ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

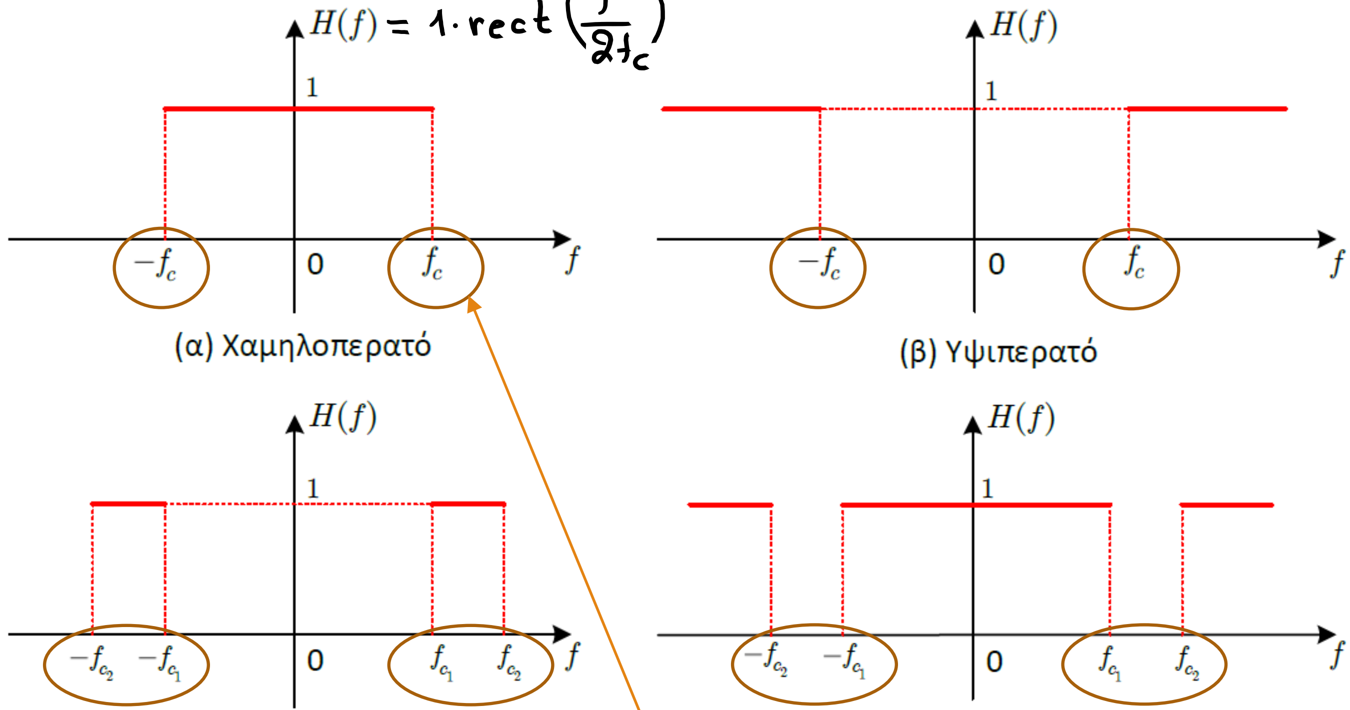
- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**

- Θα μελετήσουμε τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (<u>μηδενικής φάσης</u>)
  - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)

- Τέσσερις κατηγορίες
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο** (lowpass)
- **Υψιπερατό φίλτρο** (highpass)
- **Ζωνοπερατό φίλτρο** (Band-pass)
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο** (Band-stop)

$H(f) = 1 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$



(α) Χαμηλοπερατό

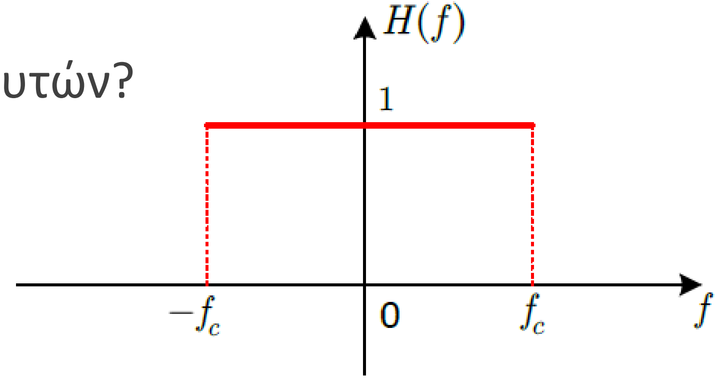
(β) Υψιπερατό

(γ) Ζωνοπερατό

(δ) Ζωνοφρακτικό

Συχνότητα αποκοπής

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο

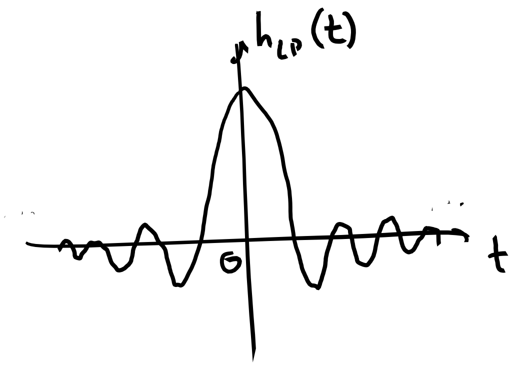


(α) Χαμηλοπερατό

$$H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$h_{LP}(t) = 2f_c \cdot \mathrm{sinc}(2f_c t) \longrightarrow$$



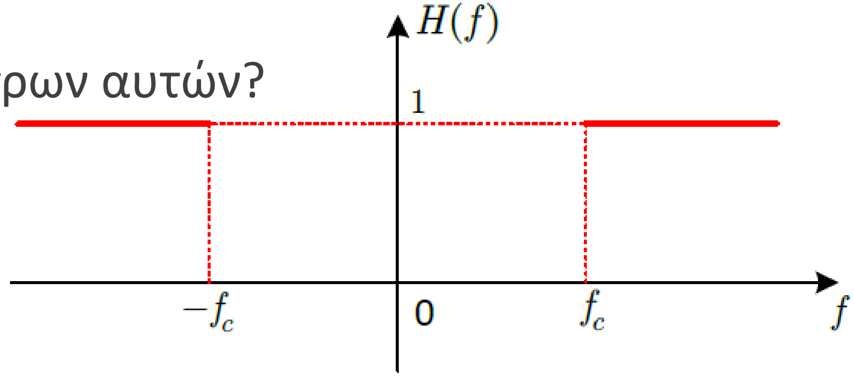
συνθήκη αιτιατότητας

$$h(t) = 0,\ t < 0$$

Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το υψιπερατό φίλτρο



(β) Υψιπερατό

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 1, & f > f_c,\ f < -f_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \cdot \text{sinc}(2f_c t)$$

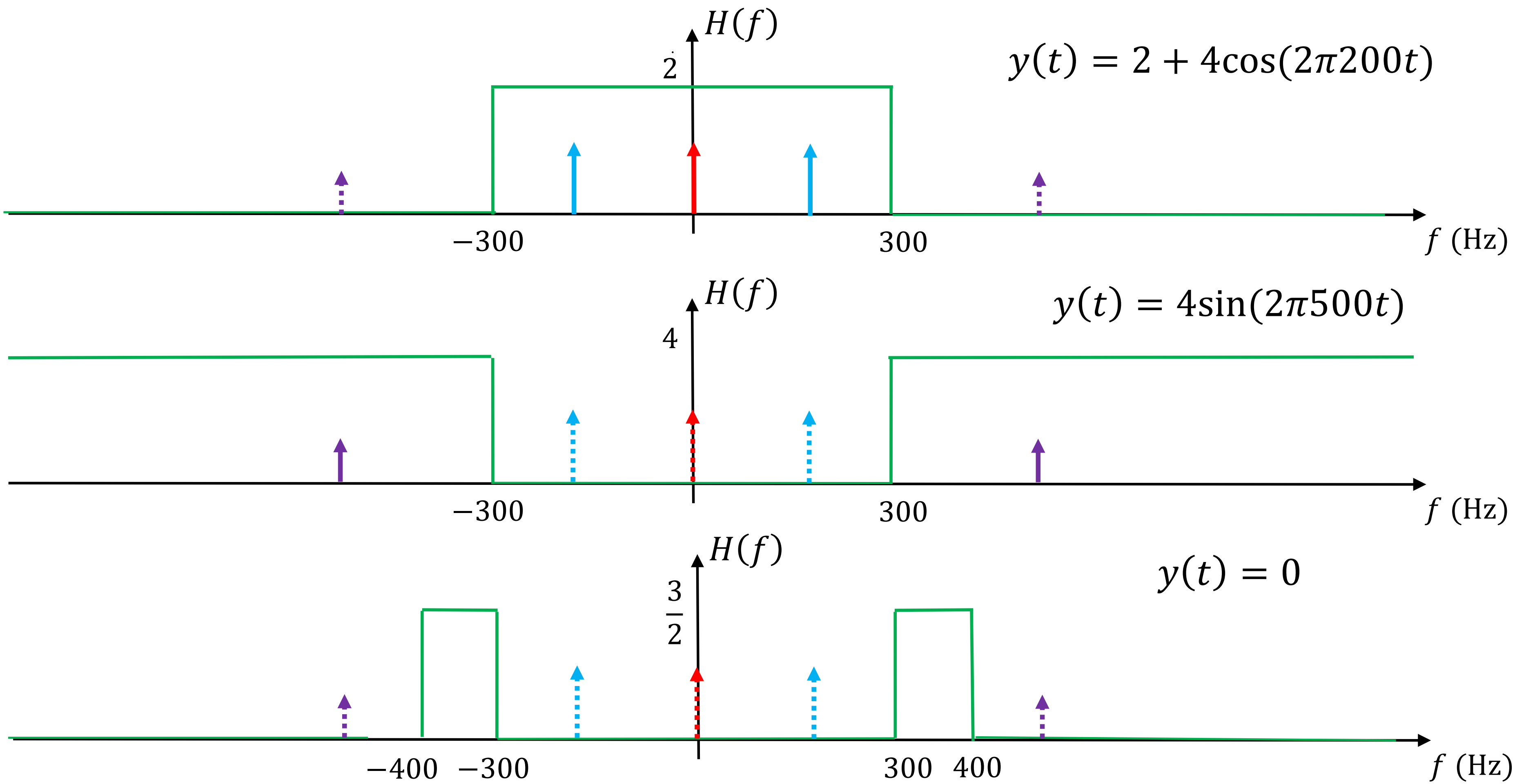
Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**: $X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$

  - Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?



2

Επανάληψη:

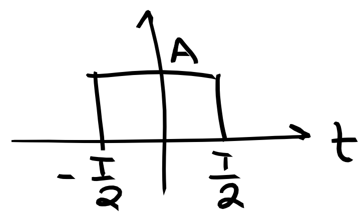
~ Σήματα
- Συνεχούς/διακριτού χρόνου
- Αναλογικά/ψηφιακά
- Περιοδικά ή μη
- Ενέργειας ή ισχύος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

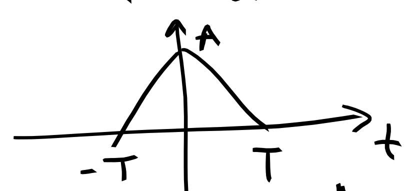
$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

- $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t)$
- $\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$

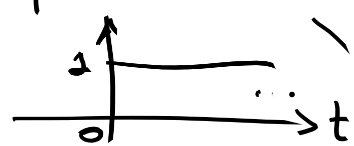
~ Σήματα
- $A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



- $A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



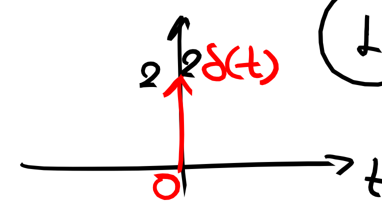
- $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

1



~ Συστήματα: $x(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

~ Κατηγορίες:

Γραμμικά / μη γραμμικά
Χ.Α / Χ.Μ
} Γ.Χ.Α

Αιτιατά / μη αιτιατά

Ευσταθή / ασταθή

Στατικά / δυναμικά

~ Διαφορικές εξισώσεις ως συστήματα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{\ell=0}^{N} b_\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell} x(t) \quad : \quad S$$

Αρχικές συνθήκες: $y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(N-1)}(0^-)$

~ Έξοδος: $y(t) = \underset{\text{zero input}}{\underset{\uparrow}{y_{zi}(t)}} + \underset{\text{zero state}}{\underset{\uparrow}{y_{zs}(t)}}$

- Χαρακτ. πολυώνυμο: $a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$
- —"— ρίζες: $(\lambda - \underline{\underline{\lambda_1}})(\lambda - \underline{\underline{\lambda_2}}) \ldots (\lambda - \underline{\underline{\lambda_N}}) = 0$

- $y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}, \quad t > 0$

Αν είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

c_k? λύνοντας $N \times N$ σύστημα με τις αρχικές συνθήκες

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t) \quad : \quad S_0$$

- $y_{zs}(t) = ?$

$x(t) = \delta(t)$

$y(t) = h(t)$

→ "Νέες" Α.Σ.

$$\left.\begin{aligned} h_0(0^+) &= 0 \\ h_0'(0^+) &= 0 \\ &\vdots \\ h_0^{(N-1)}(0^+) &= \frac{1}{a_N} \quad (=1) \end{aligned}\right\} \quad h_0(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}$$

για το σύστημα S_0

Άρα

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k}{dt^k} h_0(t) \quad \text{για το σύστημα } S$$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

- Ευστάθεια: $\lambda_i < 0, \ \forall i \iff$ ευσταθές σύστημα

- Αιτιατότητα: $h(t) = 0, \ t < 0 \iff$ αιτιατό σύστημα

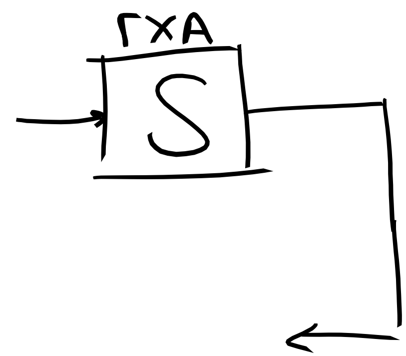
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$$

$\lambda > 0$

Αν $\dots + e^{3t} u(t) + \dots \implies$ ασταθές!

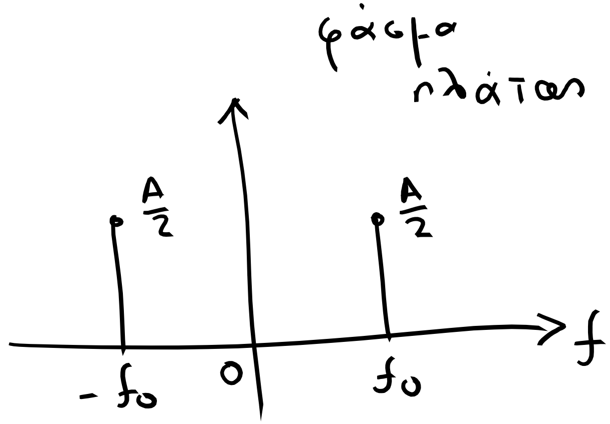
$\circ \sim \circ$

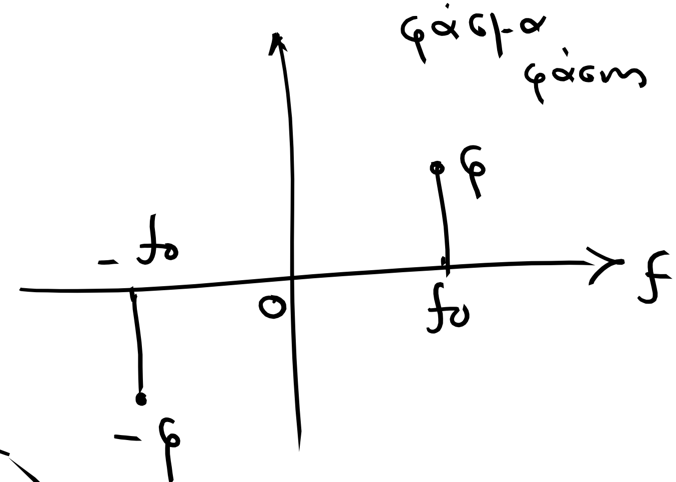
$x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$, $A > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$



$$y(t) = H(f_0)\, x(t)$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \varphi) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\varphi}}\, e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\varphi}}\, e^{-j2\pi f_c t}$$





ΑΡΤΙΟ

$x(t) \in \mathbb{R}$

$x(t) \in \mathbb{R}$

$$X_k = X^*_{-k}$$

ΠΕΡΙΤΤΟ

$x(t) \in \mathbb{R}$

Περιοδικό, T_0 :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, dt$$

Μετασχ Fourier:

$$\left.\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x(t) \in \mathbb{R} \\ &X(f) = X^*(-f) \end{aligned}$$

$$X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{φάσμα πλάτους}}\, e^{j\overbrace{\varphi_x(f)}^{\text{φάσμα φάσης}}}$$

- $A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$
- $A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$
- $e^{-at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f}$
- $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$
- $1 \xleftrightarrow{F} \delta(f)$

~ Περιοδικά σήματα & Μ. Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta(f - k f_0)$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f = k f_0 = \frac{k}{T_0}}$$

~ Σήματα Ισχύος (μη-περιοδικά):

$$x_0 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + x_z(t)$$

$$\big\downarrow F$$

$$X(f) = x_0 \delta(f) + X_z(f)$$

- $\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\pi f}$
- $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ