ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η

- Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος
- Αντίστροφος Μετασχ. Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**
- Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το M.F. ενός απλού ημιτόνου $\cos(2\pi f_0 t)$
- Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{F}\{\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}\,\mathrm{F}\{\mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}\}$$

- Τα παραπάνω ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται
- Όμως ξέρουμε ότι $e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \mp f_0)$
- Οπότε

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, και αφού μπορούμε να περιγράψουμε κάθε περιοδικό σήμα ως μια Σειρά Fourier, θα έχουμε

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

- Όμως πάλι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το X_k για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω
  - Κάτι που είναι «επίπονο»… ☺

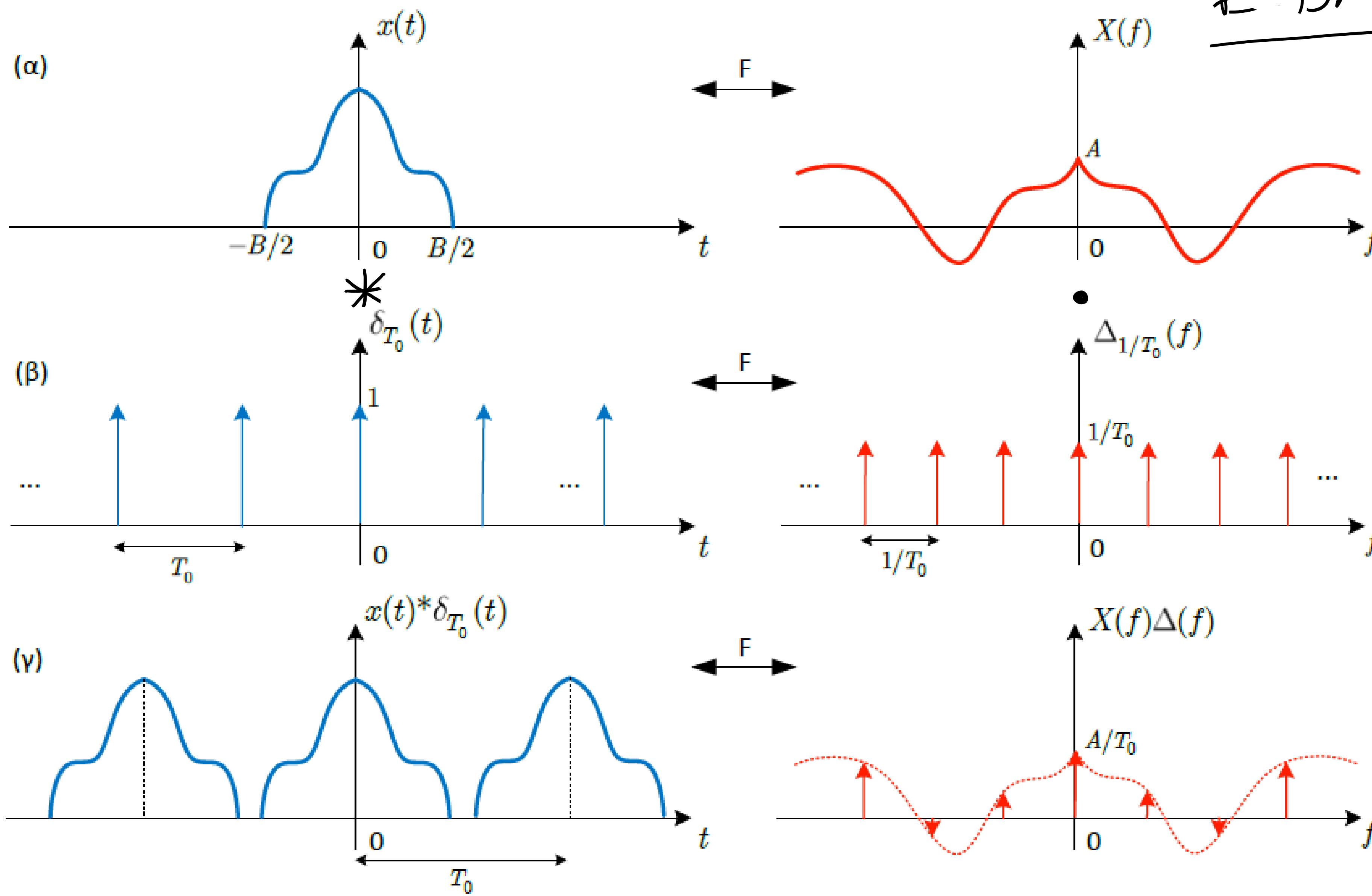
- Μπορούμε άραγε να βρούμε τους συντελεστές Fourier πιο εύκολα?
  - Μέσω του Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος ίσως?

- Στο παραπάνω θα μας βοηθήσει η γνωστή μας σχέση

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{T_0}\right)}^{X_k} e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow \Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0)$$

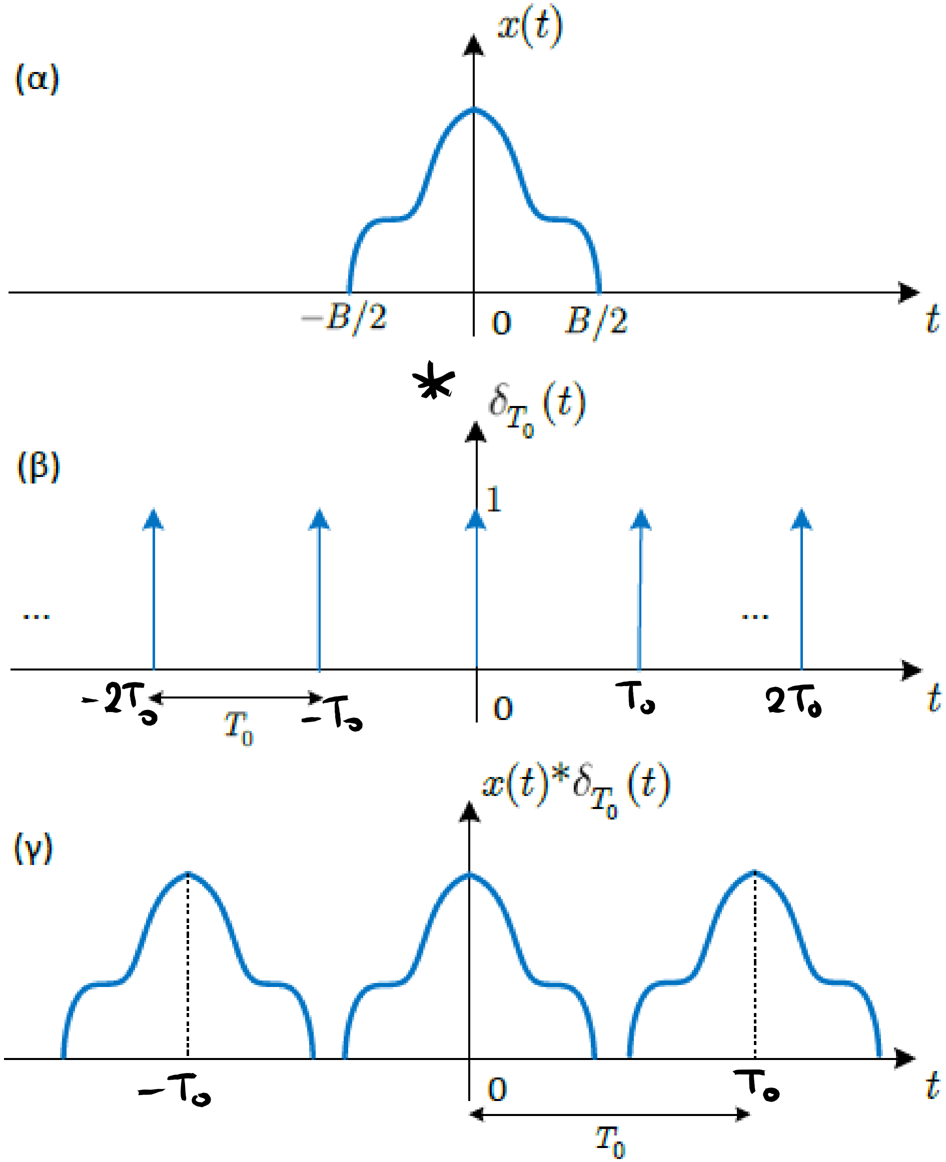
• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Ε. ΒΑ



• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$



$$x\,(t)$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$x\,(t) * \delta_{T_0}(t) = x\,(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\,(t) * \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\,(t - kT_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$\boxed{X(f)\delta(f-f_0) = X(f_0)\delta(f-f_0)}$$

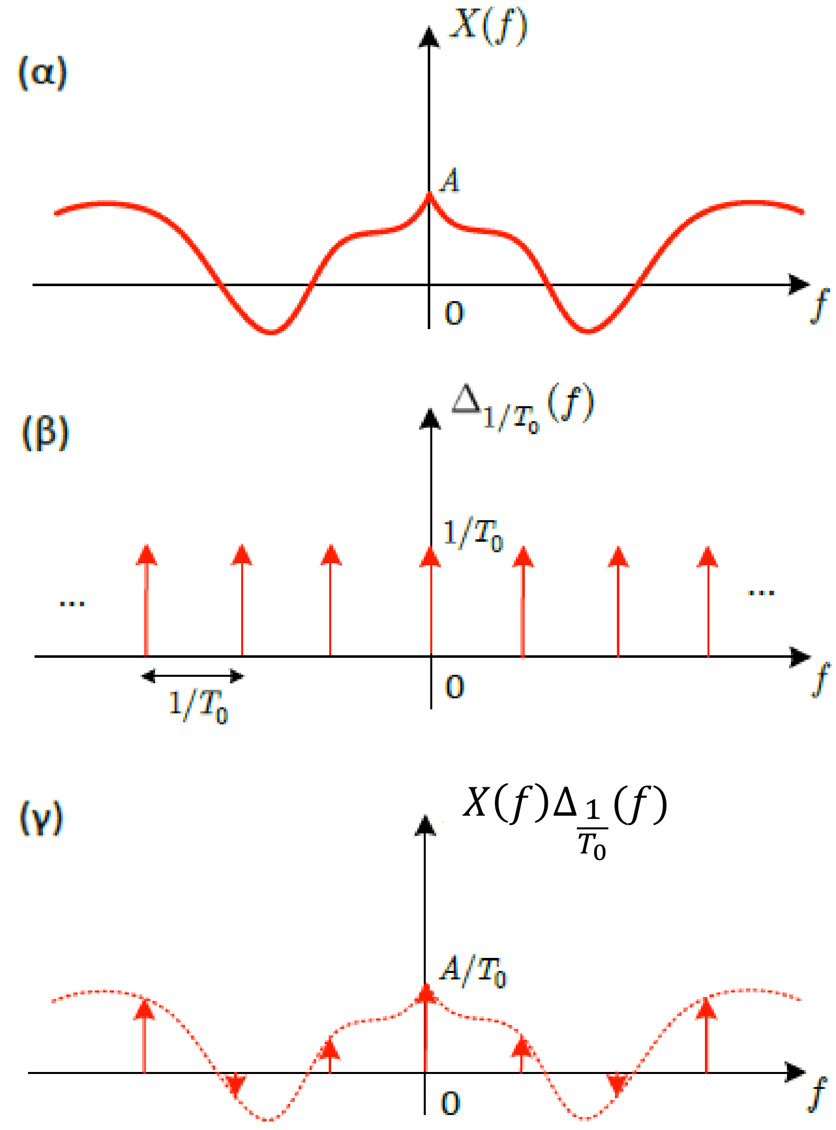
$$X(f)$$

$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

$$X(f)\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}\underbrace{X(f)\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}X\left(k\frac{1}{T_0}\right)\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$



- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Άρα αφού

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k} \delta\left(f - kf_0\right)$$

και

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{\frac{1}{T_0} X\left(k\frac{1}{T_0}\right)} \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

οι συντελεστές Fourier μπορούν να προκύψουν από το Μετασχ. Fourier μιας περιόδου από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

δηλ. αρκεί να δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ανά $\frac{k}{T_0}$ και ό,τι προκύψει να το πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{T_0}$!!!!

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Συνοψίζοντας:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε *μια* περίοδο του σήματος $x(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = kf_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0) = X_{T_0}(f)$

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} X(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Γνωρίζουμε ότι τα σήματα ισχύος δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα, οπότε δεν έχουν Μετασχ. Fourier

- Μπορούμε άραγε να εκμεταλλευτούμε τη χρήση «ιδιαίτερων» συναρτήσεων όπως η συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε μια τέτοια έκφραση?

- Μπορούμε να γράψουμε ένα απεριοδικό σήμα ισχύος ως

$$x(t) = x_0 + x_z(t)$$

με

- ❑ x_0 τη μέση τιμή του σήματος (αριθμός)

$$x_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

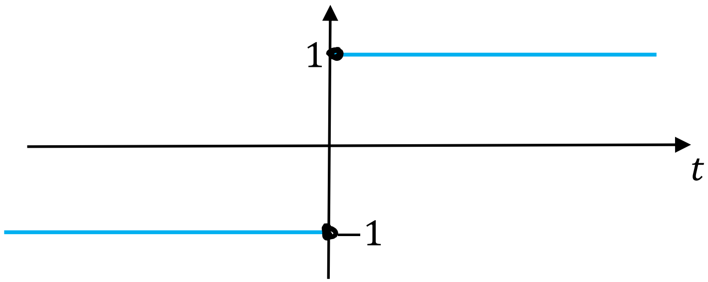
- ❑ $x_z(t)$ το υπόλοιπο σήμα μηδενικής μέσης τιμής

- Τότε

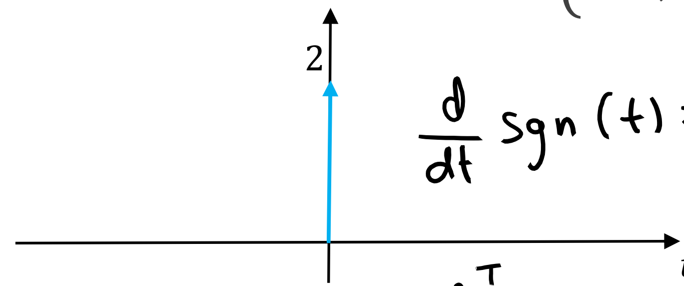
$$X(f) = x_0\delta(f) + X_z(f)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Ως παράδειγμα, για το μετασχ. Fourier του σήματος $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



d/dt



$\frac{d}{dt} \mathrm{sgn}(t) = 2\delta(t)$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $x_0 = 0 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{sgn}(t)\, dt = 0$

- Άρα

$$\mathrm{sgn}(t) = \hat{x}(t) = 0 + x_z(t) \leftrightarrow \hat{X}(f) = 0 \cdot \delta(f) + X_z(f) = X_z(f)$$

- Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_z(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Leftrightarrow X_Z(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

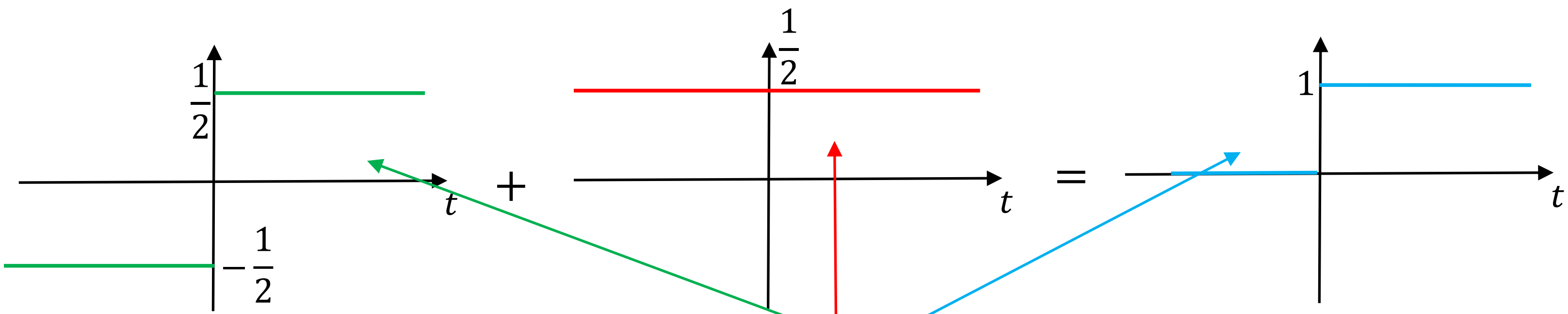
σύμφωνα με την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier

- Οπότε

$$\hat{X}(f) = X_z(f) = F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Ως παράδειγμα, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- Το σήμα $u(t)$ γράφεται ως

μέση τιμή του $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\,dt$$

- Άρα

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Οπότε

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}(fT)$
$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t),\ a > 0$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t),\ a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Για την αντίστροφη διαδικασία εύρεσης του σήματος στο χρόνο από το μετασχ. Fourier του, συνήθως ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:

○ Χρήση του ορισμού

○ Χρήση ιδιοτήτων (π.χ. δυϊκότητα)

○ Χρήση πινάκων γνωστών μετασχηματισμών

ενώ χρησιμοποιείται συχνά η τεχνική του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω ότι γνωρίζετε τα παρακάτω:

$x(t) > 0$

$x(t) \in \mathbb{R}$

- Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές
- Ισχύει

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t), \qquad A \in \Re$$

- Ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Βρείτε το $x(t)$

Είναι $F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t)$

άρα $(2+j2\pi f)X(f) = F\{Ae^{-3t}u(t)\} = \dfrac{A}{3+j2\pi f}$

οπότε $(2+j2\pi f)X(f) = \dfrac{A}{(3+j2\pi f)}$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

Αρα $$X(f) = \frac{A}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} = A\frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

$$= A\left(\frac{C_1}{2+j2\pi f} + \frac{C_2}{3+j2\pi f}\right)$$

$$C_1 = \frac{1}{\cancel{(2+j2\pi f)}(3+j2\pi f)}\cancel{(2+j2\pi f)}\Bigg|_{j2\pi f:=-2} = \frac{1}{3+j2\pi f}\Bigg|_{j2\pi f:=-2} = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{(2+j2\pi f)\cancel{(3+j2\pi f)}}\cancel{(3+j2\pi f)}\Bigg|_{j2\pi f:=-3} = \frac{1}{2+j2\pi f}\Bigg|_{j2\pi f:=-3} = -1$$

Αρα $$X(f) = A\left(\frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{1}{3+j2\pi f}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t) = A\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

Ε.ΒΑ

- Παράδειγμα:

Τέλος, $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{4}{15} =$

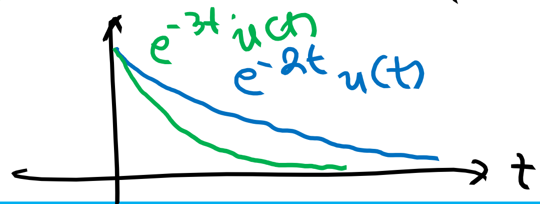
$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2t} - e^{-3t})^2 u^2(t) dt = A^2 \int_{0}^{+\infty} (e^{-2t} - e^{-3t})^2 \cdot 1 \cdot dt$$

$$= A^2 \int_{0}^{+\infty} (e^{-4t} - 2e^{-5t} + e^{-6t}) dt = \frac{4}{15} \Rightarrow \dots \quad A^2 = 16$$

Λύνοντας, καταλήγουμε ότι $A = \pm 4$ $(x(t) \in \mathbb{R})$

Άρα

$x(t) = 4(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ ή $x(t) = 4(e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΥΛΗ ΠΡΟΟΔΟΥ

ΩΣ ΕΔΩ