- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα

- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα *μετρήσιμων* διακριτών συχνοτήτων kf_0, με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις φ_k:

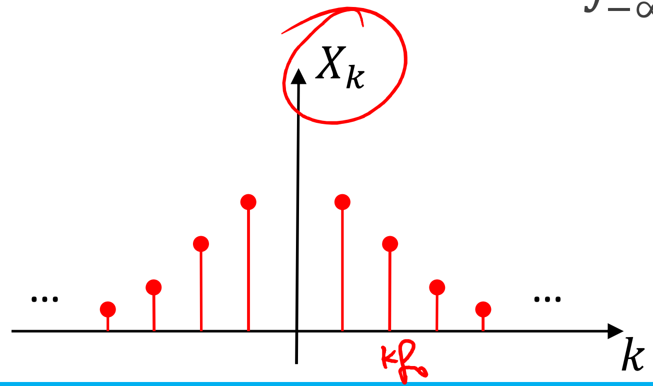
$T_0 = 1/f_0$

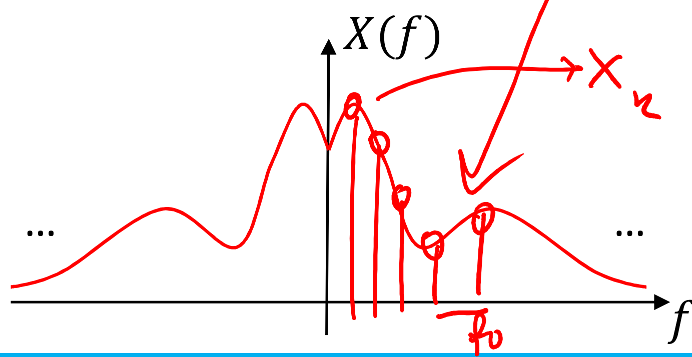
$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

→ Μετ Four

- Ο μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* άθροισμα ***κάθε*** συχνότητας f, με πλάτη $2|X(f)|$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|X(f)| \cos\big(2\pi f t + \angle X(f)\big)\, df$$





- **Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη**
- Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

  - Το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
  - Δεν είναι αναγκαία συνθήκη

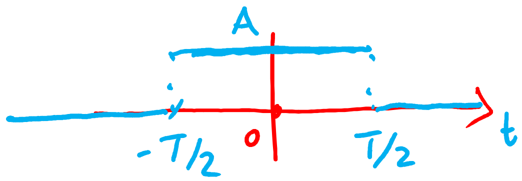
- Επίσης αν

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετασχ. Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**



$f_0 \cdot T_0 = 1$

- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}} - e^{j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}}\right) = \frac{A}{j\cancel{2}\pi f}\,\frac{\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)}{2j} =$$

$$= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \cdot \mathrm{sinc}(fT) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$$

μηδενισμοί του $X(f)$: $\sin(\pi f T) = 0 \Rightarrow \cancel{\pi} f T = k\cancel{\pi} \Rightarrow f_k = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{f \to 0} X(f) = AT \cdot \lim_{f \to 0} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT$$

$$X(f) = X_R(f) + jX_I(f)$$

$$X_R(f) = AT \cdot \mathrm{sinc}(fT)$$

$$X_I(f) = 0$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$$X_R(f) = X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

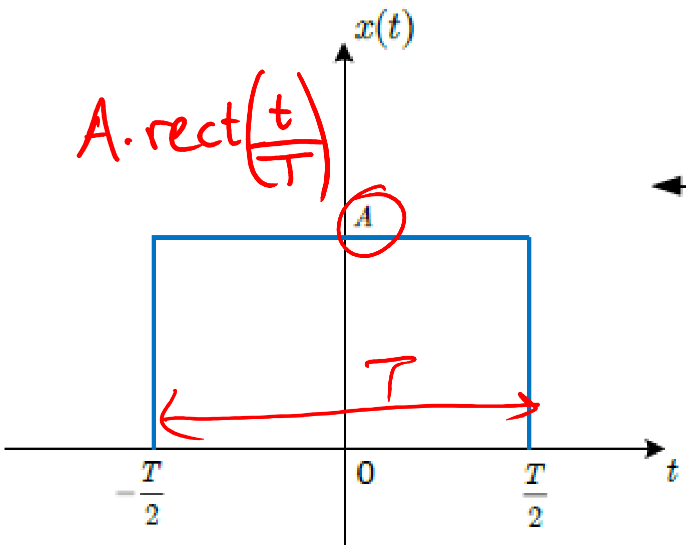
$$X_I(f) = 0$$

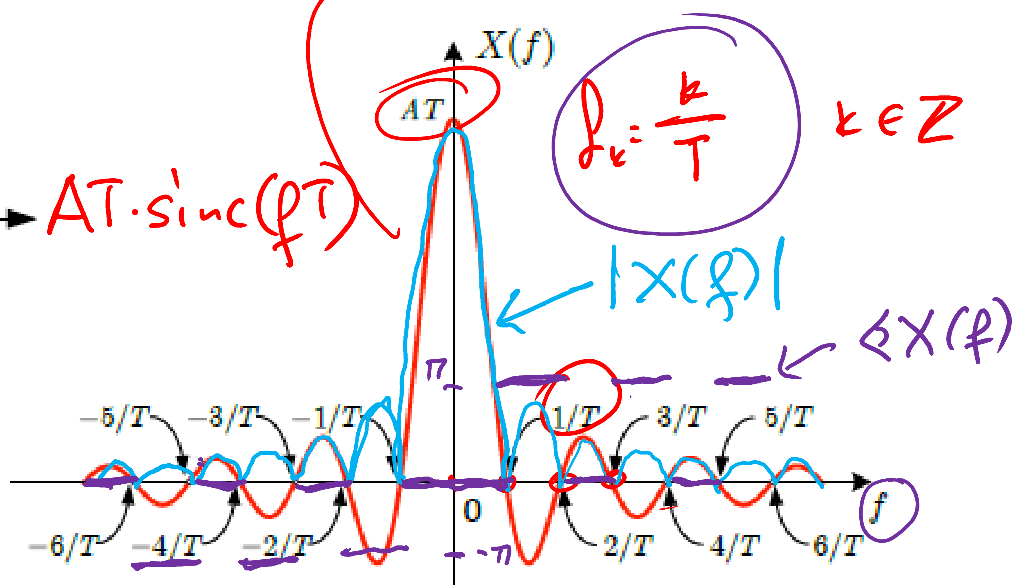
- Παράδειγμα:

• Μέτρο: $|X(f)| = AT \cdot |\mathrm{sinc}(fT)|$

• φάση: $\angle X(f) = \varphi(f) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1} 0 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} 0 & (k=0) \\ \pi & (k=1) \\ -\pi & (k=-1) \end{cases}$

$A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT \cdot \mathrm{sinc}(fT)$





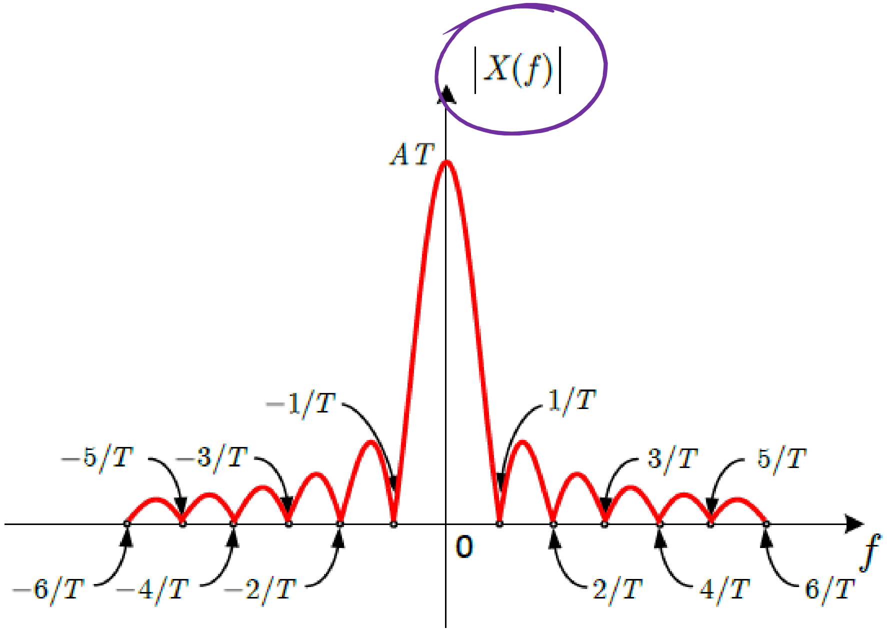
- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

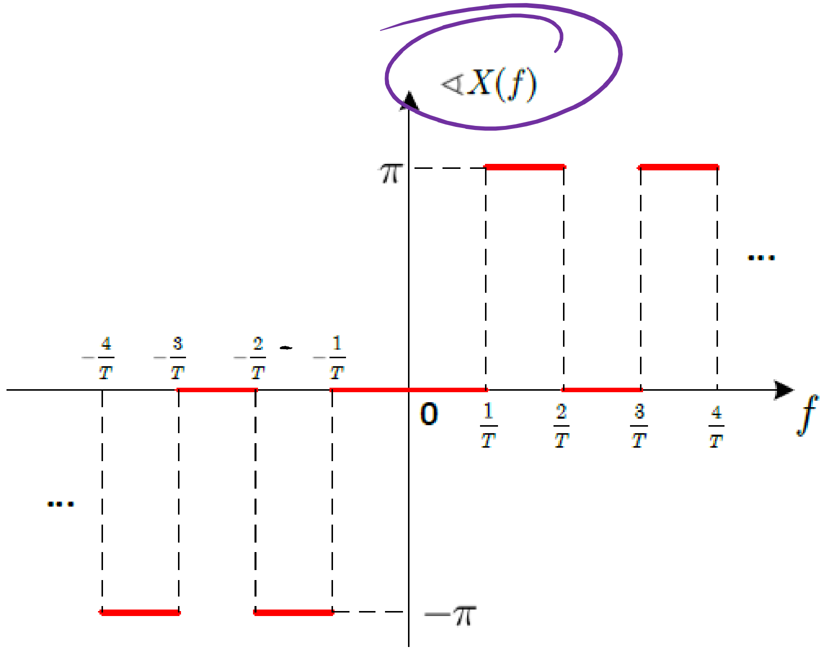
• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$|X(f)| = A\,T\left|\mathrm{sinc}(fT)\right|$$

$$\sphericalangle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$

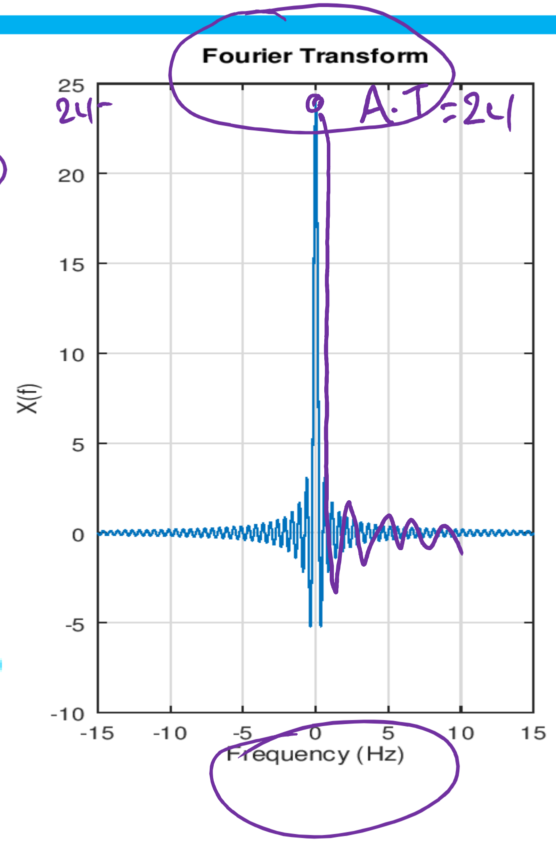


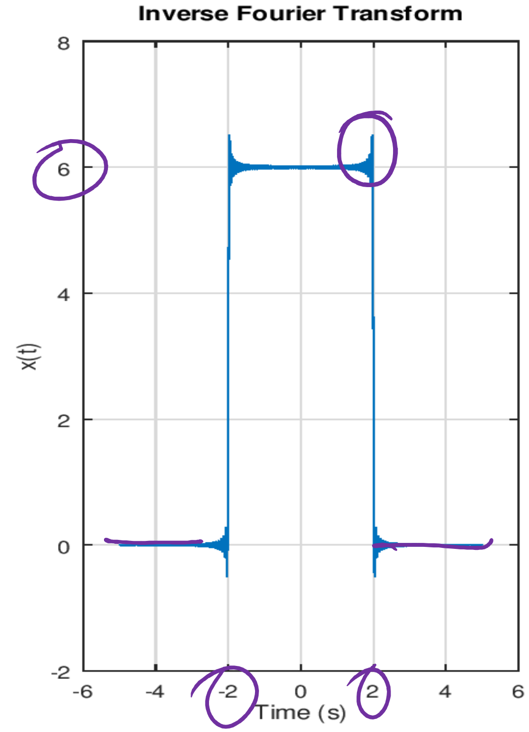


- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```
% Πλάτος παλμού
A = 6;
% Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4;
% Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01;
% Άξονας του χρόνου
t = -5:dt:5;
% Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01;
% Άξονας συχνοτήτων (από -15 ως 15 Hz)
f = -15:df:15;
% Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*sinc(f*T);
% Αρχικοποίηση
x = zeros(size(t));
% Βρόχος επανάληψης
for i = 1:length(f)
  % Αντίστροφος μετασχ. Fourier
  x = x + X(i) .* exp(j*2*pi*f(i)*t);
end
% Κλιμάκωση (για λόγους που θα δείτε στη σειρά ασκήσεων :) )
x = df*x;
```

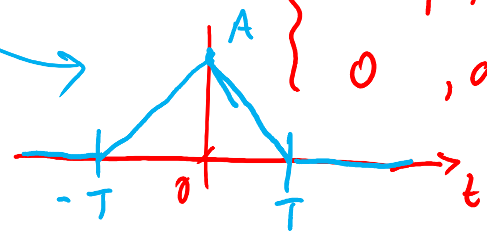





```
% Γράφημα
subplot(121);
plot(f, X);
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('X(f)');
title('Fourier Transform');
subplot(122);
plot(t, x);
xlabel('Time (s)');
ylabel('x(t)');
title('Inverse Fourier Transform');
```

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t|<T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = A\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt =$$

$$= A\left[\int_{-T}^{0}\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi f t}\,dt + \int_{0}^{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi f t}\,dt\right] = \dots =$$

$$= AT\cdot \mathrm{sinc}^2(fT)$$

$\Rightarrow$ μηδενισμοί της $X(f)$ στα $k\frac{1}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} AT\cdot\mathrm{sinc}^2(fT) = X(f)$$

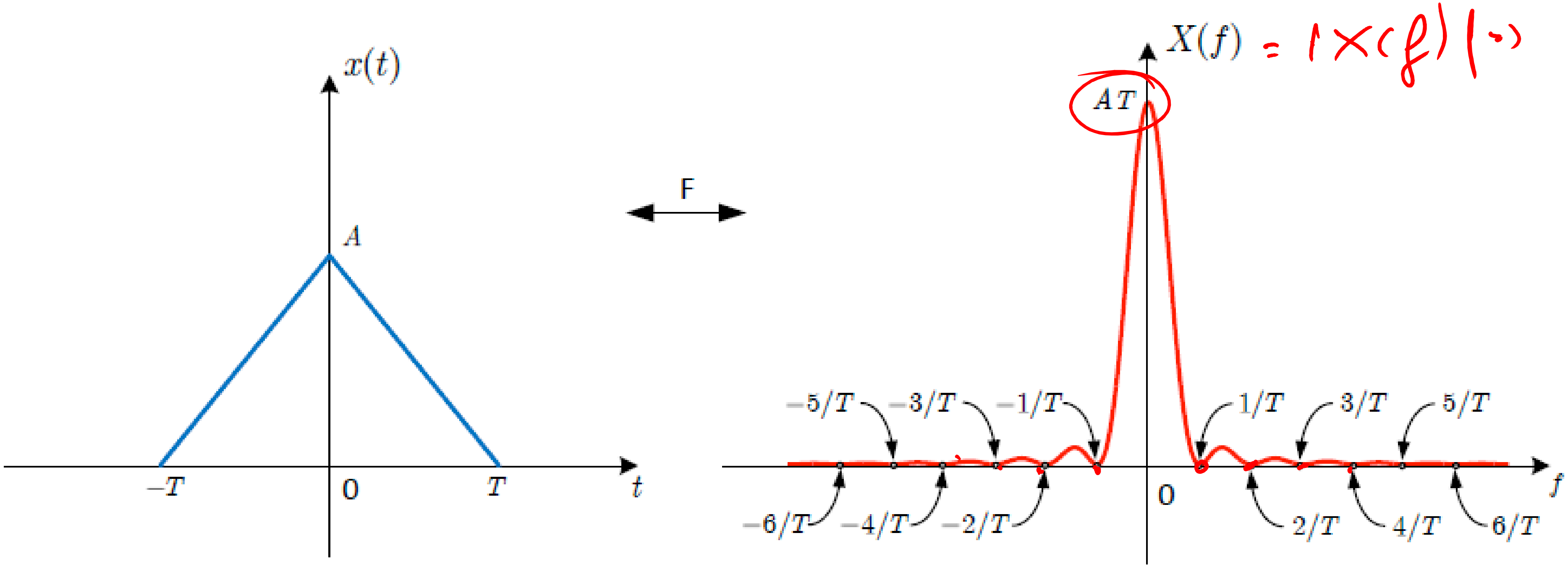
$$X_R(f) = AT\cdot\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$X_I(f) = 0$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

φάση: $\sphericalangle X(f) = 0 \quad \forall f$

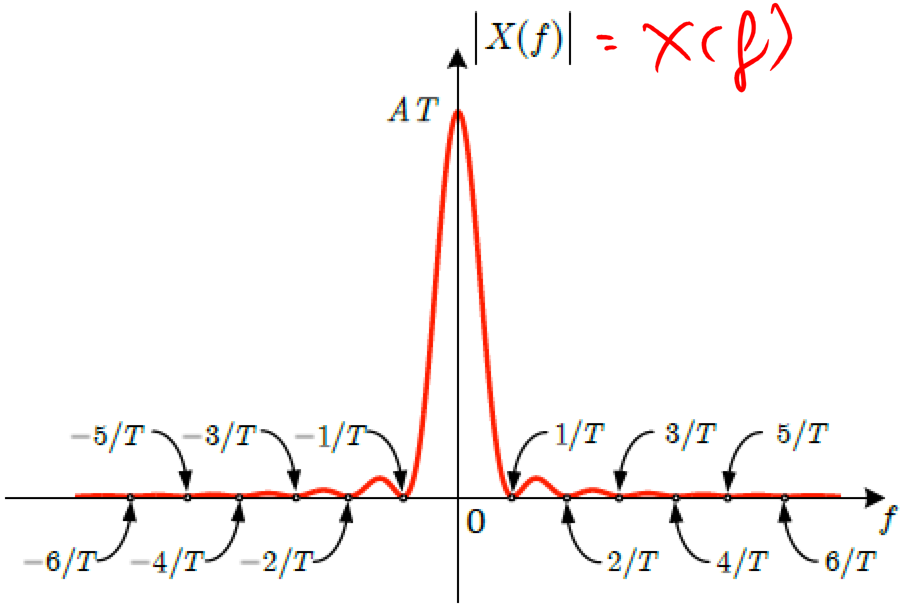


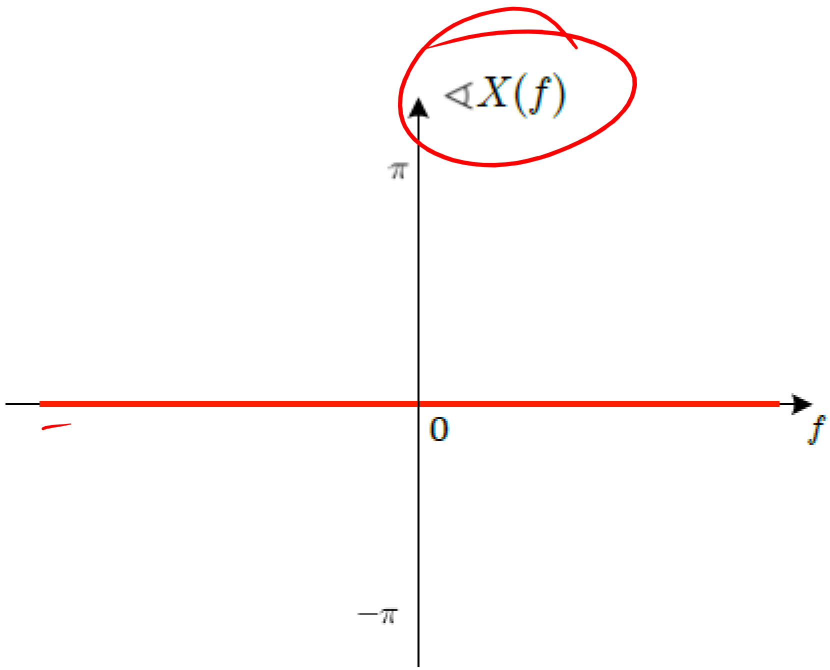
$X(f) = AT \cdot \mathrm{sinc}^2(fT) \in \mathbb{R} \geq 0$

$\tan^{-1} \frac{0}{X_R(f)} = 0 \quad \forall f \quad X_R(f) \geq 0$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:



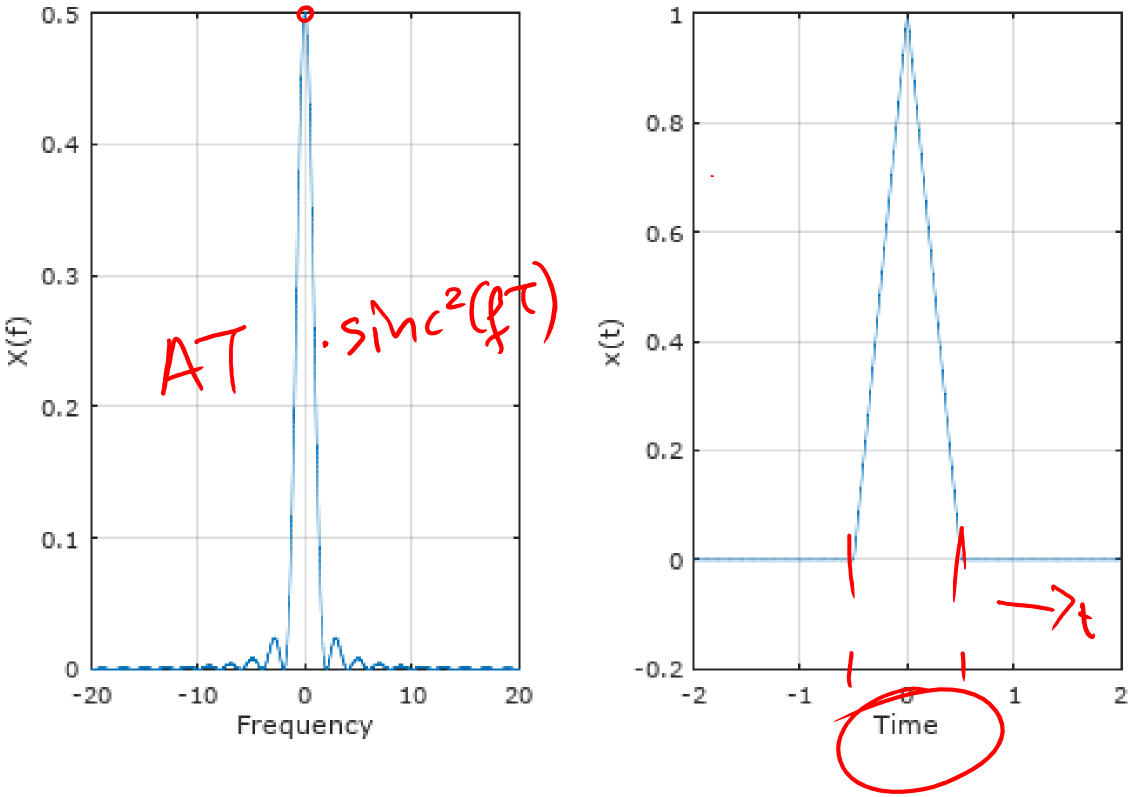


- **Μετασχηματισμός Fourier**

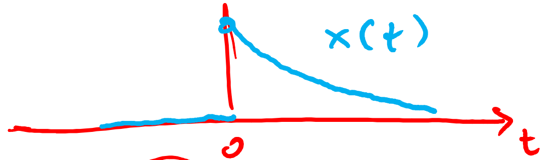
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```
% Fourier Transform
% Triangular pulse

% Time axis
dt = 0.01;
t = -2:dt:2;
% Frequency axis
df = 0.01;
f = -20:df:20;
% Parameters
A = 1;
T = 0.5;
% Fourier Transform
X = A*T*sinc(f*T).^2;
subplot(121); plot(f, X); grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('X(f)');
% Initialization
x = zeros(size(t));
% Synthesis of x(t) from X(f)
for i=1:length(f)
  x = x + X(i)*exp(j*2*pi*f(i)*t);
end
% Normalization
x = df*x;
% Plots
subplot(122); plot(t, x);
grid; xlabel('Time');
ylabel('x(t)');
```



- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \cdot e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{(a+j2\pi f)}\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}\right)}_{0} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$X(f) = X_R(f) + jX_I(f)$$

$$|X(f)| = \frac{1}{|a+j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$$

$$\angle X(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

• Μετασχηματισμός Fourier

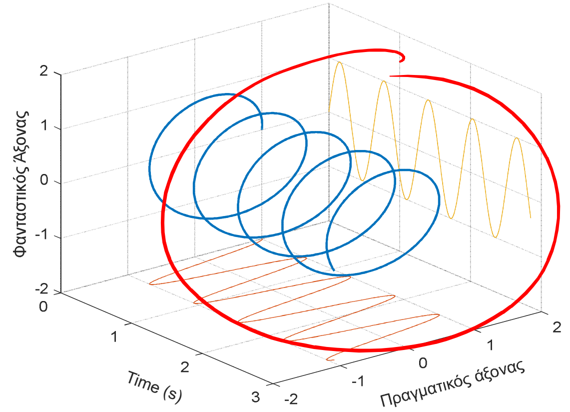
$z \cdot z^* = |z|^2$

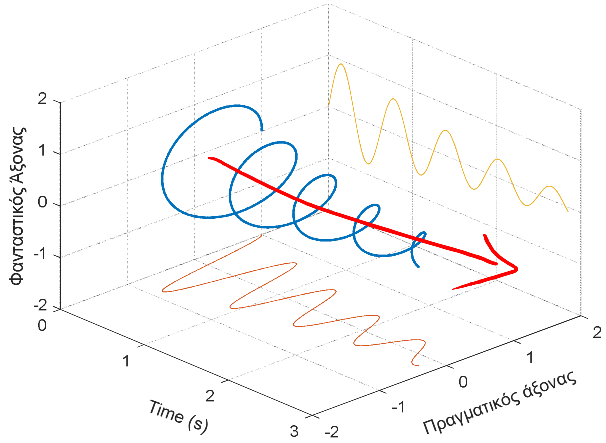
• Παράδειγμα:

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a-j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} = \underbrace{\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{X_R(f)} - j\underbrace{\frac{2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{X_I(f)}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$$

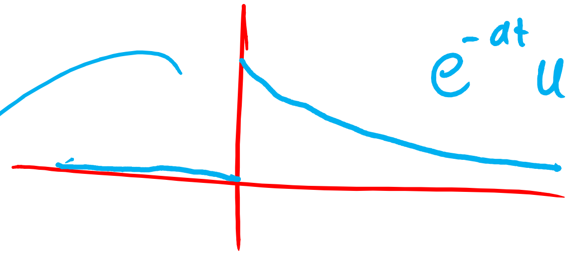
$$\measuredangle X(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\frac{-2\pi f}{a}$$





- **Μετασχηματισμός Fourier**

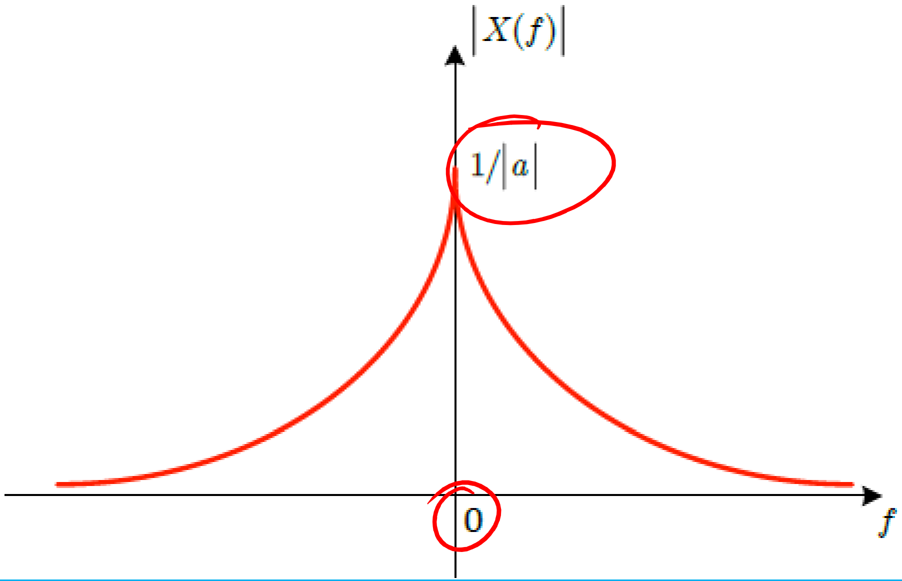
- Παράδειγμα:

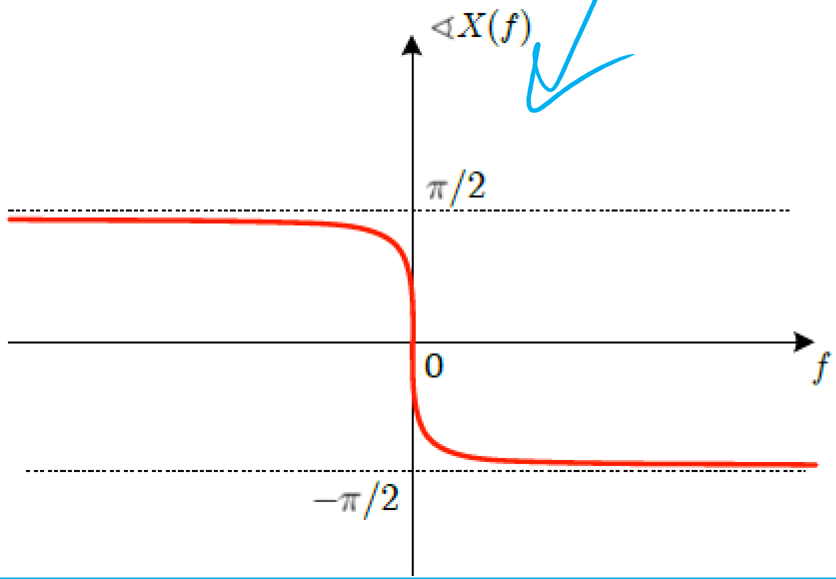


$e^{-at}u(t)$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$$

$$\sphericalangle X(f) = \tan^{-1}\frac{-2\pi f}{a}$$

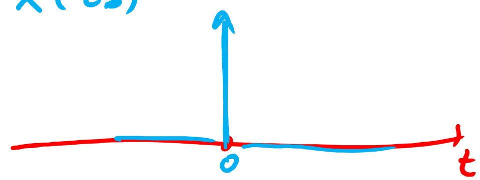




- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

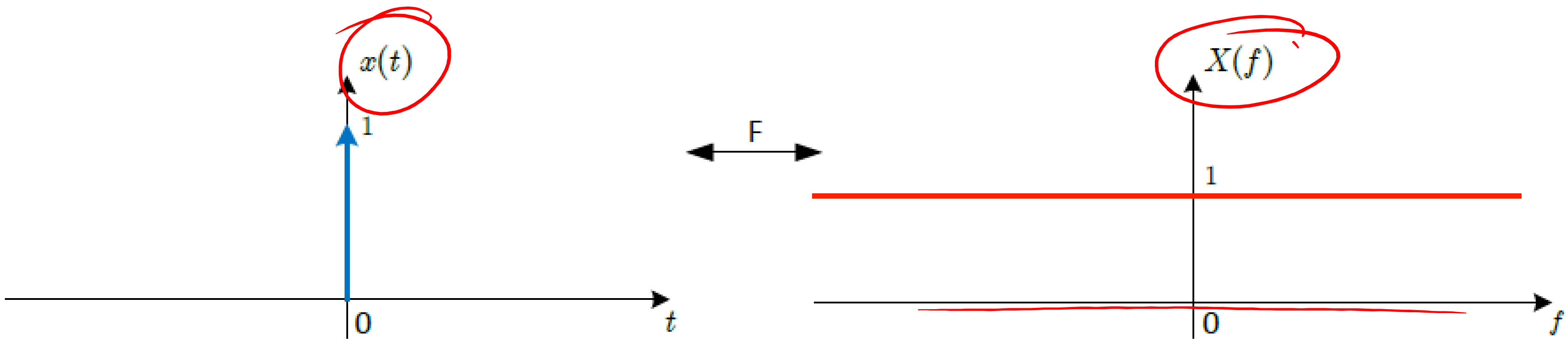
○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

$$\int x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = e^{-j2\pi f t}\Big|_{t=0} = 1 \quad \forall f$$

$$\measuredangle X(f) = 0 \quad \forall f$$



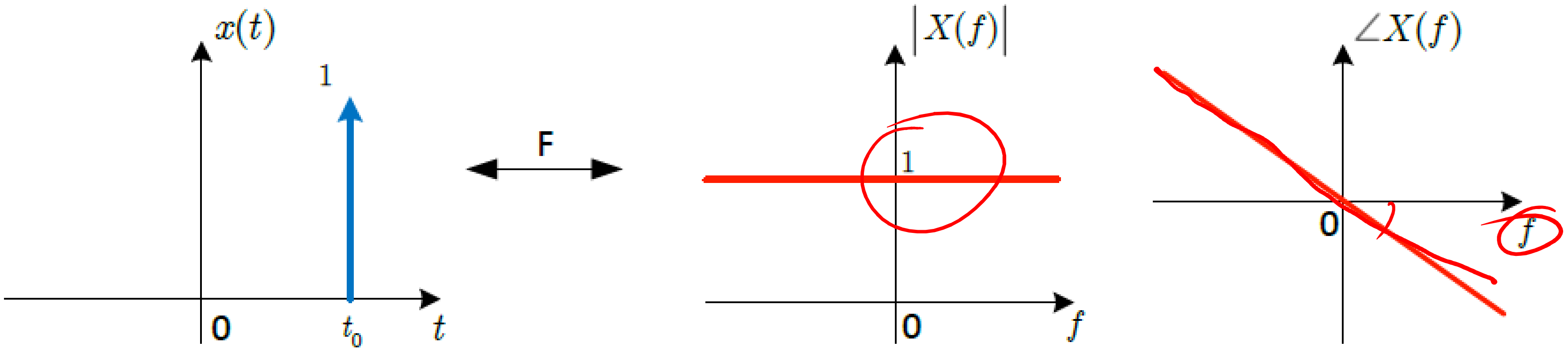
- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$

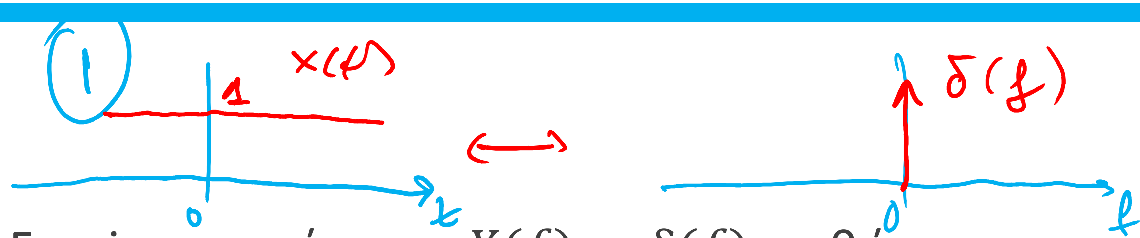
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = e^{-j2\pi f t}\Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$|X(f)| = 1 \quad \forall f$$

$$\measuredangle X(f) = -2\pi f t_0$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:



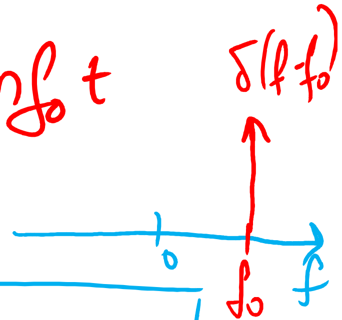
○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, καθώς και του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$

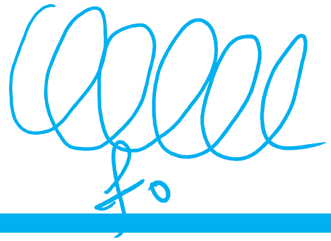
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$$

- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{+j2\pi f t} df = e^{j2\pi f t}\Big|_{f=0} = 1 \quad \forall t$

$$\boxed{x(t) = 1 \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f)}$$ 1

- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f t}\Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t}$





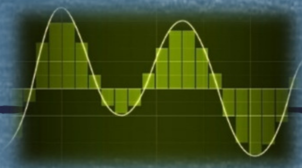
$$\boxed{x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f - f_0)}$$ 2

ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

Τι περιέχει το HY215?

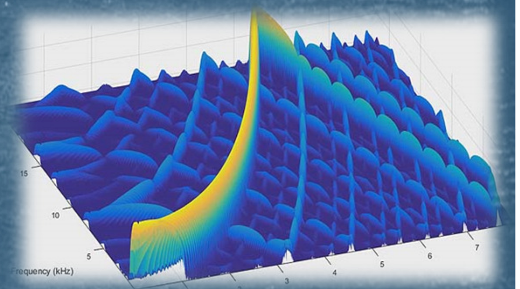


1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\| = \|X(-f)\|, \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$z(t) = Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = A\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{X(f)} + B\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{Y(f)}$$

$$\Rightarrow Z(f) = A \cdot X(f) + B \cdot Y(f)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

  - Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, $\forall t$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{+at} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \to -\infty} e^{at} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi ft}}\right) + \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \left[\lim_{t \to \infty} e^{-at} \cdot e^{j2\pi ft} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \in \mathbb{R} \quad > 0$$

$$\measuredangle X(f) = 0$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

Απόδειξη:

$$Z(f) = F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+t_0)} du =$$

$u = t - t_0 \Rightarrow t = u + t_0$

$du = dt$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du}_{X(f)} = e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$$

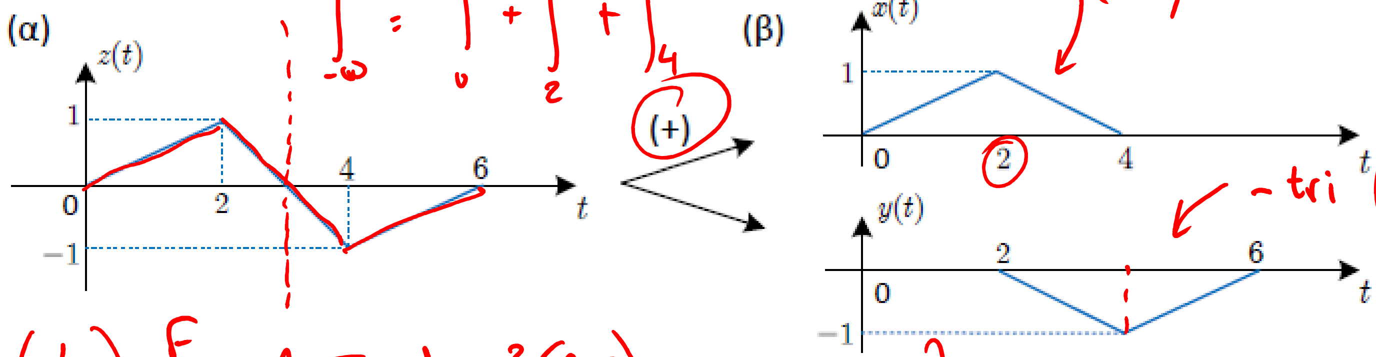
$$|Z(f)| = |e^{-j2\pi f t_0} X(f)| = \underbrace{|e^{-j2\pi f t_0}|}_{\to 1} \cdot |X(f)| = |X(f)|$$

$$\sphericalangle Z(f) = \sphericalangle X(f) + (-2\pi f t_0)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{0}^{2} + \int_{2}^{4} + \int_{4}^{6}$$

$\mathrm{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right)$ $\qquad T=2$



$-\mathrm{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right)$

$$\sin(2\pi f) = \frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{2j}$$

$$\left\{ A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} A\cdot T\,\mathrm{sinc}^2(fT) \right.$$

$$\left. A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \xleftrightarrow{F} A\cdot T\cdot \mathrm{sinc}^2(fT)\cdot e^{-j2\pi f t_0} \right\}$$

$$F\{z(t)\} = F\{x(t)\} + F\{y(t)\} = \underbrace{2\cdot\mathrm{sinc}^2(2f)\cdot e^{-j2\pi f\cdot 2}}_{F\{x(t)\}} - \underbrace{2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\,e^{-j2\pi 4f}}_{F\{y(t)\}} = 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\cdot e^{-j2\pi f\cdot 3}\left(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\cdot 2j\cdot\sin(2\pi f)\cdot e^{-j2\pi f\cdot 3} = 4\,\underset{\uparrow\, j}{e^{j\pi/2}}\cdot\mathrm{sinc}^2(2f)\cdot\sin(2\pi f)\,e^{-j2\pi f 3} =$$

$$= 4\,\mathrm{sinc}^2(2f)\,\sin(2\pi f)\cdot e^{j(\pi/2 - 2\pi f 3)}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$

Απόδειξη:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$F\{x(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi \boxed{(f-f_0)} t}\,dt = X(f-f_0)$$

μετατ. στο χώρο της συχνότητας