ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$

- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού

- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση** (frequency response)
- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

○ **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$

○ **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου*
- Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου*

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

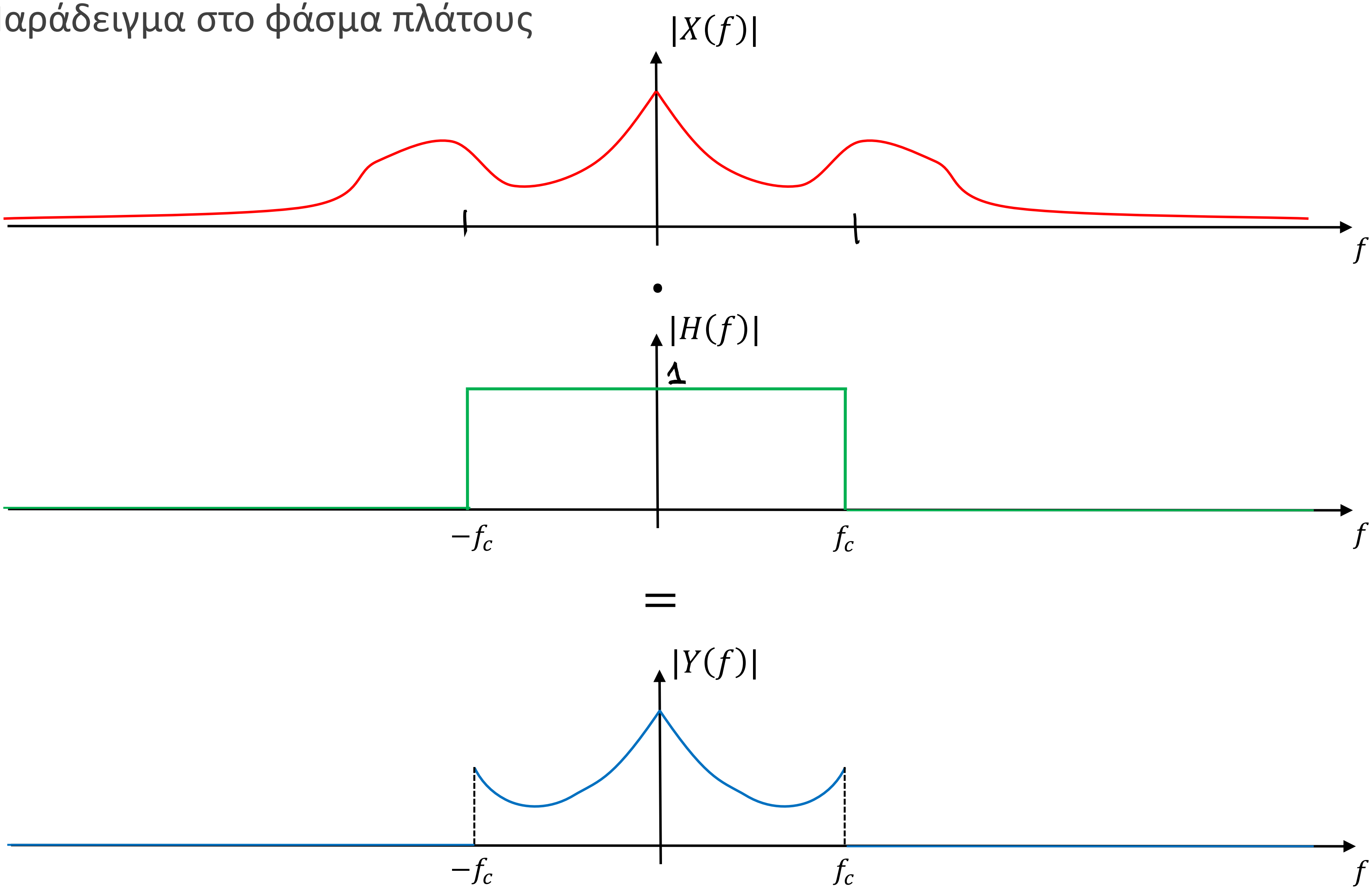
- Προφανώς

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

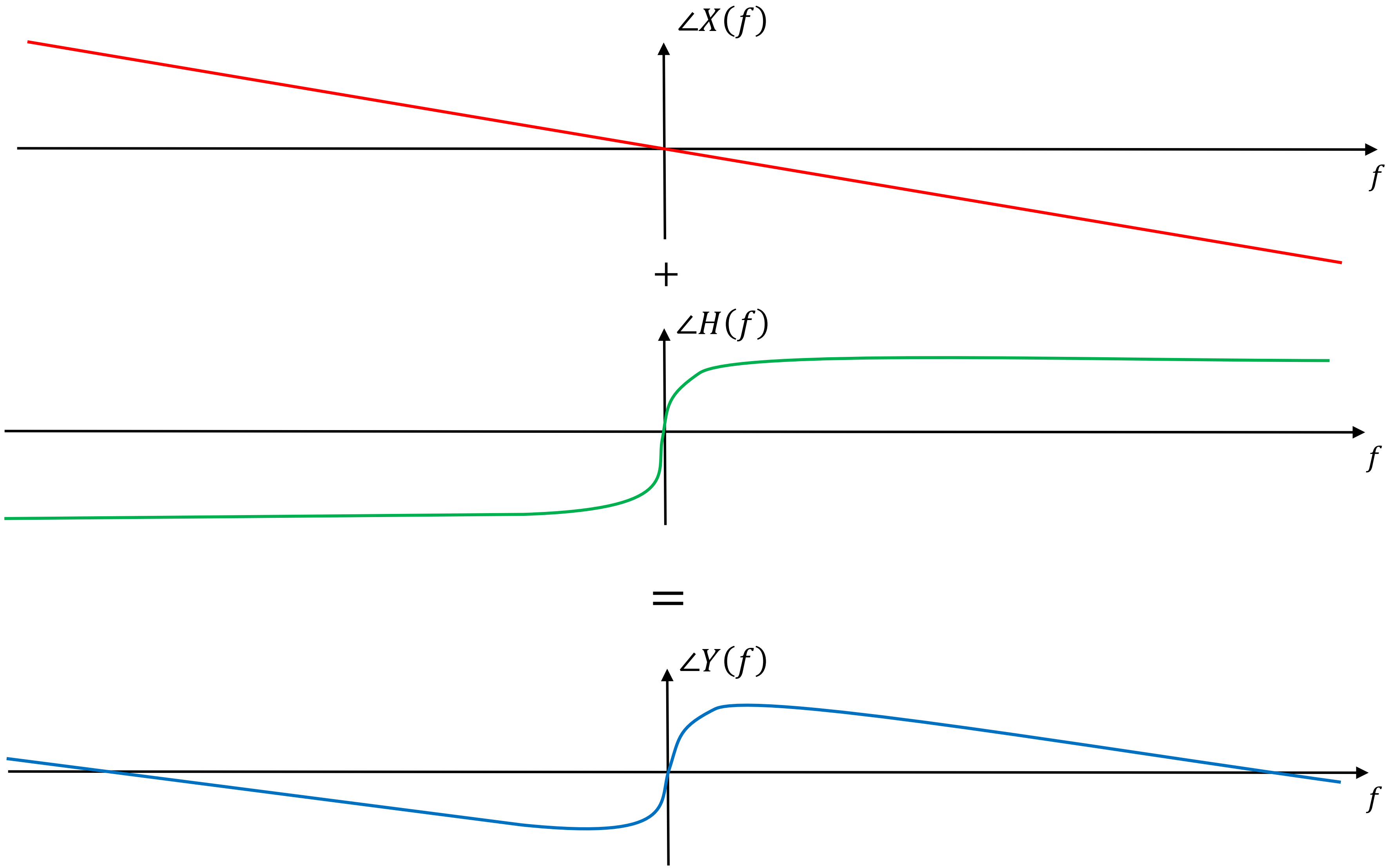
- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

$j2\pi f := u$

$$\frac{\sum_l b_l u^l}{\sum_i a_i u^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$S_1: \quad \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$S_0: \quad \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Για το S_0:

Χαρ. πολυώνυμο: $\lambda + 2$

Χαρ. ρίζα: $\lambda = -2 \Rightarrow h_0(t) = c_1 e^{\lambda t} = c_1 e^{-2t}, \; t > 0$

$h_0(0^+) = 1$ $\Rightarrow$

$\rightarrow h_0(0^+) = c_1 \cdot e^{-2\cdot 0} = c_1 = 1 \Rightarrow h_0(t) = e^{-2t}u(t)$

Άρα για S_1: $h(t) = 3h_0(t) - 6\frac{d}{dt}h_0(t) = \ldots = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Είναι

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)\right\}$$

$$(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6\cdot(j2\pi f)X(f)$$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6\cdot(j2\pi f))$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

Απεικονιση σε συχνοτητα

Άρα $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$?

$$j2\pi f X(f) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x'(t)$$

Εχουμε

$$H(f) = \frac{3}{2 + j2\pi f} - 6\frac{1}{2 + j2\pi f}\cdot j2\pi f$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j2\pi f}\right\} = -6\frac{d}{dt}e^{-2t}u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)}$$

Άρα $h(t) = 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}e^{-2t}u(t)$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\left((e^{-2t})'u(t) + e^{-2t}u'(t)\right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\left(-2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t)\right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) \underbrace{- 6e^{-2\cdot 0}\cdot\delta(t)}_{-6\delta(t)}$$

$$= -6\delta(t) + 15e^{-2t}u(t)$$

Εναλλακτικά,

$$H(f) = \frac{3-6j2\pi f}{2+j2\pi f} = \frac{3-6x}{2+x}$$

$$\begin{array}{r|l} -6x+3 & x+2 \\ \hline -(-6x-12) & -6 \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$= -6 + \frac{15}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t) = -6\delta(t) + 15e^{-2t}u(t).$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**
- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του ΓΧΑ συστήματος! ☺
- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0)|X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(kf_0)||X_k| \cos\left(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0)\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) = 3 + 2\cos\left(2\pi \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{f_0} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Η έξοδος θα είναι της μορφής:

$$y(t) = 3\,H(0) + 2\left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| \cos\left(2\pi \frac{2}{\pi} t + \frac{\pi}{3} + \varphi_H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$$

Είναι

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} j2\pi f\, Y(f) + 3Y(f) = X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \quad \left(\overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} h(t) = e^{-3t}u(t) \right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

$\rightarrow H(0) = H(f)\Big|_{f=0} = \frac{1}{3}$

$\rightarrow H\left(\frac{2}{\pi}\right) = H(f)\Big|_{f=\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{3+j2\pi\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{3+j4}$

$\left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| = \left|\frac{1}{3+j4}\right| = \frac{1}{|3+j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

$\varphi_H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \tan^{-1}\frac{H_I\left(\frac{2}{\pi}\right)}{H_R\left(\frac{2}{\pi}\right)}$ (1)

Είναι $\frac{1}{3+j4} = \frac{3-j4}{(3+j4)(3-j4)} = \frac{3-j4}{|3+j4|^2} =$

$= \frac{3-j4}{25} = \frac{3}{25} + j\frac{-4}{25} = H_R\left(\frac{2}{\pi}\right) + jH_I\left(\frac{2}{\pi}\right)$, άρα η (1) μας δίνει

$\varphi_H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \tan^{-1}\frac{-\frac{4}{25}}{\frac{3}{25}} = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) \cong -0.92$

Άρα $y(t) = 3\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.92\right)$.

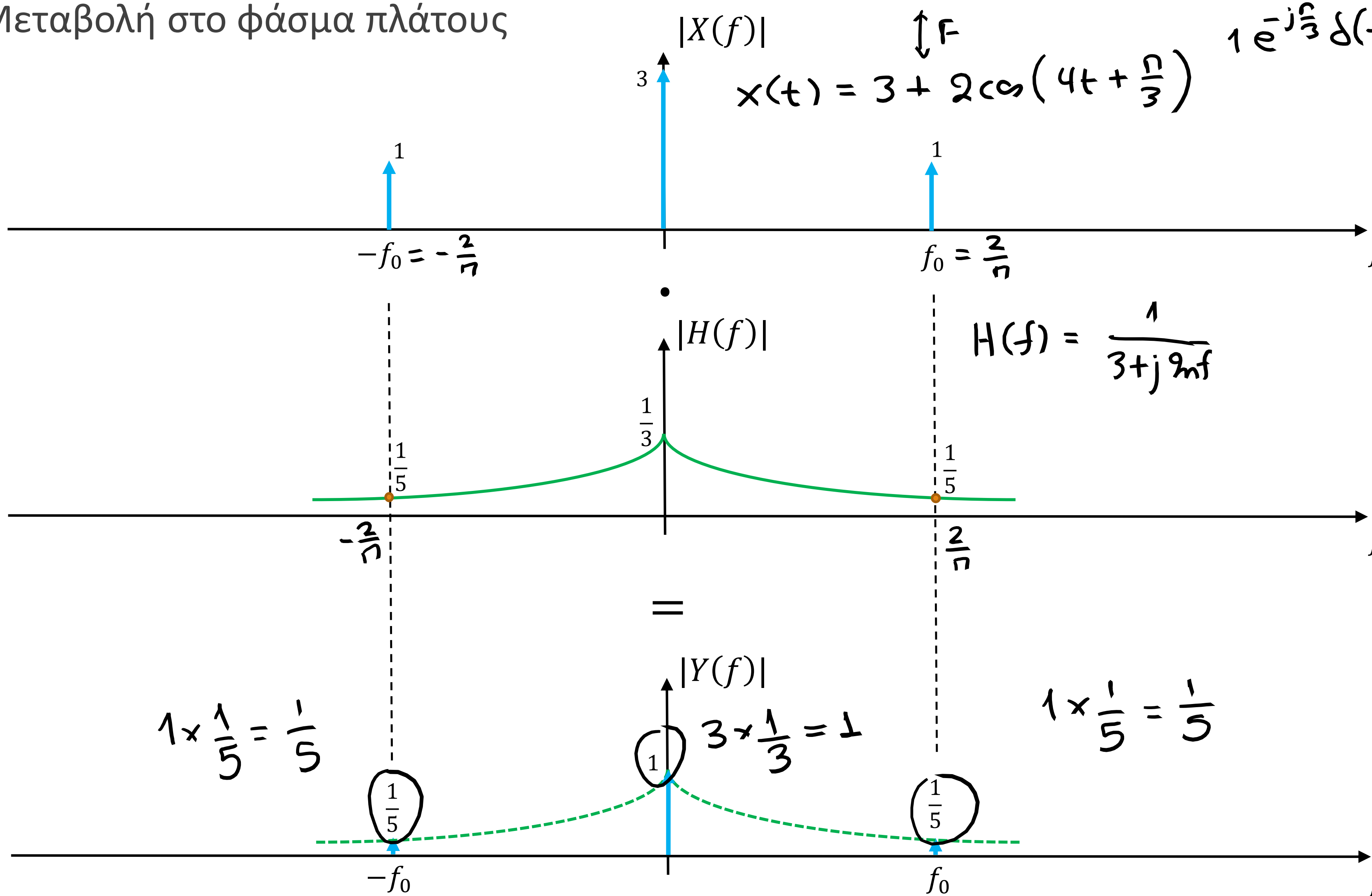
- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Μεταβολή στο φάσμα πλάτους

$$X(f) = 3\delta(f) + 1e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) + 1e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\updownarrow F$$

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?

- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο ⟷ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

- Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Γνωρίζουμε ότι $y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} Y(f) = X(f)H(f)$

— " — $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}$

— " — $h(t) = e^{-3t}u(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}$

Άρα $Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} \cdot \left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right)$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}$$

$$= \frac{A}{3+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{\Gamma}{1+j2\pi f}$$

$$A = Y(f)(3+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-3} = -2$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Όμοια, $B = 1$, $\Gamma = 1$, άρα τελικά

$$Y(f) = \frac{-2}{3 + j2\pi f} + \frac{1}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{2 + j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$y(t) = -2e^{-3t}u(t) + e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για να επιτύχουμε όλα τα ωραία αποτελέσματα που βρήκαμε πριν, υποθέσαμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(f)$ ορίζεται

- Ισχύουν όλες οι γνωστές απαιτήσεις για την ύπαρξη της, όπως τις γνωρίσαμε στη μελέτη του Μετασχ. Fourier

  - Η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (μη αναγκαία συνθήκη)

  - Η κρουστική απόκριση να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη

- Αν δε γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση τότε μπορούμε να ξέρουμε αν το σύστημα που **εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις** έχει μετασχ. Fourier?

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Θυμηθείτε ότι, για ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα, μια τέτοια κρουστική απόκριση αποτελείται από όρους της μορφής

$$\delta^{(n)}(t), \qquad c_i e^{\lambda_i t} u(t), \qquad c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη μόνον όταν δεν υπάρχουν παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα και όταν

$$\lambda_i < 0 \text{ , αν } \lambda_i \in \Re$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές!

- Όμως αυτό θα σημαίνει ότι **υπάρχει** και ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης! ☺

- Συνοψίζοντας: ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις μπορεί να γραφεί στο χώρο του Μετασχ. Fourier αν και μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές!
  - Θα εξετάσουμε μη αιτιατά συστήματα αργότερα

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ