ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\|=\|X(-f)\|, \\ \phi_x(f)=-\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t)=x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Re$
Περιττό σήμα	$x(t)=-x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t)=\mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t)=\mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}\|X(f)\|^2df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

Αν $z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{F} Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi f t} dt = A\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt + B\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= AX(f) + BY(f).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|},\ \ a > 0,\ \forall t$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f}\left(1 - \lim_{t\to-\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\right) - \frac{1}{a+j2\pi f}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a+j2\pi f + a - j2\pi f}{(a-j2\pi f)(a+j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

αφού τα όρια τείνουν στο μηδέν.

Άρα

$$x(t) = e^{-a|t|} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

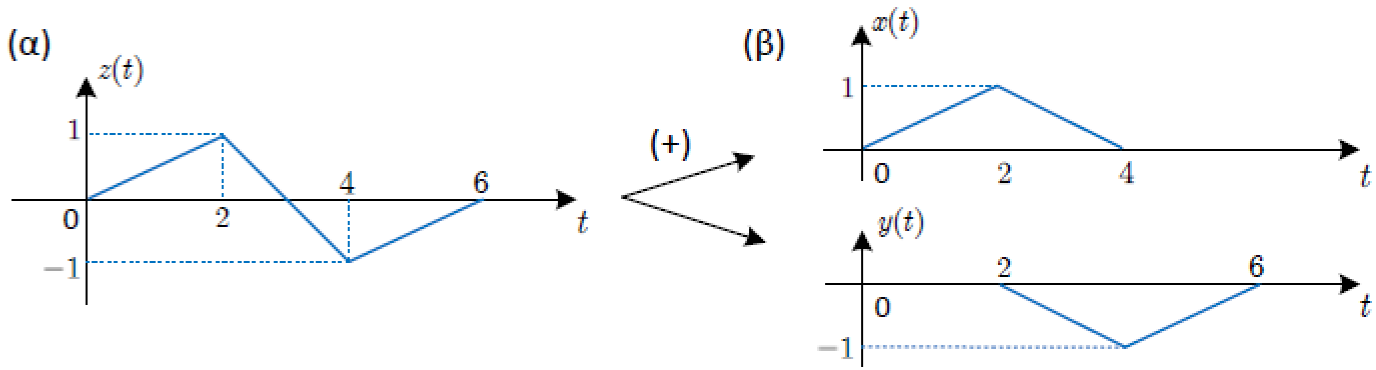
Απόδειξη:

Αν $z(t) = x(t-t_0)$, τότε

$$\left.\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt \\ u &= t - t_0 \Rightarrow du = dt \\ t_1 &= -\infty \rightarrow u_1 = -\infty \\ t_2 &= +\infty \rightarrow u_2 = +\infty \end{aligned}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f(u+t_0)} du = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**



Είναι $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{ tri\left(\frac{t-2}{2}\right)\right\} = 2\,sinc^2(2f)\,e^{-j2\pi 2f}$

$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{ -tri\left(\frac{t-4}{2}\right)\right\} = -2\,sinc^2(2f)\,e^{-j2\pi 4f}$

Άρα $Z(f) = X(f) + Y(f) = 2\,sinc^2(2f)\left(e^{-j2\pi 2f} - e^{-j2\pi 4f}\right)$

$= 2\,sinc^2(2f)\,e^{-j2\pi 3f}\left(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}\right)$

$= 2\,sinc^2(2f)\,2j\,\sin(2\pi f)\,e^{-j2\pi 3f}$

$= j\,4\,sinc^2(2f) \cdot \sin(2\pi f)\,e^{-j6\pi f}$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$

Απόδειξη:

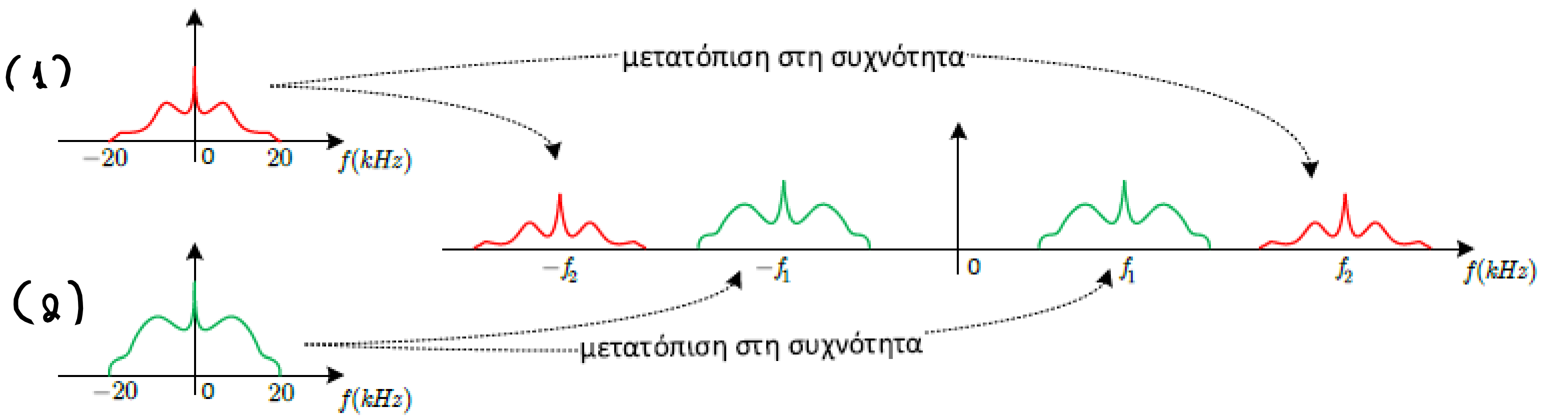
Είναι $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt$

$= X(f-f_0)$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

  - Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

Είναι
$$y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$
$$= x(t)e^{j2\pi f_0 t} + x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \quad \text{(Euler)}$$
$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$
$$Y(f) = \mathcal{F}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} + \mathcal{F}\{x(t)e^{-j2\pi f_0 t}\}$$
$$= X(f-f_0) + X(f+f_0)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$

Απόδειξη:

Έστω $a>0$. $z(t) = x(at)$, τότε $Z(f) = F\{x(at)\}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$u = at \Rightarrow du = a\,dt$

$t_1 = -\infty \Rightarrow u_1 = a\cdot(-\infty) = -\infty$

$t_2 = +\infty \Rightarrow u_2 = a(+\infty) = +\infty$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-j2\pi f \frac{u}{a}} \frac{1}{a}\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-j2\pi \frac{f}{a} u}\, du$$

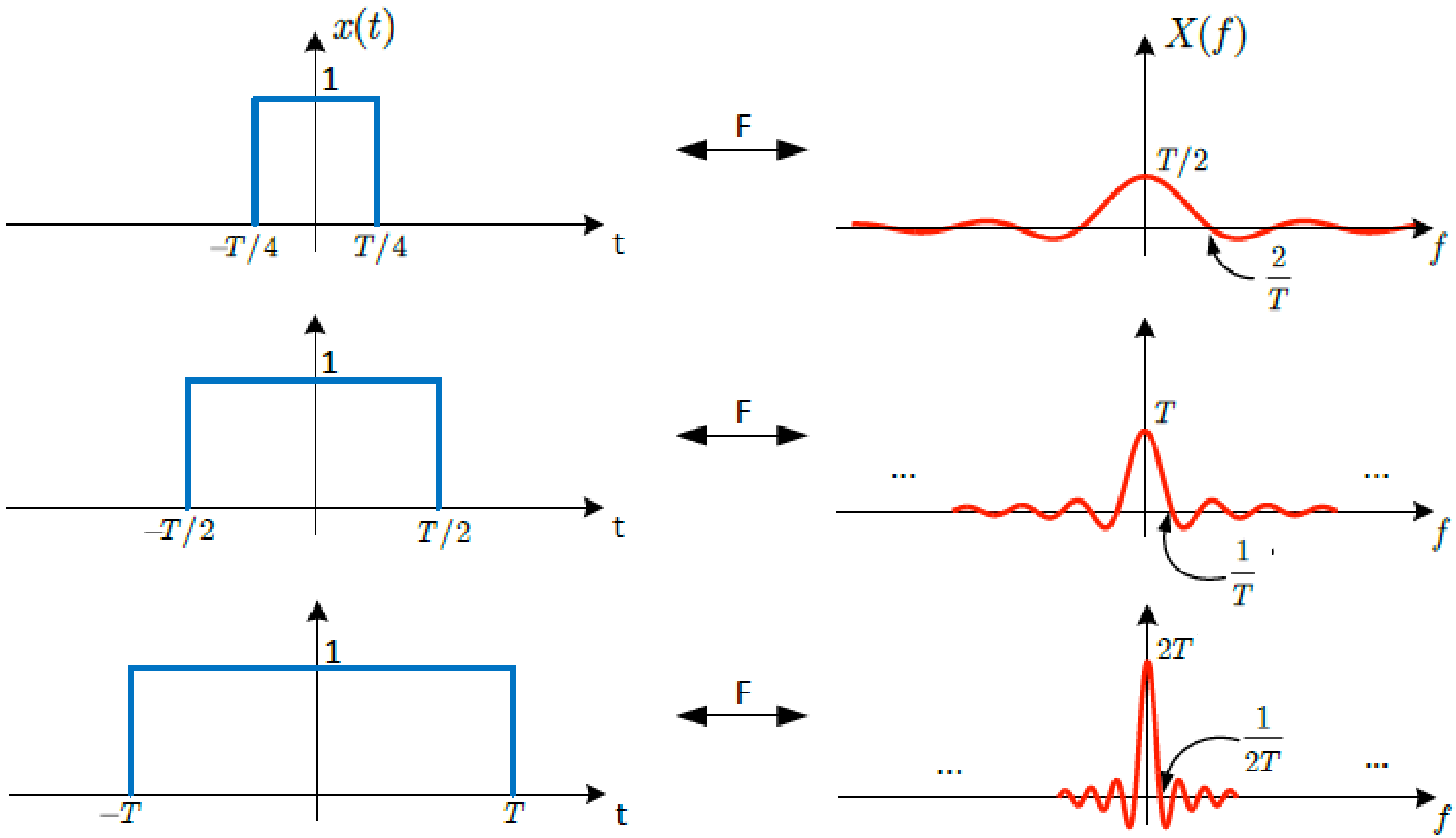
$$= \frac{1}{a}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi \frac{f}{a} t}\, dt}_{X\left(\frac{f}{a}\right)}$$

Άρα $x(at),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$.

Όμοια για $a<0$.

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad T\,\mathrm{sinc}(fT)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

· Έστω $z(t) = x(t) * y(t)$, τότε $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t)) e^{-j2\pi ft} dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right]}_{Y(f)e^{-j2\pi f\tau}} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f) X(f) = X(f) Y(f)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

  - Υπολογίστε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$

Από την ιδιότητα $x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} X(f)H(f) = Y(f)$

Ξέραμε $e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2+j2\pi f} = H(f)$

$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1+j2\pi f} = X(f)$

$u = j2\pi f$

$$\frac{1}{(1+u)(2+u)}$$

Άρα $Y(f) = X(f)H(f) = \dfrac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)} = \dfrac{A}{1+j2\pi f} + \dfrac{B}{2+j2\pi f}$

$= \dfrac{A}{1+u} + \dfrac{B}{2+u}$

$A = Y(u)(1+u)\Big|_{u=-1} = \dfrac{1}{2+u}\Big|_{u=-1} = 1$

$B = Y(u)(2+u)\Big|_{u=-2} = \dfrac{1}{1+u}\Big|_{u=-2} = -1$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Άρα $Y(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u} \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}$

Οπότε από πίνακες έχουμε

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+j2\pi f}\right\}$$
$$= e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$
$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

$$t \rightleftarrows f$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$

Απόδειξη:

Είναι $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$ ⎫ $\Rightarrow x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f u} df$

$u = -t$ ⎭

Αν $u \leftrightarrow f$

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-j2\pi f u} du = F\{X(t)\}$$

Άρα $X(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

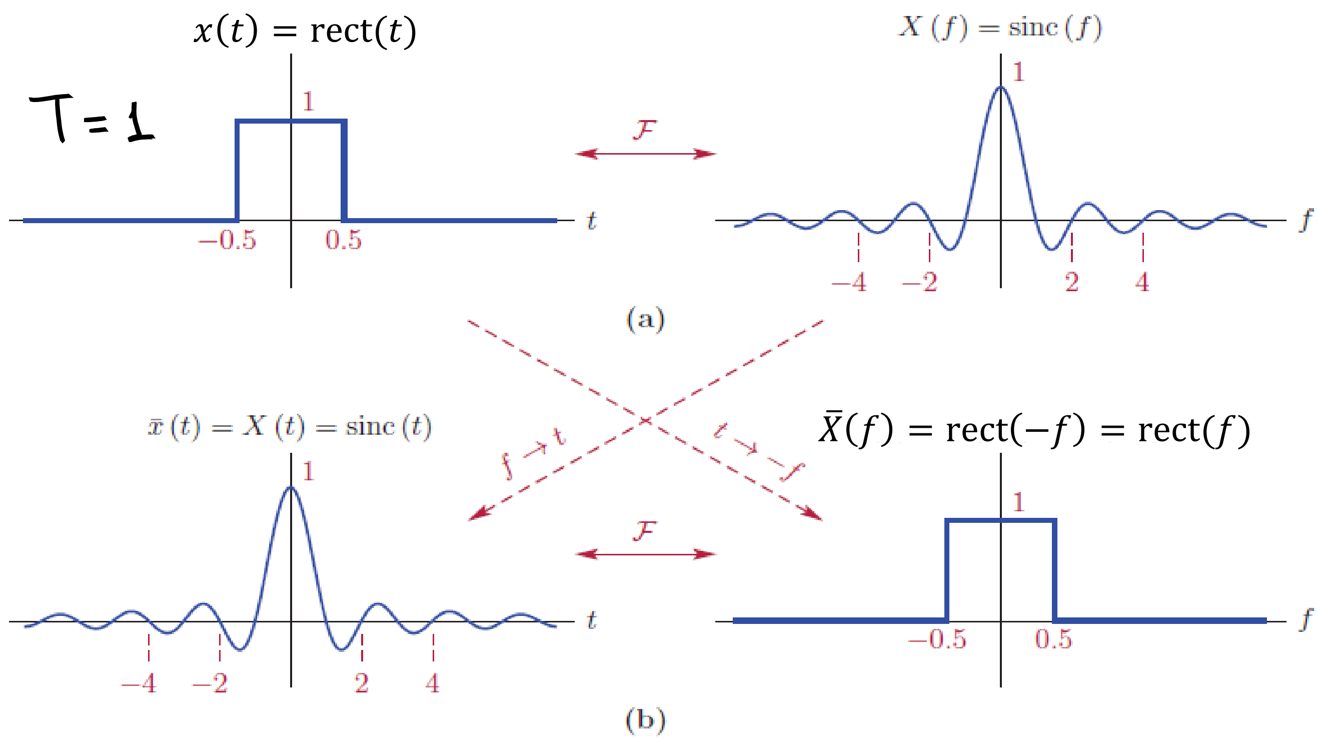
Γνωρίζαμε

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$T\,\mathrm{sinc}(tT) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

$$e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3+j2\pi f}$$

$$\frac{1}{3+j2\pi t} \xleftrightarrow{F} e^{3f}u(-f)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

E. BA

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$

Απόδειξη:

Είναι $z(t) = x(t)\,y(t)$, τότε $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\,e^{+j2\pi u t}\,du}_{x(t)} \Big)\, y(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,e^{-j2\pi (f-u)t}\,dt}_{Y(f-u)} \Big)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\,Y(f-u)\,du$$

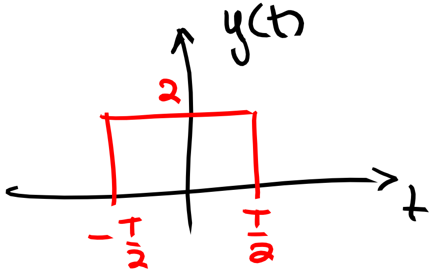
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

$$= X(f) * Y(f)$$

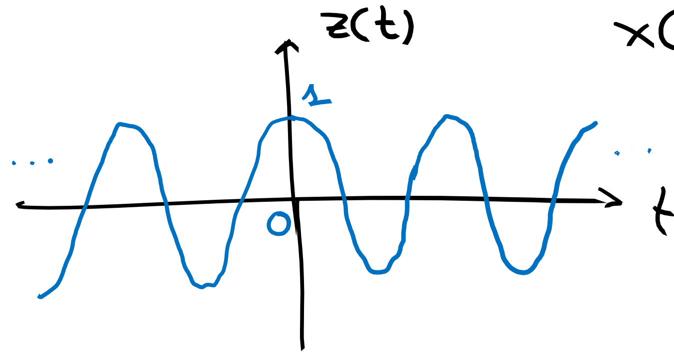
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

E.ΒΑ

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$



$\times$



$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0)$$

$$y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f) = 2T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$z(t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_c t}$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$Z(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

Άρα

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = Y(f) * Z(f) = \cancel{2}T\,\mathrm{sinc}(fT) * \left(\frac{1}{\cancel{2}}\delta(f - f_0) + \frac{1}{\cancel{2}}\delta(f + f_0)\right)$$

$$= T\,\mathrm{sinc}((f - f_0)T) + T\,\mathrm{sinc}((f + f_0)T).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, τότε $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

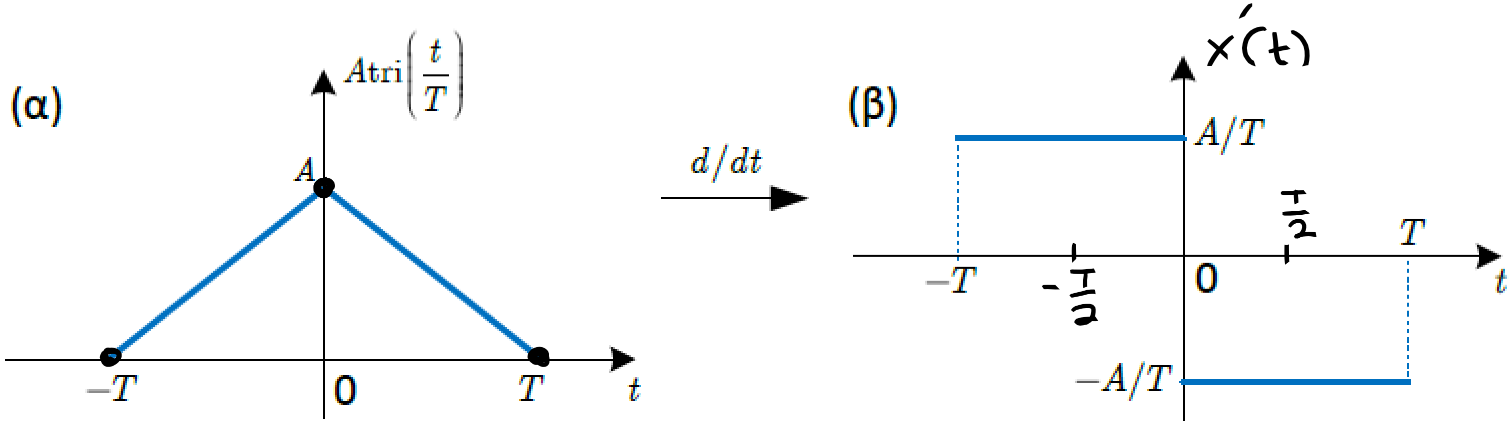
$$= x(t)e^{-j2\pi f t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-j2\pi f t}\,dt \qquad \frac{x(+\infty)=0}{x(-\infty)=0}$$

$$= 0 - 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi f)e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$= j2\pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\,dt}_{X(f)} = j2\pi f\, X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$ ← $AT\mathrm{sinc}^2(fT)$



Είναι $x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$

$$F\{x'(t)\} = \frac{A}{\cancel{T}}\cdot \cancel{T}\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} - \frac{A}{\cancel{T}}\cdot \cancel{T}\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)$$

$$= 2Aj\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$= \cancel{j2}A\,\text{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT) = \cancel{j2}\pi f\,X(f)$$

$$\left\{ \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right\}$$

Άρα $$X(f) = A\,\text{sinc}(fT)\,\frac{T\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$= A\,\text{sinc}(fT)\cdot T\cdot\text{sinc}(fT)$$

$$= AT\,\text{sinc}^2(fT).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Απόδειξη:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j2\pi ut} du \right)^* dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt}_{\delta(f-u)} \right) du \right) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u)\, \delta(f-u)\, du \right) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\, \delta(f-u)\, du \right)}_{X(f)^*} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(f)\, df =$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**
  - Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)df$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 df$

Είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{sinc}(f)\big)^2 df$$

$$X(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t)$$

Αν $X(f) = \mathrm{sinc}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t) = \mathrm{rect}(t)$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{rect}(t)\big)^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2\,dt$$

$$= t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\,df$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ