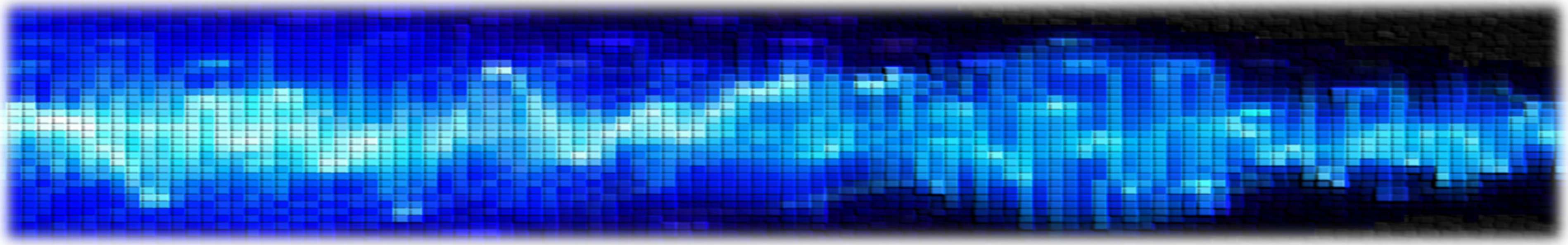
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13^{Η}



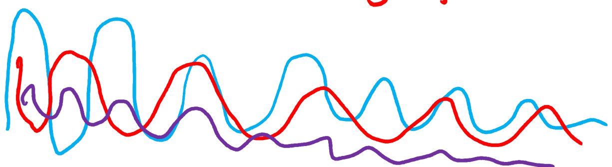
- Συστήματα στο χώρο του Laplace

Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$s = \sigma + j2\pi f$

x(t)

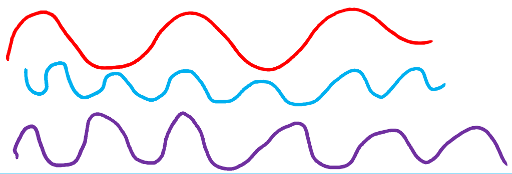


Fourier

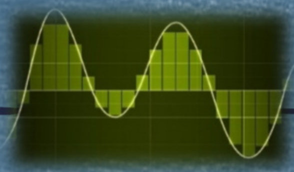
$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$\sigma = 0$

x(t)

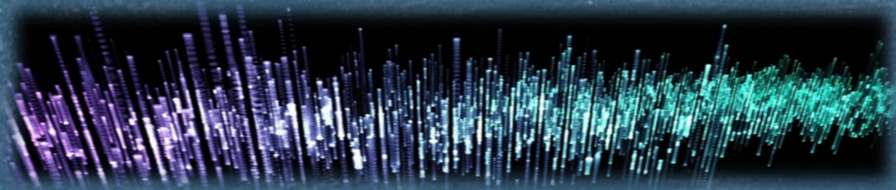


Τι περιέχει το ΗΥ215?



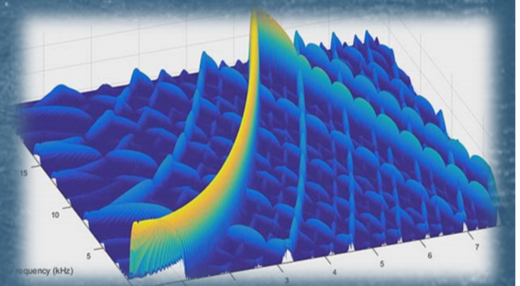
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

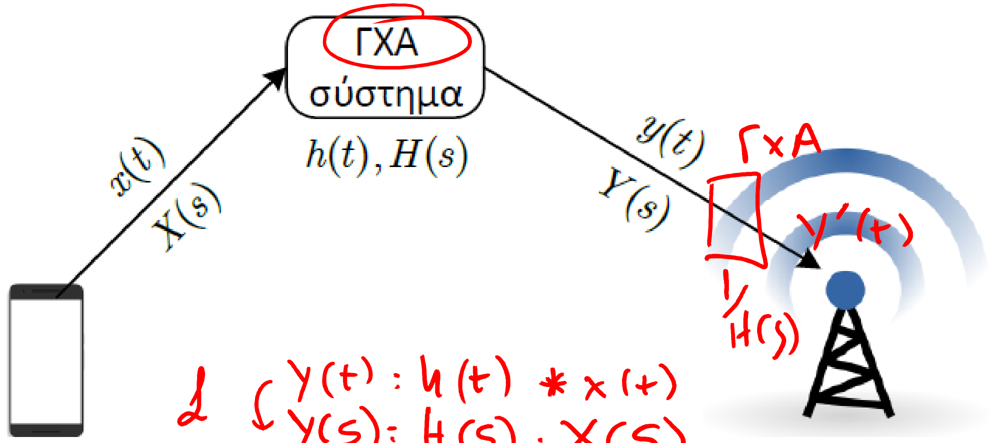


2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



• **Συστήματα στο χώρο του Laplace**



$\mathcal{L}\{ y(t) = h(t) * x(t)$
$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

• Με ιδανικό κανάλι επικοινωνίας, θα είχαμε

$$Y(s) = X(s) \qquad H_{inv}(s)$$

• Στην πράξη

$$\boxed{Y(s) = H(s)X(s)} \rightarrow Y'(s) = \boxed{\frac{1}{\cancel{H(s)}}}\cancel{H(s)}X(s) = X(s)$$

έτσι ώστε $Y(f) = X(f)$

• Πολλές φορές το $H_{inv}(s)$ δεν είναι πραγματοποιήσιμο, γιατί δεν είναι ευσταθές η/και αιτιατό

• Πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες καταστάσεις?

• Μπορούμε έστω να έχουμε $Y(s) \approx X(s) \Rightarrow Y(f) \approx X(f)$?

- **Η συνάρτηση μεταφοράς**

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \text{ΓΧΑ} \rightarrow y(t) = H(f_0) \cdot x(t)$

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f_0)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$\boxed{H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt}$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

Κρουστική απόκριση $h(t) \longleftrightarrow$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**
- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)}$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $\boxed{f(x) = f'(x)} \Rightarrow \boxed{f(x) = ce^x}, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$

- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$\mathcal{L}$

και δίνει

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \boxed{H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^n X(s)}$$

Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s)$$

αποτελείται από πολυώνυμα του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\boxed{H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (μόνο αν $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$\boxed{H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i},} \qquad R_H$$

$$\frac{A}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} Ae^{-at}u(t) \qquad \sigma > -a$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

$\left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^n X(s) \right.$

$e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \; \sigma > a$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

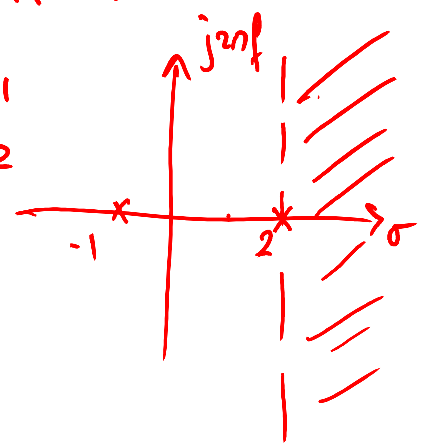
Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι αιτιατό. $\Rightarrow h(t) = 0, \; t < 0$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \Rightarrow Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

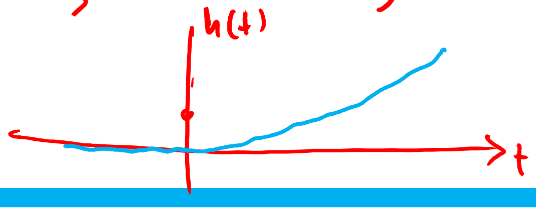
Έχουμε 2 πόλους $s_1 = -1$, $s_2 = 2$

$\to R_H: \sigma > 2$



$$H(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$



❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

○ Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $\boxed{x(t) = e^{-2t}u(t)}$

$$\rightarrow \left\{ e^{at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}, \ \sigma > a \right.$$

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \ \sigma > 2 \quad R_H$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+2}, \ \sigma > -2 \quad R_x$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)\cdot(s+2)}$$

$$R_y = R_H \cap R_x = \sigma > 2$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{s+2} = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t)$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \dots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

$$\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

- **Παράδειγμα:**

○ Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

A, B

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2,\ y'(0^-) = 1$ και είσοδο $\boxed{x(t) = e^{-4t}u(t)}$

$\to X(s) = \frac{1}{s+4},\ \sigma > -4$

Αιτιατό $\Rightarrow x(0^-) = 0$

$\mathcal{L}$ A: $s^2 Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{2-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(0^-) = s^2 Y(s) - s\, y(0^-) - s^0 \dot{y}(0^-) = s^2 Y(s) - 2s - 1$

B: $5\left[s Y(s) - s^0 y(0^-)\right] = 5s Y(s) - 10$

$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}: \quad s X(s) - s^0 x(0^-) = s X(s)$

Συνολικά: $s^2 Y(s) - 2s - 1 + 5s Y(s) - 10 + 6 Y(s) = X(s) + s X(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) = (1+s) X(s) + 2s + 11$

$X(s) = \frac{1}{s+4}$

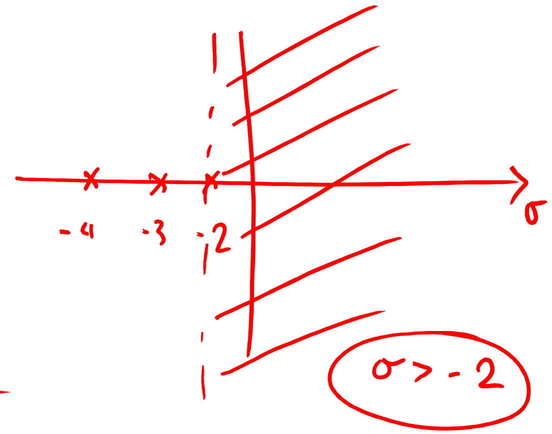
$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6}$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s+1 + (2s+11)(s+4)}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{\Gamma}{s+4}$$

$$= \frac{13}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+4} \Rightarrow$$

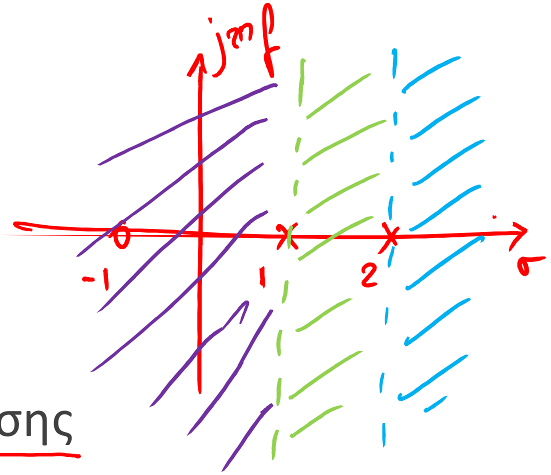


$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{13}{2} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-3t} u(t) - \frac{3}{2} e^{-4t} u(t)}$$

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2}$$



Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = -2\frac{1}{s-1} + 3\frac{1}{s-2}$$

Πιθανά πεδία σύγκλισης: $\sigma > 2$, $1 < \sigma < 2$, $\sigma < 1$

$\boxed{\sigma > 2}$: $h(t) = -2e^{t}u(t) + 3e^{2t}u(t)$

$\boxed{1 < \sigma < 2}$: $h(t) = -2e^{t}u(t) - 3e^{2t}u(-t)$

$\boxed{\sigma < 1}$: $h(t) = 2e^{t}u(-t) - 3e^{2t}u(-t)$

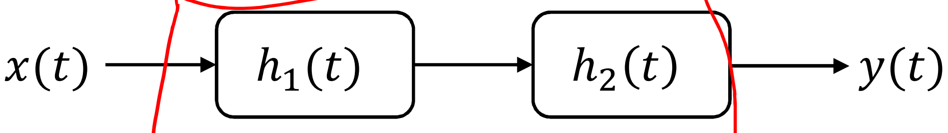
- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**
- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \Re_+$
- Ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος
- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα
- Άρα**: ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του**

- **Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων**

- Διάταξη σε σειρά

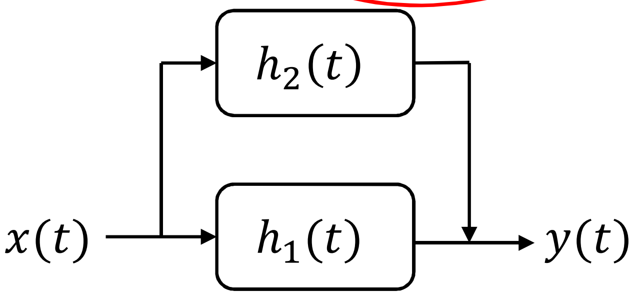


$$y(t) = \underbrace{\boxed{h_1(t) * h_2(t)}}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{H_1(s)H_2(s)}}_{H_{total}(s)} X(s)$$

- Διάταξη σε παραλληλία



$$\begin{aligned} y(t) &= \{h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)\} \\ &= \underbrace{\boxed{\left(h_1(t) + h_2(t)\right)}}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{\boxed{\left(H_1(s) + H_2(s)\right)}}_{H_{total}(s)} X(s) \end{aligned}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) \to \infty$
- Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν πόλους και μηδενικά του συστήματος
  - Είναι μόνο αυτά??
- Για παράδειγμα, έστω $\boxed{H(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \sigma > 3}$
- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$
- Προσέξτε όμως ότι

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s}\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = 0$$

- Άρα υπάρχει **ένα** "έξτρα" μηδενικό στο άπειρο!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους και 2 μηδενικά**!

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

$M: 6 \quad s^{M-N} = s^{2}$

$N: 4$

- Γενικότερα

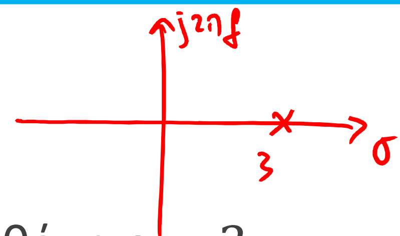
$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} = A\frac{s^M\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{s^N\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)} = As^{M-N}\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-\cancel{\frac{c_i}{s}}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)}$$

- Αν $M > N \Leftrightarrow M-N>0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M-N$ πόλοι
- Αν $M < N \Leftrightarrow M-N<0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N-M$ μηδενικά
- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο

- Άρα :
- **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**

$$\boxed{\#\ \textbf{πόλων} = \#\ \textbf{μηδενικών}}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**



- **Παράδειγμα:**

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $s_1 = 3$

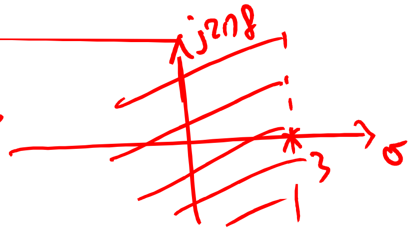
a) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας? Όχι

b) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα? ΝΑΙ ΑΝ όχι άλλος πόλος < 3

$\sigma < 3$

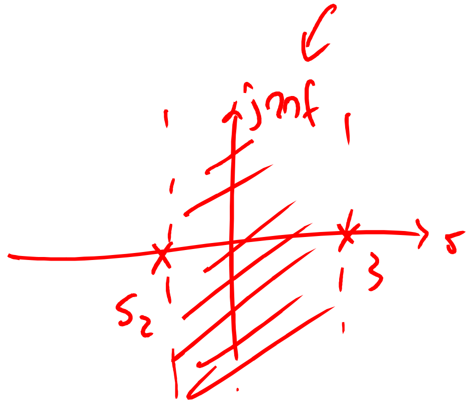
c) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα? → όχι

d) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα?



d) Αν έχει πόλο $s_2 < 0$ => $s_2 < \sigma < s_1$

ΝΑΙ

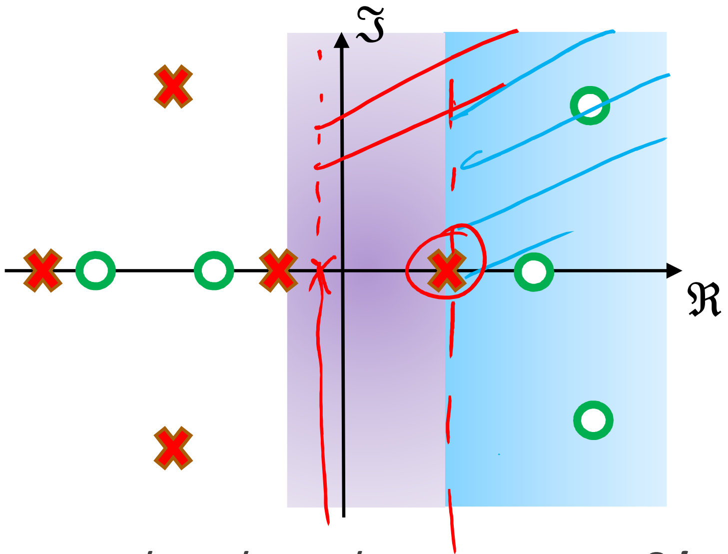


- **Ευστάθεια και Αιτιατότητα**

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια ***ρητή*** συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε αιτιατό, αντι-αιτιατό, ή μη αιτιατό σύστημα (κρουστική απόκριση)
  - Ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης

- Έστω το ακόλουθο διάγραμμα πόλων-μηδενικών που αντιστοιχεί σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς



- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα αιτιατό?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι **και** αιτιατό **και** ευσταθές? ☹

- Για να είναι ένα σύστημα **ευσταθές και αιτιατό, πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου**

- Εναλλακτικά, **όλοι οι πόλοι θα πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος**

- **Αντίστροφο Σύστημα**

- Το αντίστροφο σύστημα ενός δοθέντος ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\underline{h(t) * h_{inv}(t)} = \boxed{\delta(t)}$$

$$x(t) * (h(t) * h_{inv}(t)) = $$
$$= x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$H(s)H_{inv}(s) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset$$

- Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται μηδενικά και πόλοι του αντιστρόφου συστήματος, αντίστοιχα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \rightarrow H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}$$