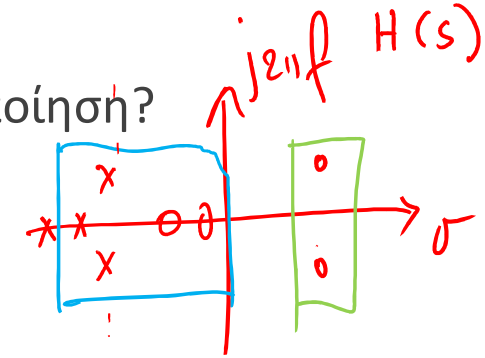
$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|}\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Πλήρης** ακύρωση της απόκρισης πλάτους του καναλιού!
- Το λαμβανόμενο σήμα έχει **ακριβώς το ίδιο φάσμα πλάτους** με αυτό που έφυγε από τον πομπό! ☺
- Προφανώς, η φάση του ληφθέντος σήματος θα διαφέρει από αυτή του πομπού
- Ας δούμε πόσο:

$$\angle Y'(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f)$$

- Ανάλογα με την εφαρμογή, η διαταραχή στη φάση μπορεί να είναι ανεπαίσθητη ή αρκετά σοβαρή
- Σε επικοινωνίες φωνής, δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα...

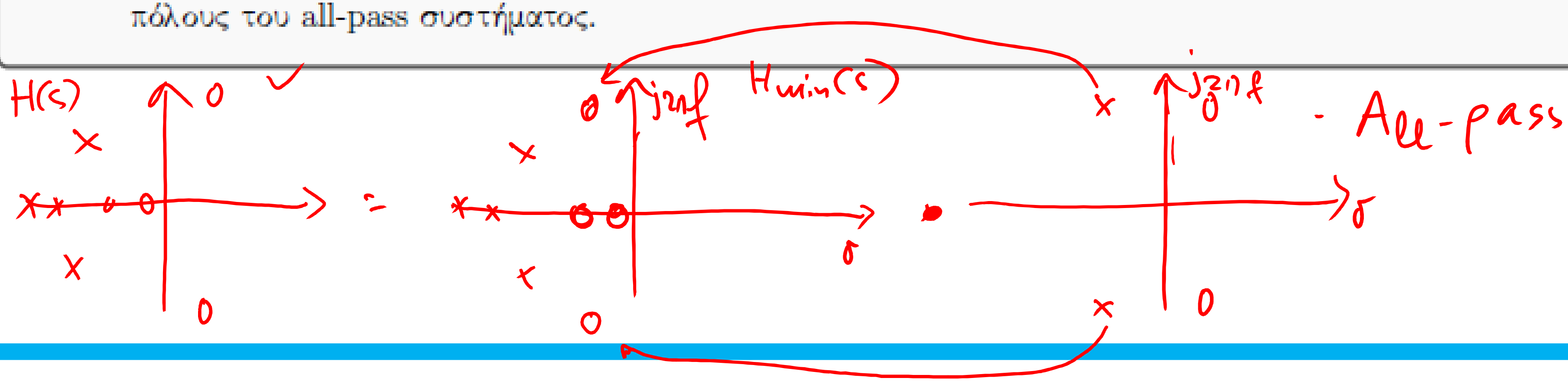
- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:



$$H(s) = H_{min}(s) \cdot H_{all}(s)$$

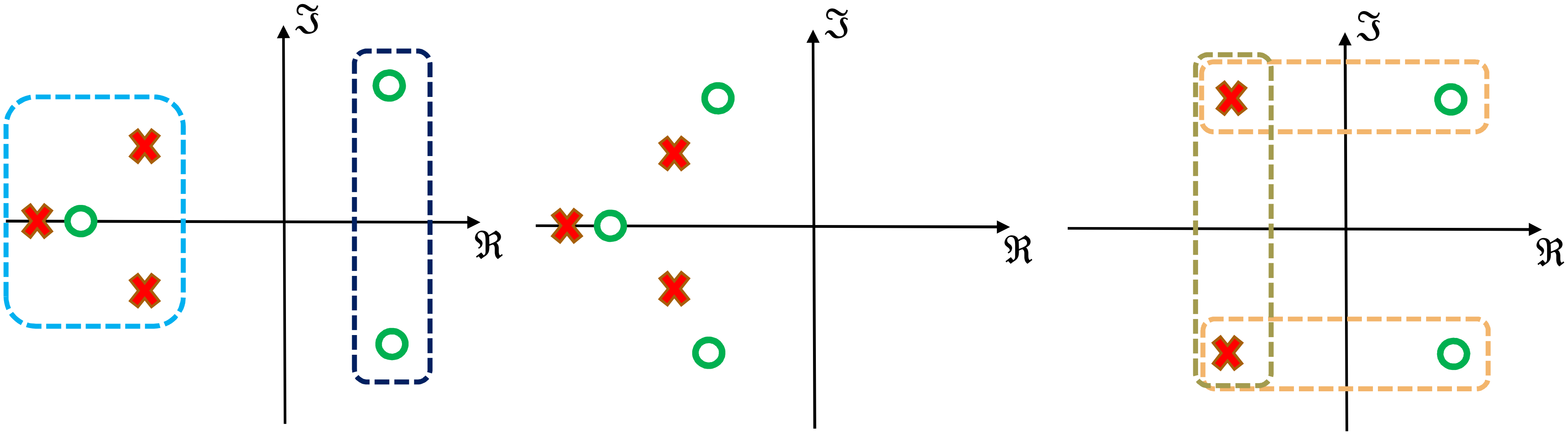
Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης και all-pass

1. Οι πόλοι και τα μηδενικά του αριστερού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης.
2. Τα μηδενικά του δεξιού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα all-pass. Για να είναι αυτό έγκυρο all-pass σύστημα, προσθέτουμε πόλους σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.
3. Οι πόλοι που προστέθηκαν στο all-pass σύστημα πρέπει να ακυρωθούν στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης. Έτσι, προσθέτουμε μηδενικά στο τελευταίο σύστημα, στις ίδιες ακριβώς θέσεις με τους πόλους του all-pass συστήματος.



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:

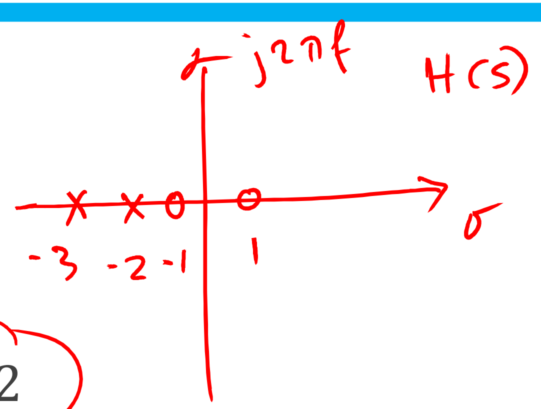
$H(s)$ $H_{min}(s)$ $H_{ap}(s)$



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**
- Παράδειγμα:

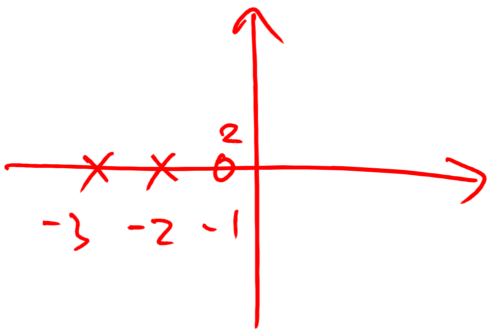
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+3)}, \qquad \sigma > -2$$

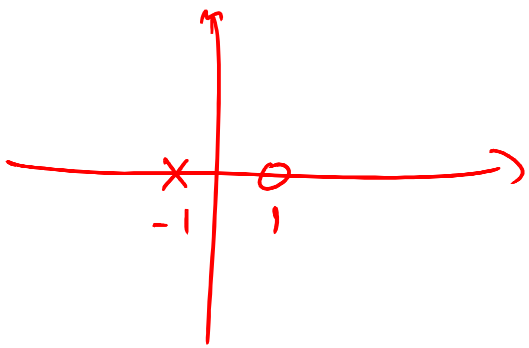


Παραγοντοποιήστε το σε ελάχιστης φάσης και all-pass.

$H_{min}(s)$



$H_{all}(s)$



$$H_{min}(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)\cdot(s+3)}$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow H_{min}(s) \cdot H_{ap}(s) = H(s)$$

ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Τι περιέχει το HY215?

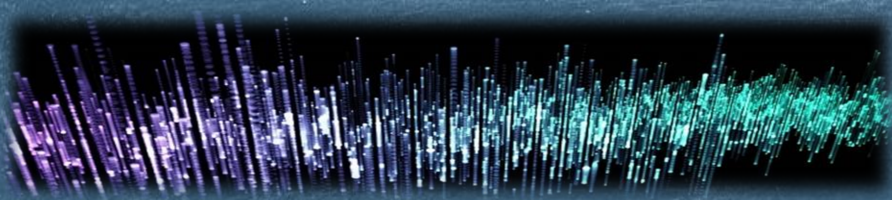
1ο Κομμάτι

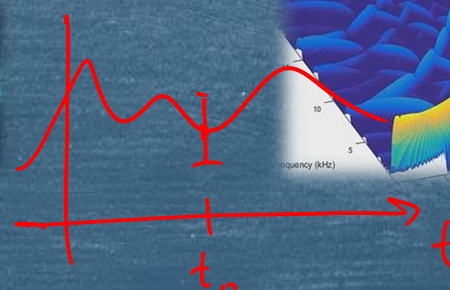
- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

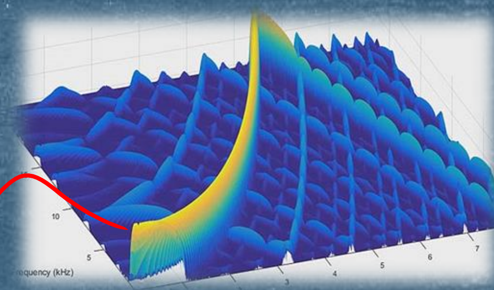
2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία

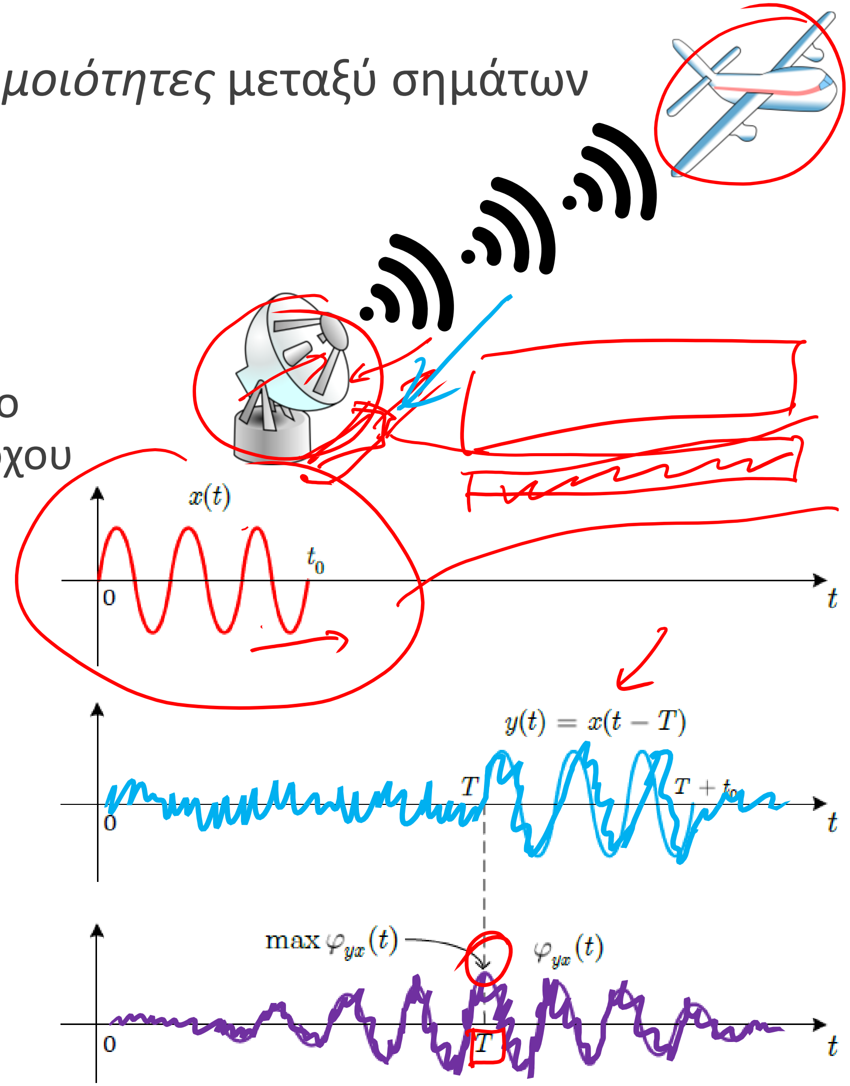
$x(t) \to x[n] \to$ HY370







- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Ως τώρα μελετήσαμε σήματα και την επίδραση των συστημάτων επάνω τους
  - Μελετήσαμε *μεμονωμένα* σήματα και συστήματα
- Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τις *ομοιότητες* μεταξύ σημάτων
- Παράδειγμα εφαρμογής
  - Ανίχνευση απόστασης στόχου
- Έννοια της ***συσχέτισης***
  - Το ανακλώμενο σήμα πρέπει να συσχετιστεί με το εκπεμφθέν για βρεθεί τόσο η παρουσία ενός στόχου όσο και η απόστασή του από τη θέση αναφοράς
  - Βρίσκει την ***ομοιότητα*** των δυο σημάτων στο πεδίο του χρόνου
- Έννοια της ***φασματικής πυκνότητας***
  - Αποτελεί την εικόνα των συσχετίσεων στο χώρο του Fourier
  - Δείχνει την ***κατανομή της ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος ή την από κοινού κατανομή δυο σημάτων*** ανά συχνότητα



- **Συσχετίσεις**
- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**
- Η αυτοσυσχέτιση συσχετίζει ένα σήμα (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *με τον εαυτό του*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα του σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» (καθυστερήσεις) του εαυτού του
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Η ετεροσυσχέτιση συσχετίζει δυο σήματα (περιοδικά ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *μεταξύ τους*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα ενός σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» ενός άλλου σήματος
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Είναι βολικό να μελετήσουμε τις συσχετίσεις ανάλογα με το είδος του σήματος

☑ Περιοδικά σήματα

☑ Σήματα ισχύος

☑ Σήματα ενέργειας

- **Συσχετίσεις**

$c_x(\tau) = \int x(t)\, x(\tau - t)\, dt \; = x(t) * x(t)$

- **Περιοδική Αυτοσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$X_k = |X_k| \cdot e^{j\angle X_k}$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

1 2

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- «Τυφλή» ως προς την αρχική φάση του περιοδικού σήματος

- **Συσχετίσεις**

- Παράδειγμα:

  ○ Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \cancel{\theta})$

$$x(t) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\theta}}_{X_1} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\theta}}_{X_{-1}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\varphi_x(\tau) = |X_1|^2 e^{j2\pi f_0 t} + |X_{-1}|^2 e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{A^2}{4}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A^2}{4}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= \frac{A^2}{2}\underbrace{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}}_{\cos(2\pi f_0 t)} = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 t)$$

- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Ετεροσυσχέτιση**

$x(t) = x(t+T_0)$

$y(t) = y(t+T_0)$

- Ορισμός:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad , \quad y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- Προφανώς αν $y(t) = x(t)$ παίρνουμε τις σχέσεις της αυτοσυσχέτισης

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Είναι εμφανές ότι ο ορισμός της συσχέτισης για σήματα ενέργειας μοιάζει πολύ με τον ορισμό της συνέλιξης:

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(\tau - t)dt = x(\tau) * y(\tau)$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$$

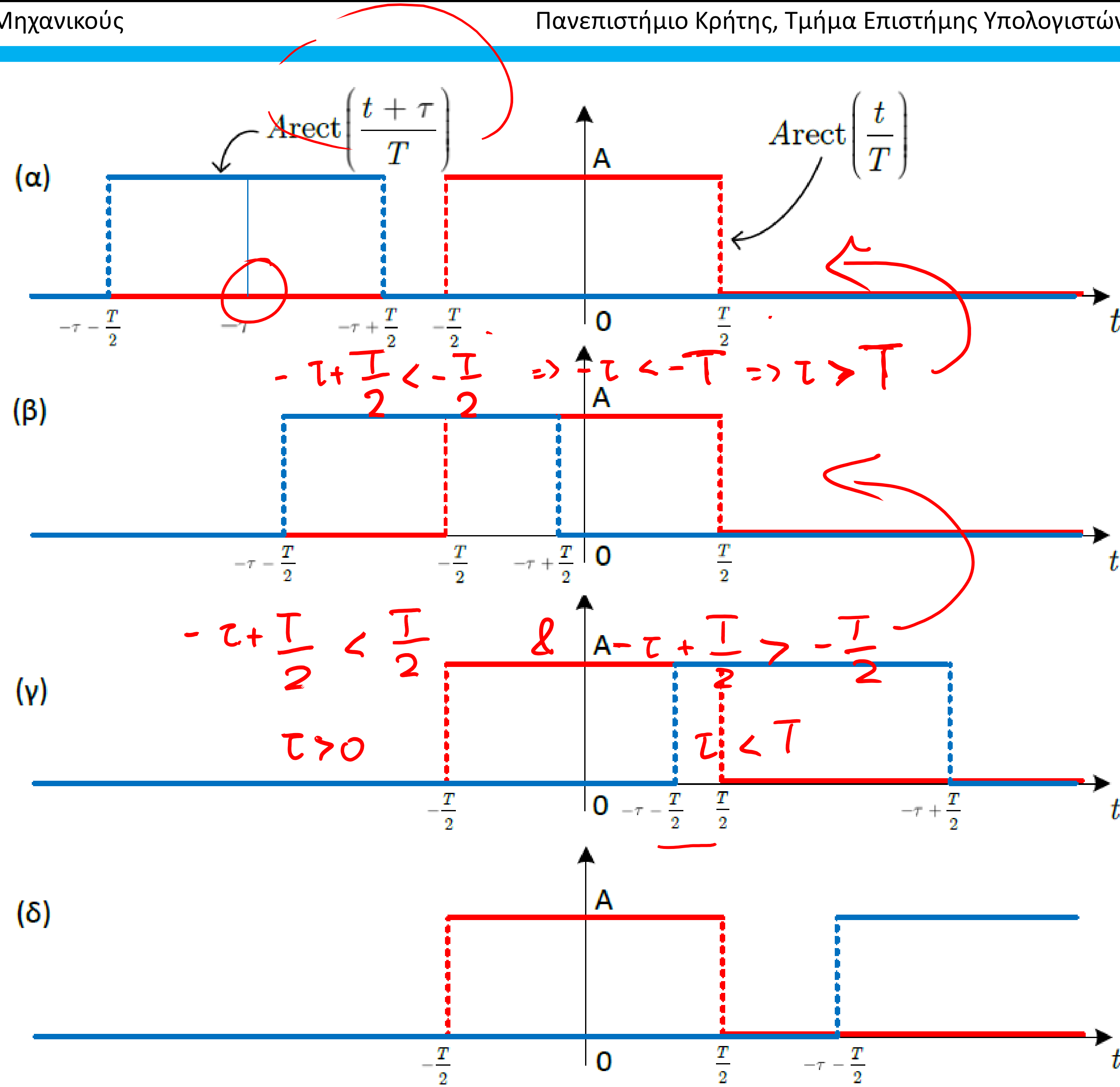
$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau)$$

Η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη **χωρίς** τη χρονική αντιστροφή στην προεργασία των πράξεων

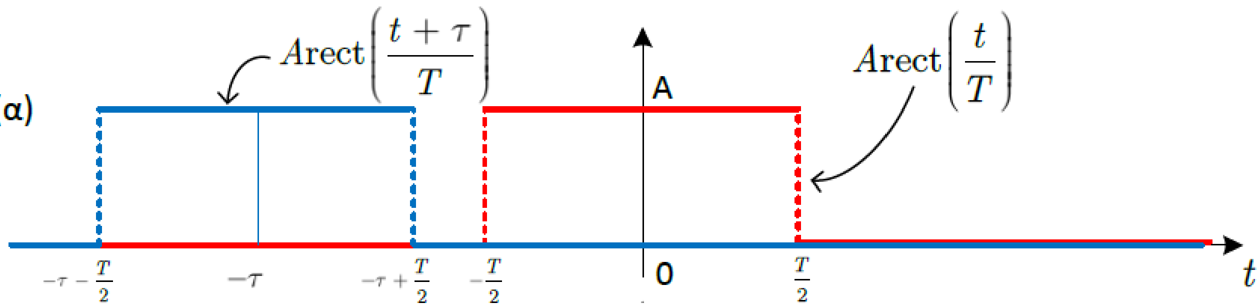
- Προφανώς αν τα σήματα είναι πραγματικά, $x^*(\tau) = x(\tau)$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



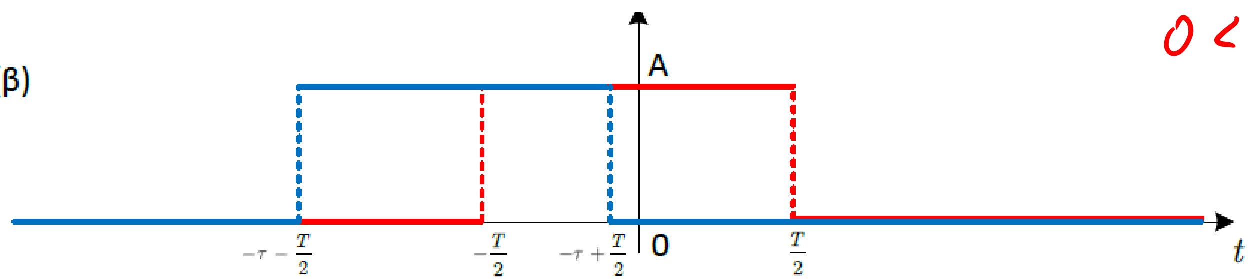
- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(α)



$\tau > T$

(β)

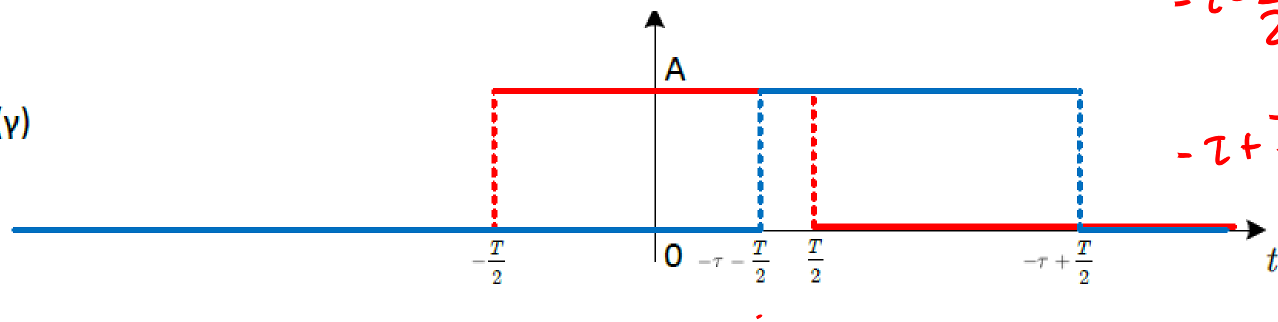


$0 < \tau < T$

- **Συσχετίσεις**

- **Παράδειγμα:**

(γ)

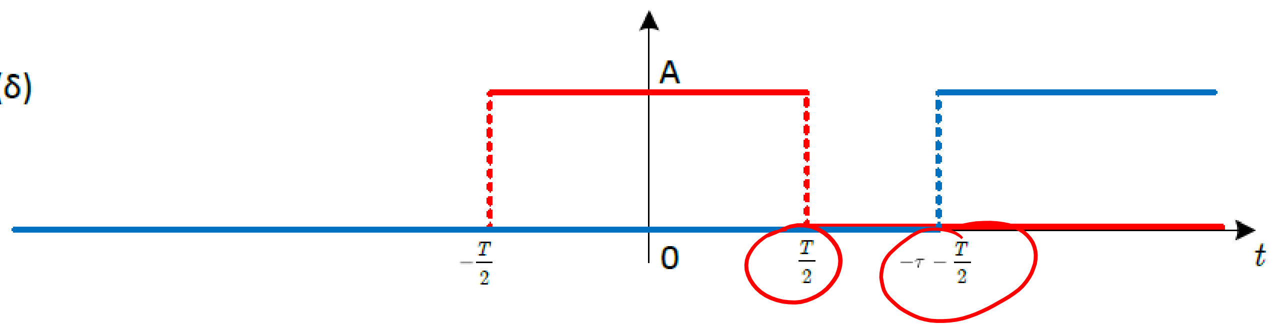


$-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \Rightarrow -\tau < T \Rightarrow \tau > -T$

$-\tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow \tau < 0$

$-T < \tau < 0$

(δ)



$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow -\tau > T \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau < -T$

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt}$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Προφανώς το T εδώ είναι μια οποιαδήποτε διάρκεια
- Ξανά η συζυγία παραλείπεται όταν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά σήματα

- **Συσχετίσεις**
- **Ιδιότητες**

1) Ισχύει ότι

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau)$$

2) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = E_x$$

για σήματα ενέργειας

3) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = P_x$$

για σήματα ισχύος

4) Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, το ίδιο είναι και η αυτοσυσχέτισή του (με την ίδια περίοδο)

5) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση του σήματος $|X_k|^2$

6) Ισχύει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi^*_{yx}(-\tau)$$

7) Αν η ετεροσυσχέτιση είναι μηδενική για κάθε $\tau \in \Re$, τα σήματα λέγονται ασυσχέτιστα

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ