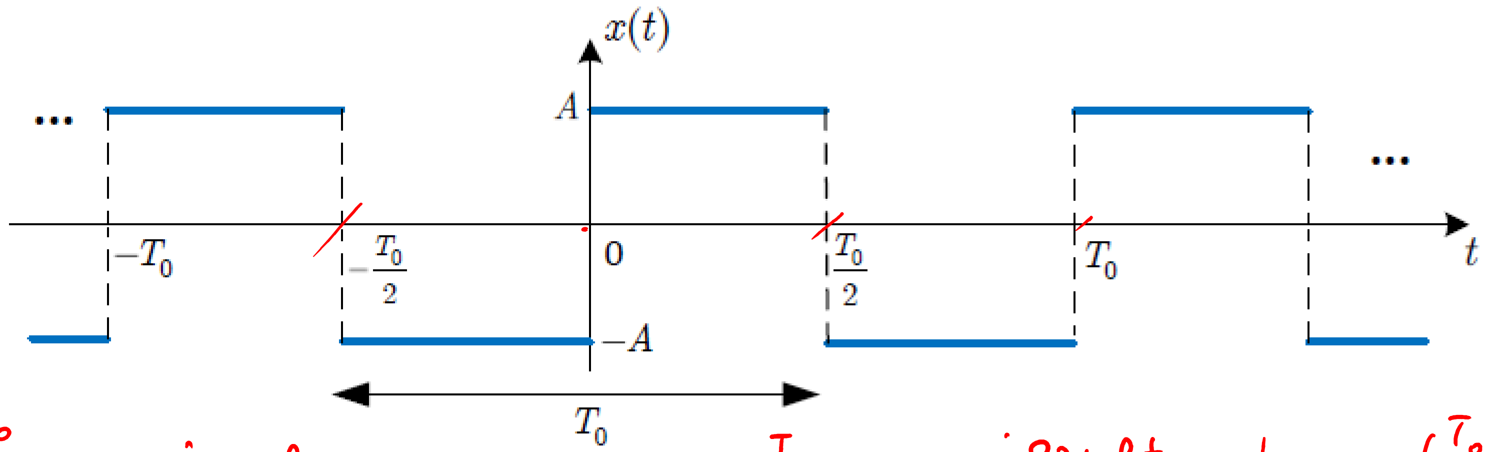
- **Παράδειγμα:**
  - Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$



$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$ | $X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = 0$

- Παράδειγμα: $x(t) = \begin{cases} A & 0 \le t < T_0/2 \\ A & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$

$$\boxed{e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1}$$

$$\boxed{f_0 T_0 = 1} \qquad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt =$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{T_0/2}^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k \cancel{f_0 \cdot T_0}}\left(e^{-j\cancel{2}\pi k \cancel{f_0 \cdot T_0}/\cancel{2}} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k \cancel{f_0 \cdot T_0}}\left(e^{-j2\pi k \cancel{f_0 T_0}} - e^{-j\cancel{2}\pi k \cancel{f_0 T_0}/\cancel{2}}\right) =$$

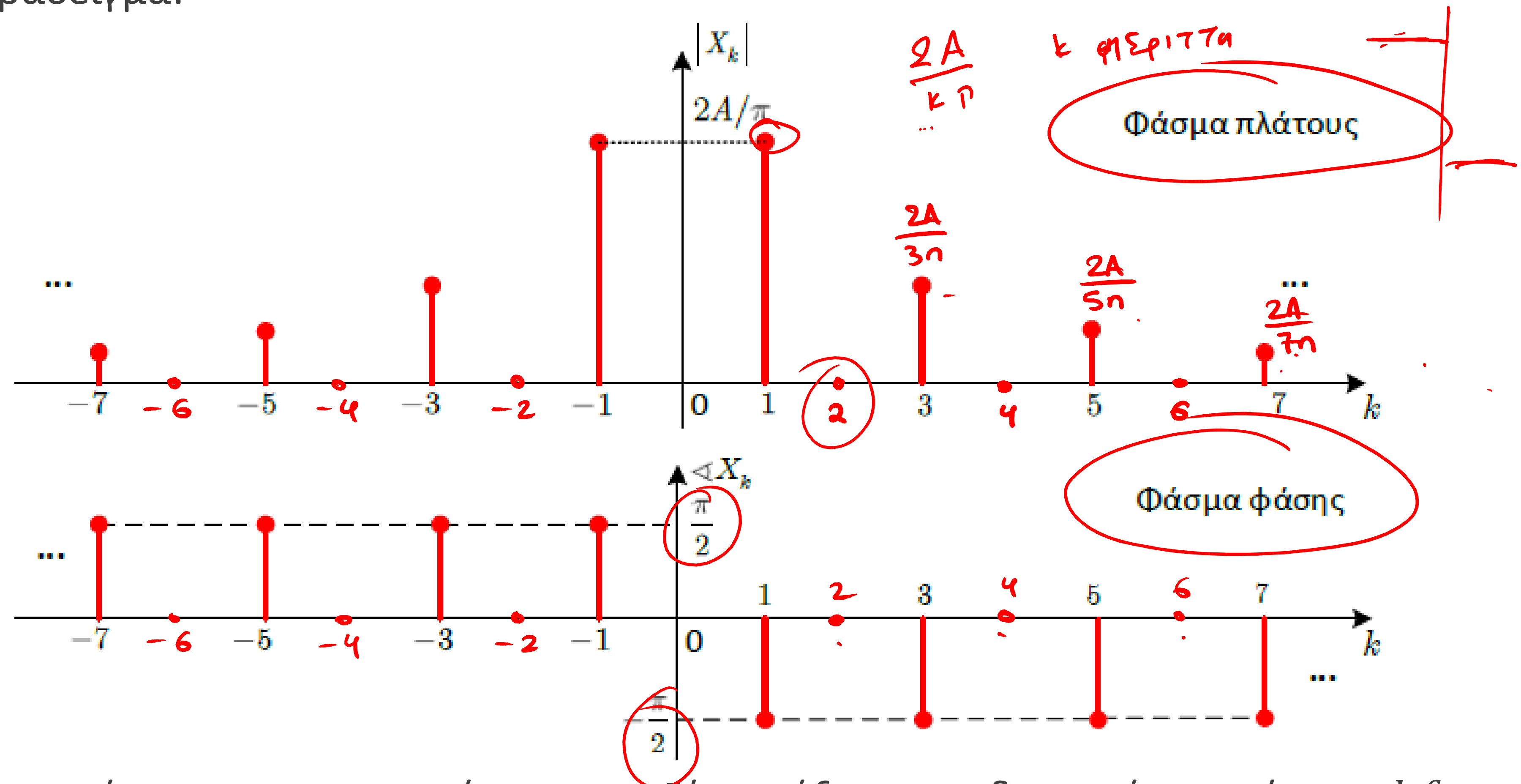
$$= \frac{A}{-j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right) = \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k} + 1 - e^{-j\pi k}\right) =$$

$$= \frac{A}{j\pi k}\left(1 - \left(e^{-j\pi}\right)^k\right) = \frac{A}{j\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{2A}{j\pi k}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \qquad \begin{matrix} e^{-j\pi} = -1 \\ e^{j\pi} = -1 \end{matrix}$$

$$X_0 = 0$$

$$X_k = \frac{2A \cdot j}{j\pi k \cdot j} = \frac{2A}{\pi k}(-j) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi|k|} e^{-j\pi/2} & k > 0 \\ \frac{2A}{\pi k}(-1)\cdot e^{-j\pi/2} & k < 0 \quad = \frac{2A}{\pi|k|} e^{j\pi/2} \quad k < 0 \end{cases}$$

- Παράδειγμα:



- Προτιμούμε να αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες kf_0» αντί ως ένα συνεχή άξονα του f, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
  - Χρησιμοποιούμε το πολλαπλάσιο k της θεμελιώδους συχνότητας για βαθμονόμηση του άξονα

- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

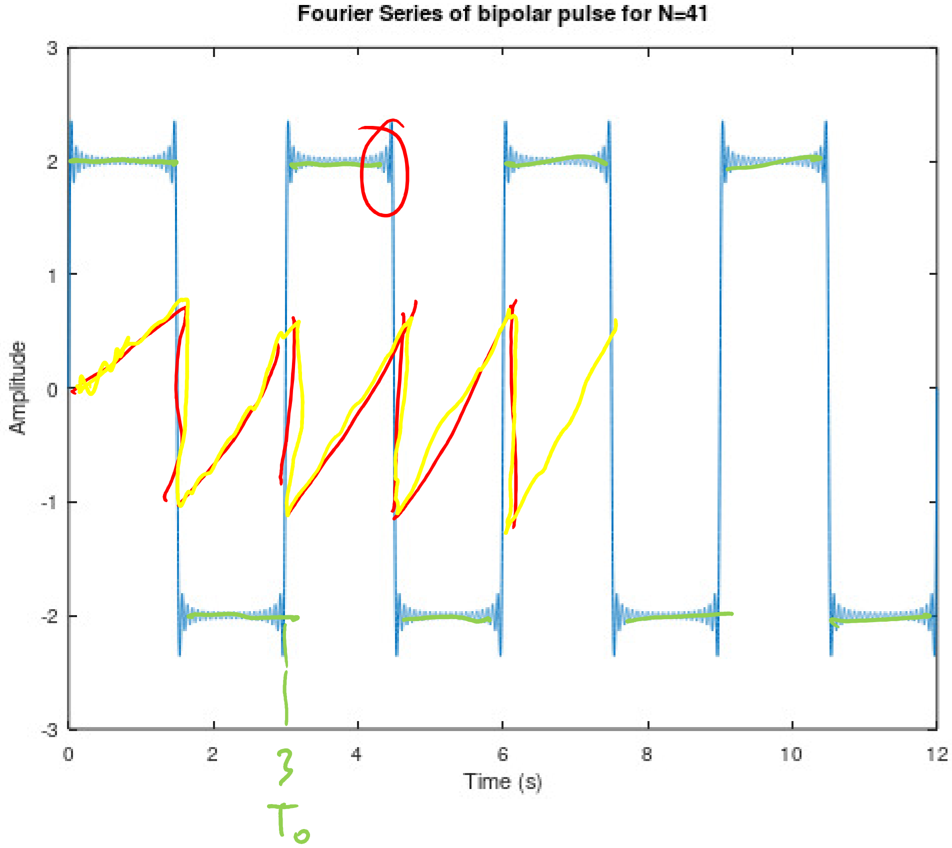
- **Σειρές Fourier**

- **MATLAB/Octave code**

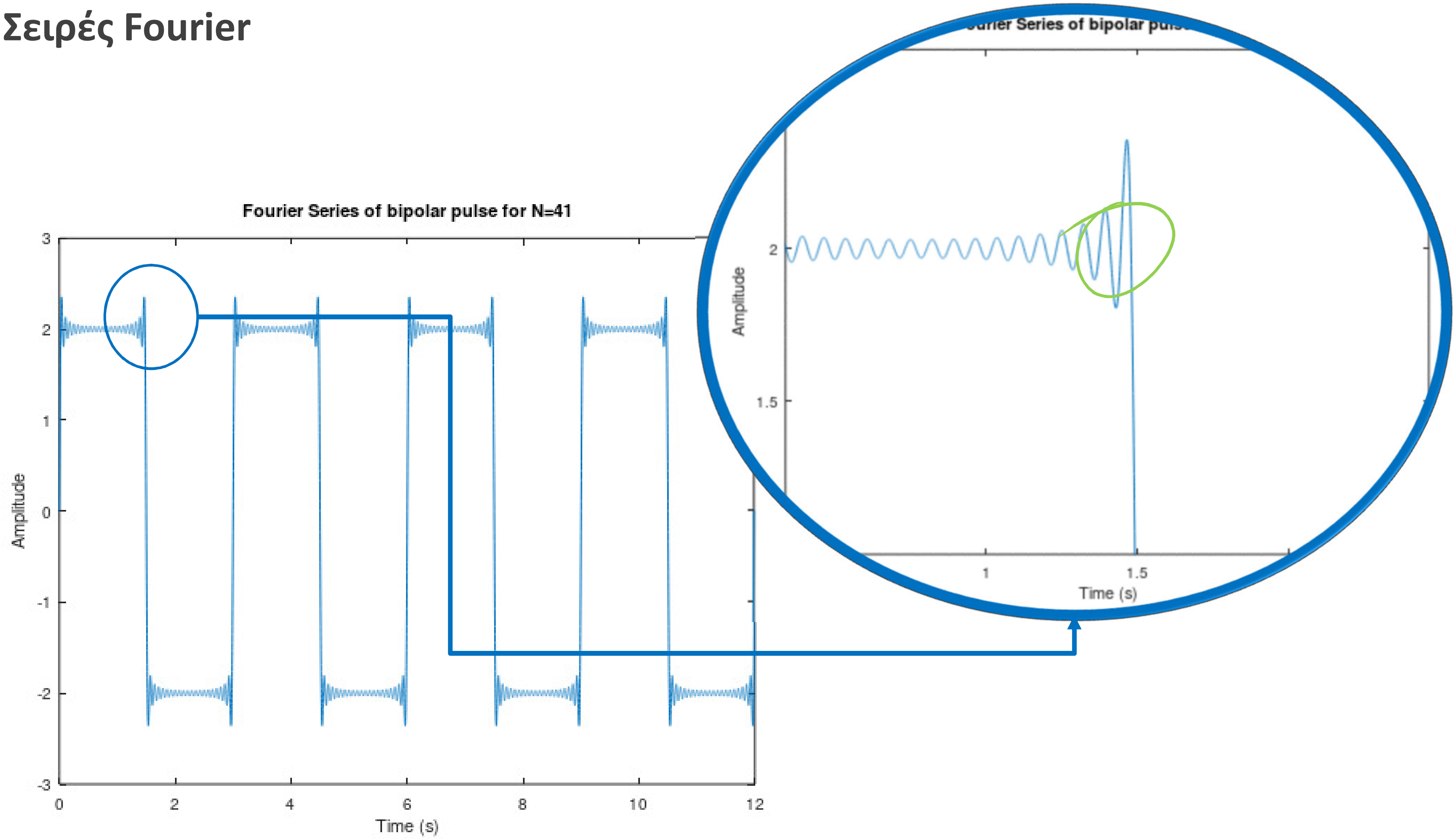
$$\sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$

82 X_k

```
% Bipolar pulse - Fourier Series
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 41;
k = [-N:2:-1, 1:2:N];

% Time axis
dt = 0.001;
t = 0:dt:4*T0;

% Fourier Coefficients
Xk = 2*A./(pi*k).*exp(-j*pi/2);
X0 = 0;

% Synthesis equation
x = zeros(size(t));
for i=1:length(k)
  x = x + Xk(i)*exp(j*2*pi*k(i)*f0*t);
end

% Add X0 - not necessary here
x = x + X0;

% Plot
plot(t, real(x));
title('Fourier Series of bipolar pulse for N=41');
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```

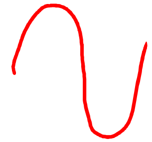


- **Σειρές Fourier**



- **Φαινόμενο Gibbs**

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**



- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο…
  - …εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας t_0:

$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

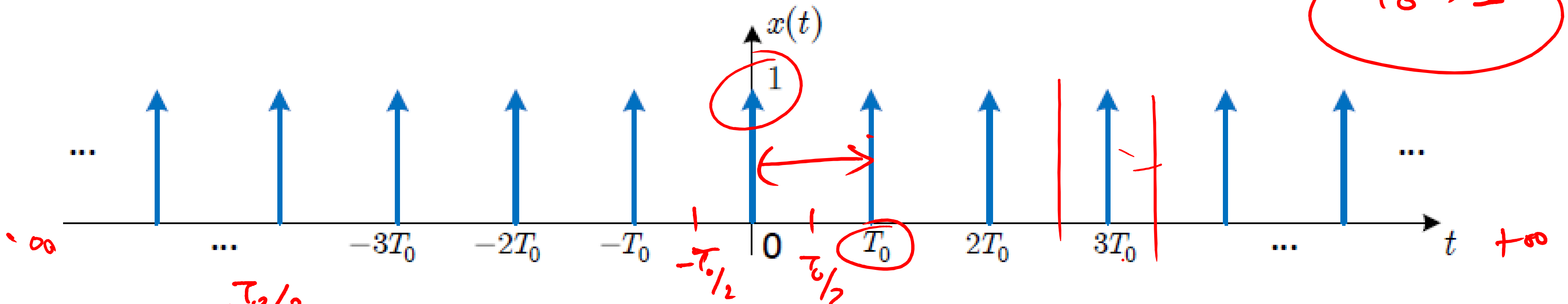
- **Παράδειγμα:**
  - Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

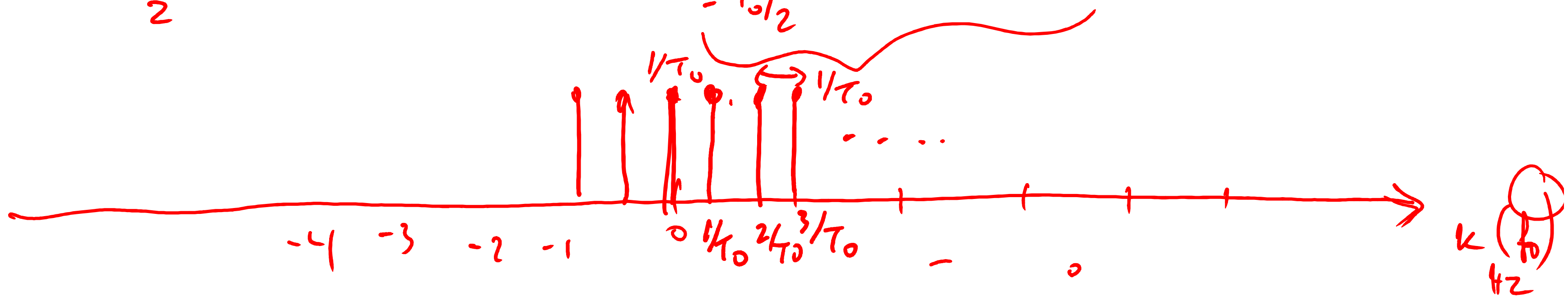
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_k X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

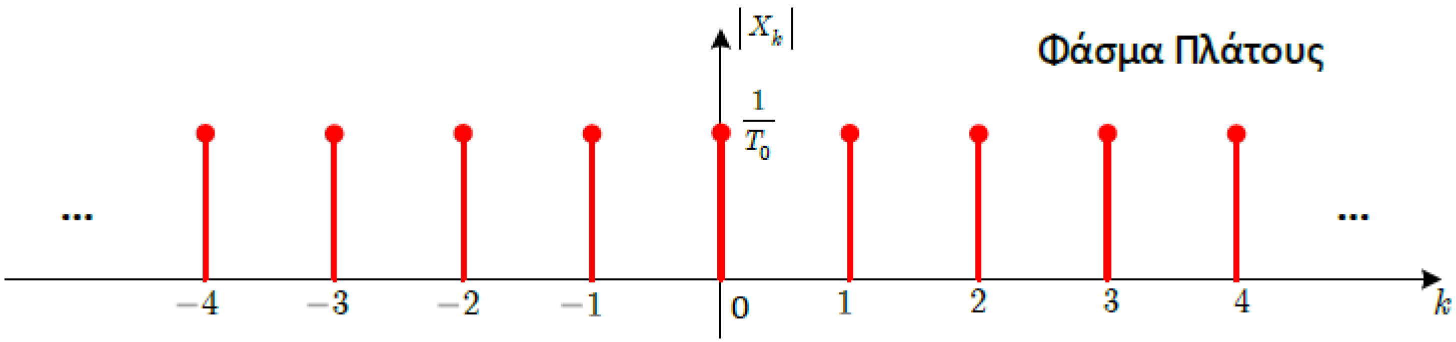
$T_0 > 1$



$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \quad \forall k$$



- Παράδειγμα:

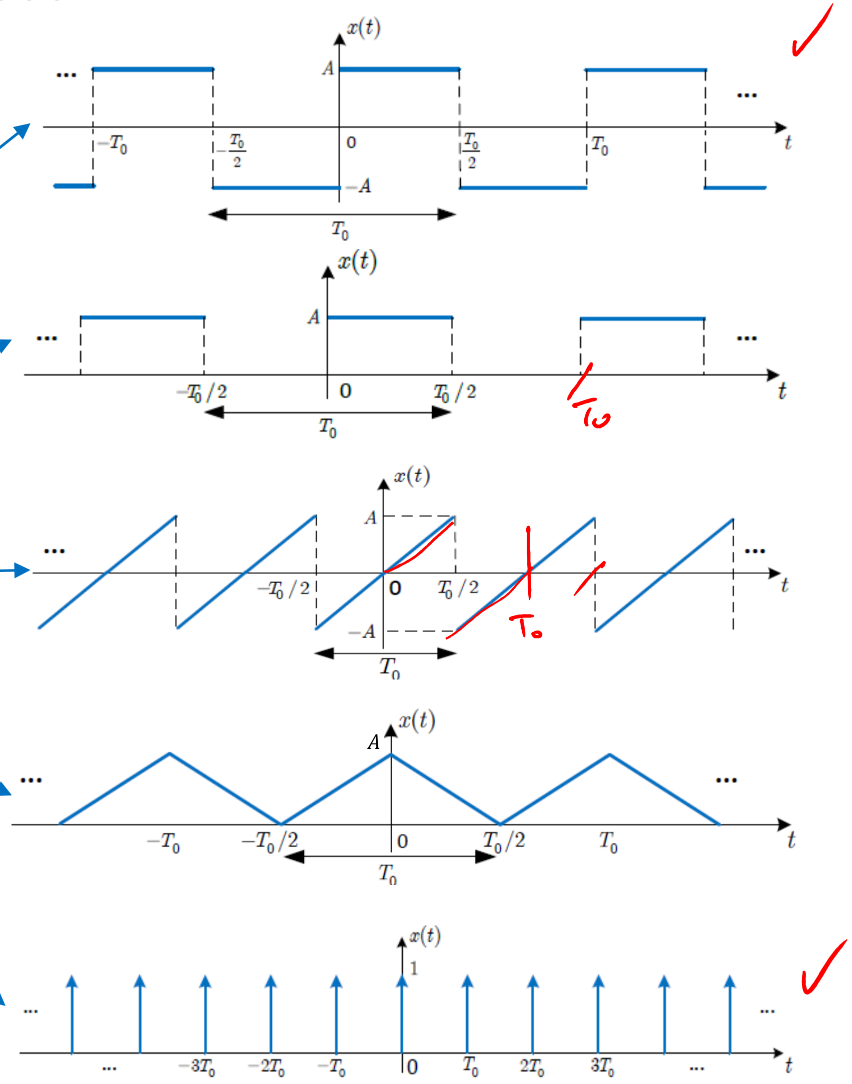


- **«Γνωστές» Σειρές Fourier**

- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

Περιοδικό σήμα
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$



- **Ιδιότητες**

$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \rightsquigarrow j\Im\{X_k\}$

$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \rightarrow \Re\{X_k\}$

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	$\rightarrow X_k$ $\rightarrow Y_k$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\boxed{\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

$\in$ ——— ← πληρότητας μοναδικότητας

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

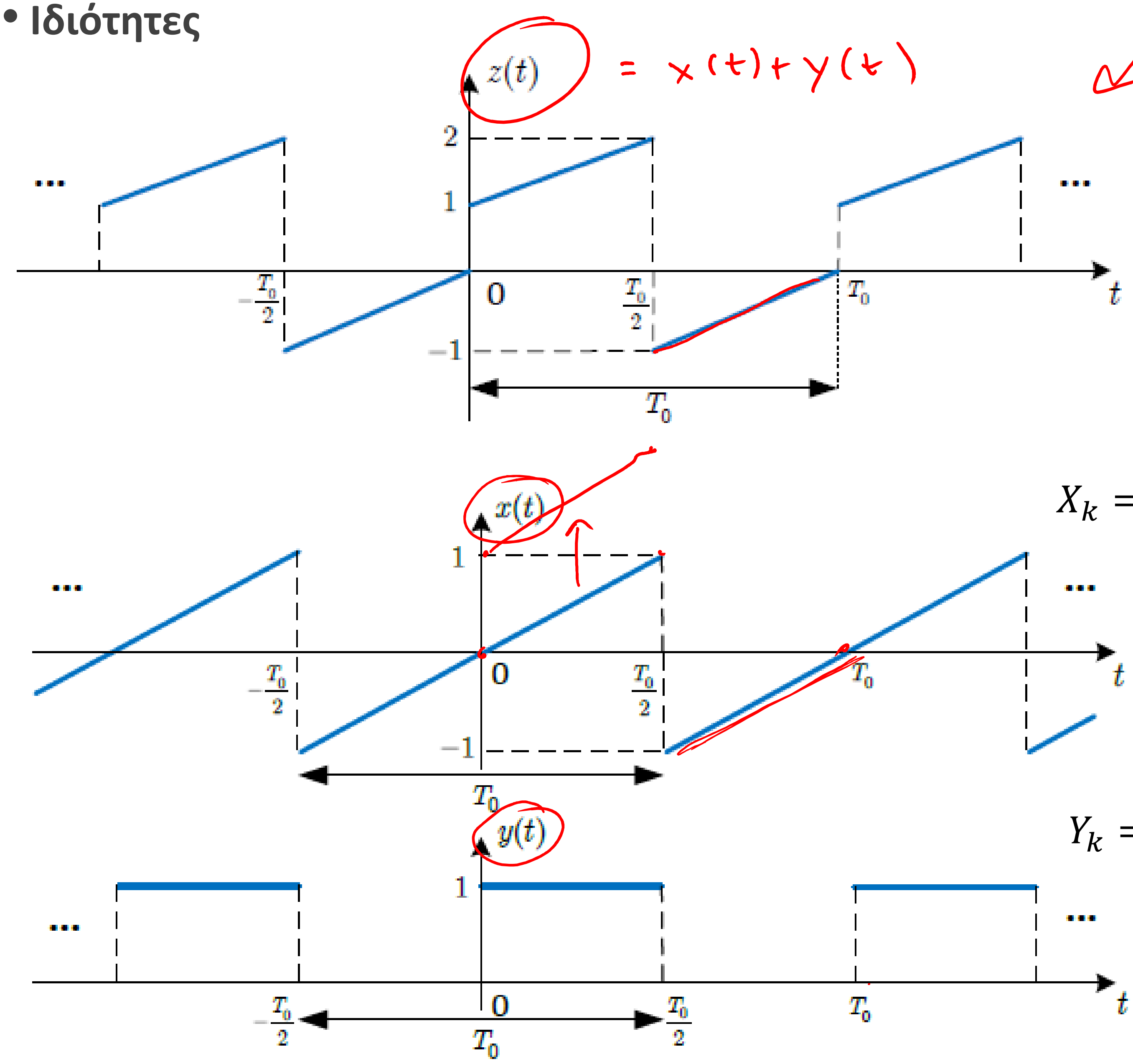
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) = \sum_k Z_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} [Ax(t) + By(t)] \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt =$$

$$= A \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt}_{X_k} + B \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}_{Y_k} = A \cdot X_k + B \cdot Y_k$$

- **Ιδιότητες**



$$z_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} z(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$Z_k = ?$$

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$

$X_0 + Y_0 =$ Z_0

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k}(1 - (-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Linearity property
clear;
% Parameters
T0 = 2;
f0 = 1/T0;
N = 20;
k = [-N:-1 1:N];

% Ground truth signal
dt = 0.01;
t1 = 0:dt:T0/2;
t2 = T0/2+dt:dt:T0-dt;
z1 = 1+t1;
z2 = -2+t2;
z = [z1 z2 z1 z2];
t = 0:dt:2*T0-dt;

% Plot original signal
figure; plot(t, z, "LineWidth", 4);
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```

```
% x(t)
Xk = 1./(pi.*k).*(-1).^k.*exp(j*pi/2);
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);
```

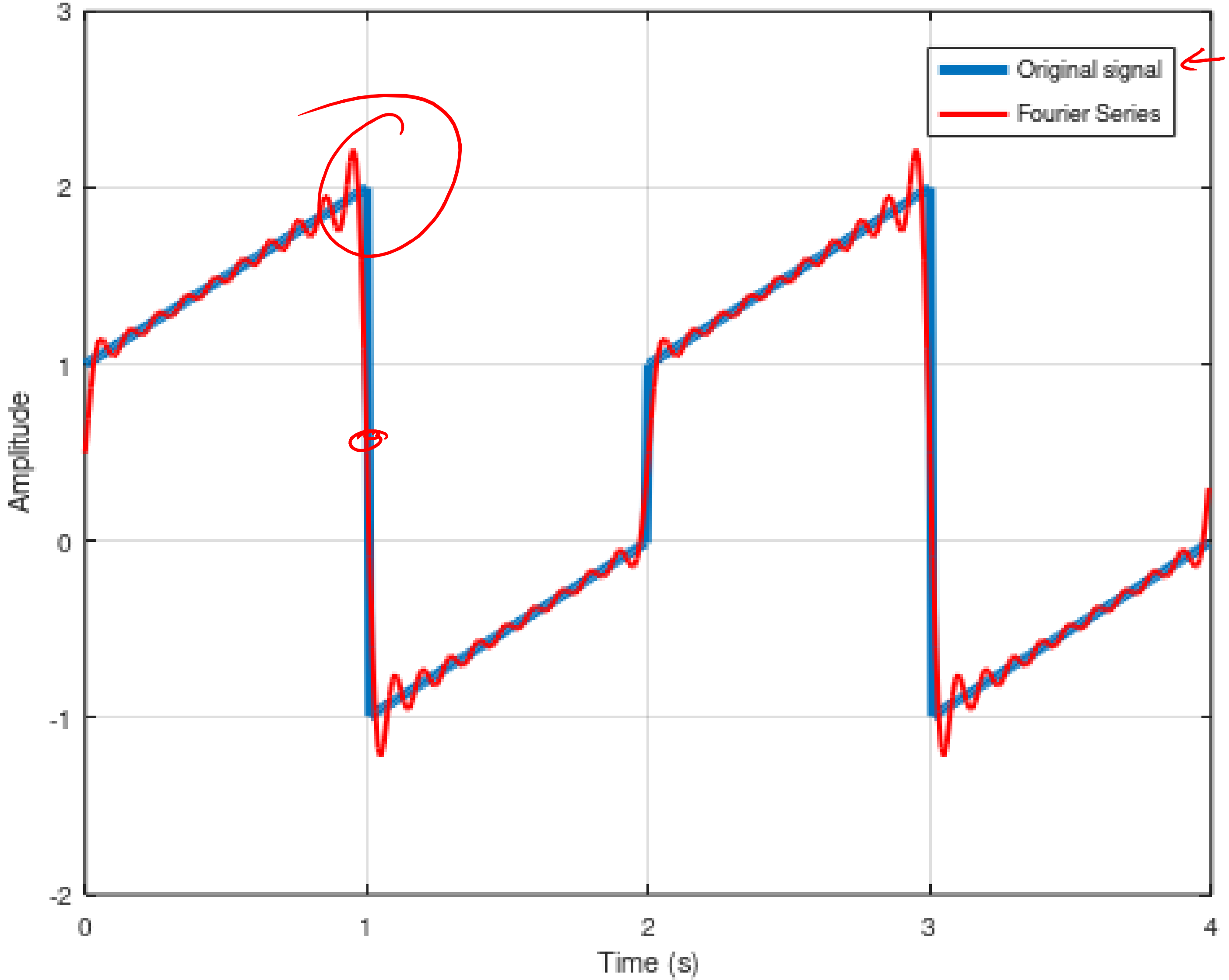
← ανακατασκευή του x(t)

```
% y(t)
Yk = 1./(2*pi.*k).*(1-(-1).^k).*exp(-j*pi/2);
y = Yk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);
```

← ανακ. του y(t)

```
% x(t) + y(t)
z_FS = x + y;
Z0 = 1/2;
z_FS = Z0 + z_FS;

% Plot on top
hold on; plot(t, z_FS, 'r', "LineWidth", 2); grid;
legend('Original signal', 'Fourier Series');
```

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**



- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$ Y_k
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t-t_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u) \cdot e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)} du =$$

$u = t - t_0 \Rightarrow t = u + t_0$

$du = dt$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u) \cdot e^{-j2\pi k f_0 u} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t_0}} du =$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u) \cdot e^{-j2\pi k f_0 u} du}_{X_k} = X_k \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t_0}}$$

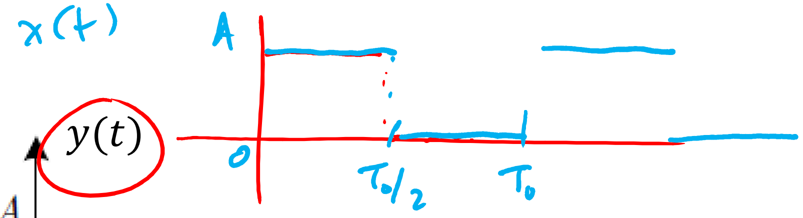
$$= |X_k| \cdot e^{j\varphi_k} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t_0}$$

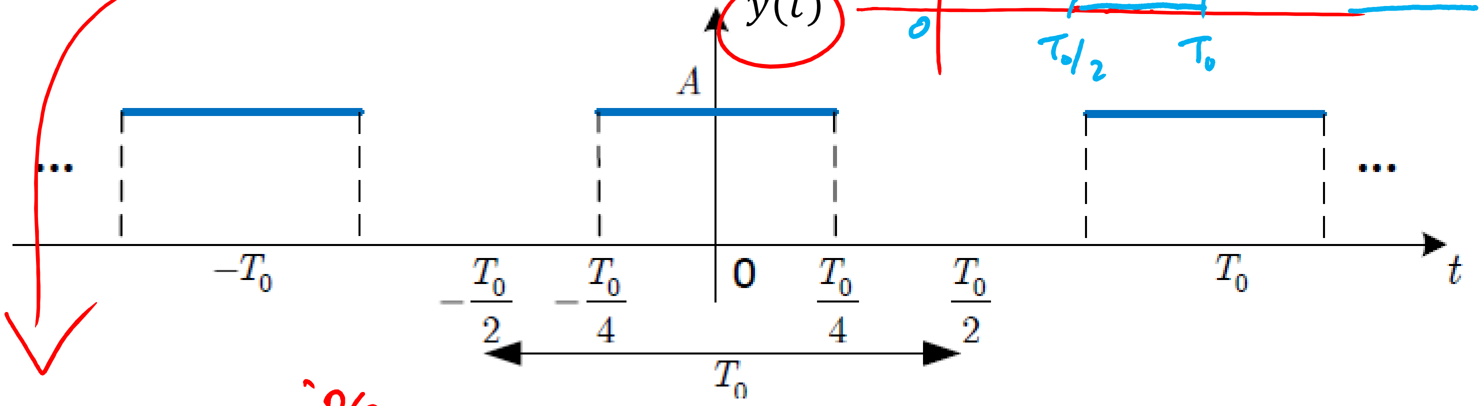
$$= |X_k| \cdot e^{j(\varphi_k - 2\pi k f_0 t_0)}$$

$$|Z_k| = |X_k|$$

$$\measuredangle Z_k = \measuredangle X_k + (-2\pi k f_0 t_0)$$

- **Ιδιότητες**





$T_0 = \frac{1}{f_0}$

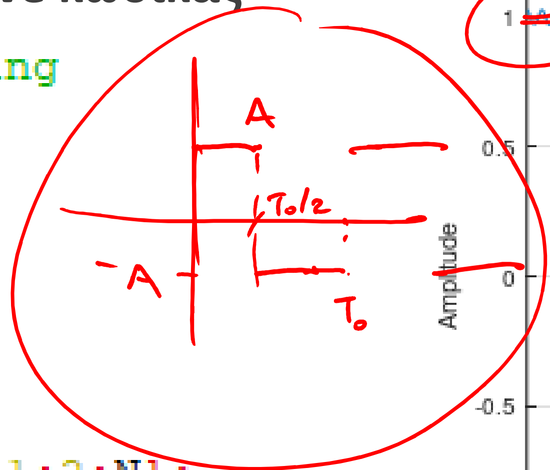
$X_k = \frac{1}{\pi k} \cdot e^{-j\pi/2}$, k περιττά

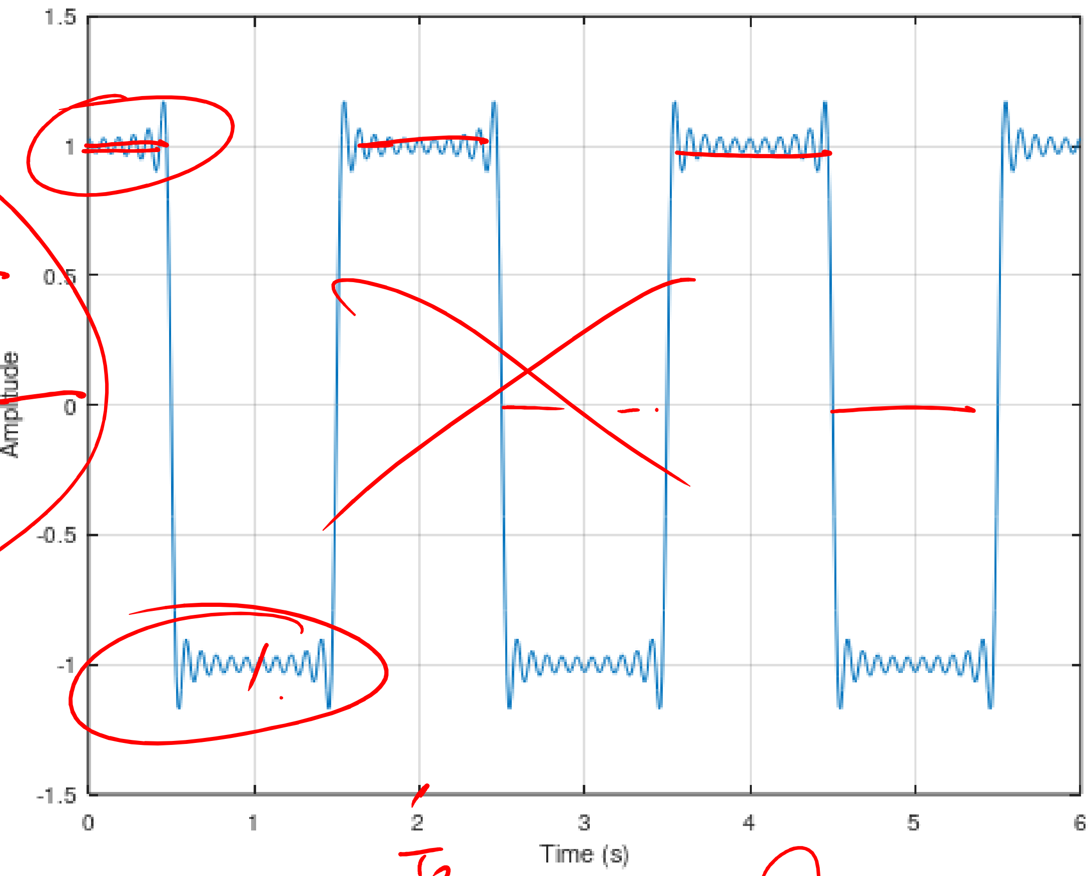
$$Y_k = X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 \cdot (-T_0/4)} = X_k \cdot e^{+j\cancel{2}\pi k \overbrace{f_0 T_0}^{1} / \cancel{4}2} = X_k \cdot e^{j\frac{\pi}{2}k} \Bigg\} \Rightarrow$$

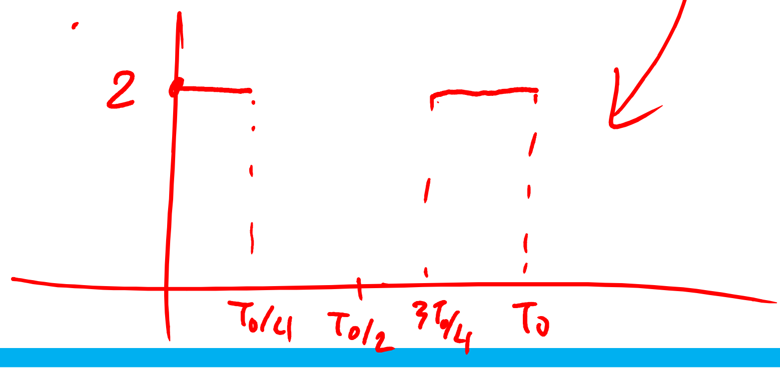
$$\Rightarrow Y_k = \frac{1}{\pi k} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(k-1)}$$ ✓ k περιττά

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Time shifting
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 2;
f0 = 1/T0;
N = 21;
k = [-N:2:-1 1:2:N];
dt = 0.01;
t = 0:dt:3*T0;

% Synthesis
Xk = A./(pi.*k).*exp(j*(pi/2*(k-1)));
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% Plot
figure; plot(t, x); grid;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
```



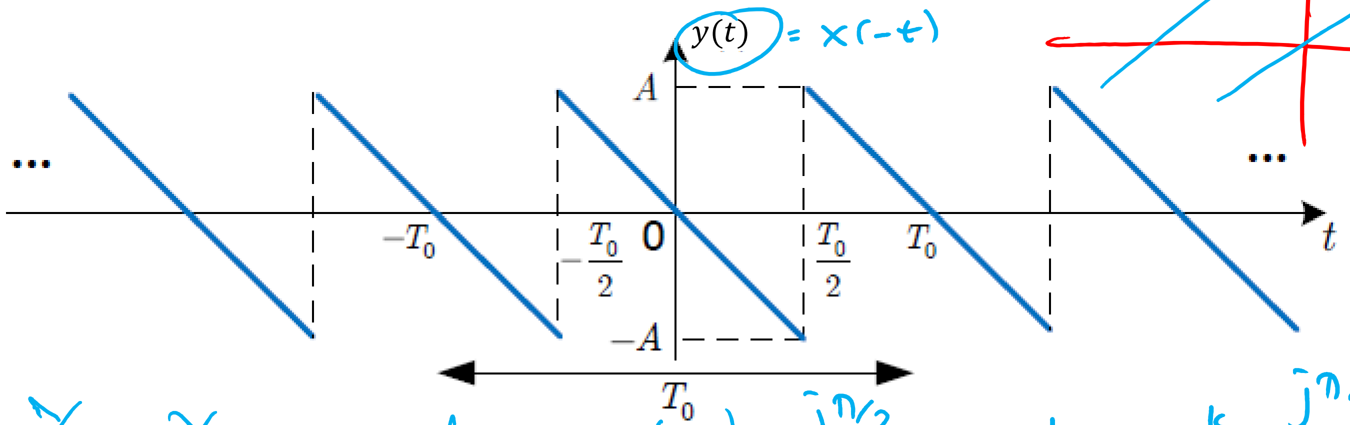


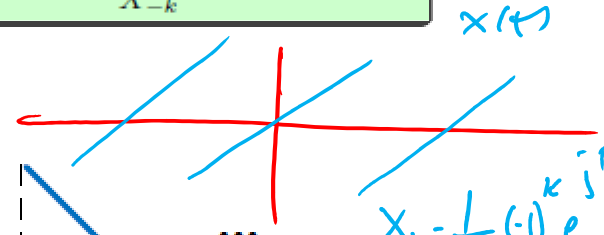


• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}





$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2}$$

$$Y_k = X_{-k} = \frac{1}{\pi(-k)}(-1)^{(-k)} \cdot e^{j\pi/2} = -\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} = e^{-j\pi}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2}$$

$$= \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{-j\pi/2}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

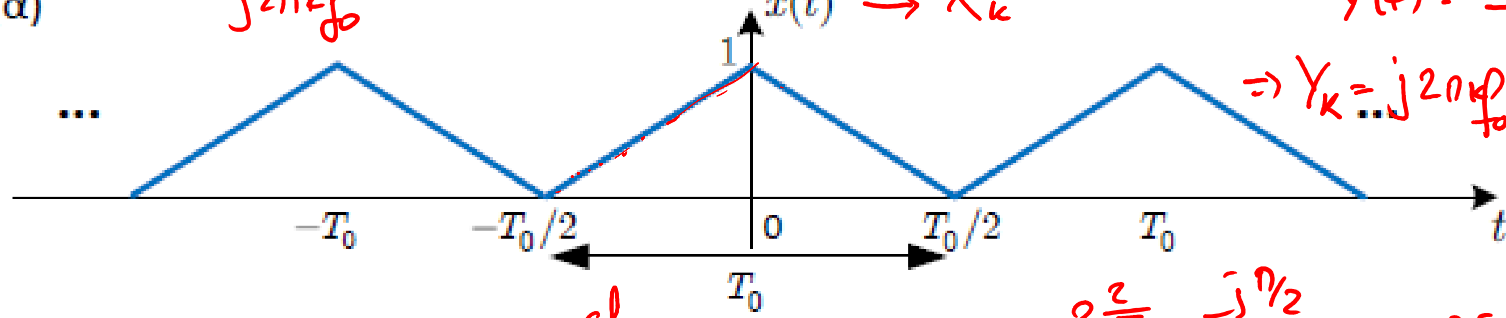
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$

(α) $\Rightarrow X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} \cdot Y_k$

$x(t) \rightarrow X_k$?

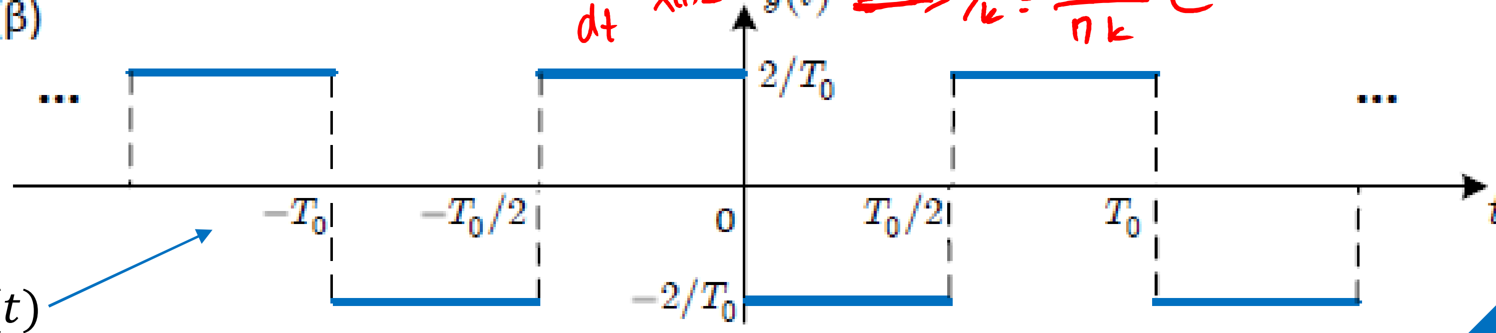
$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_k = j2\pi k f_0 X_k \Rightarrow$



$\frac{d}{dt}x(t) = y(t) \rightarrow Y_k = \frac{2\frac{2}{T_0}}{\pi k} e^{-j\pi/2}$ k περιττά.

(β)



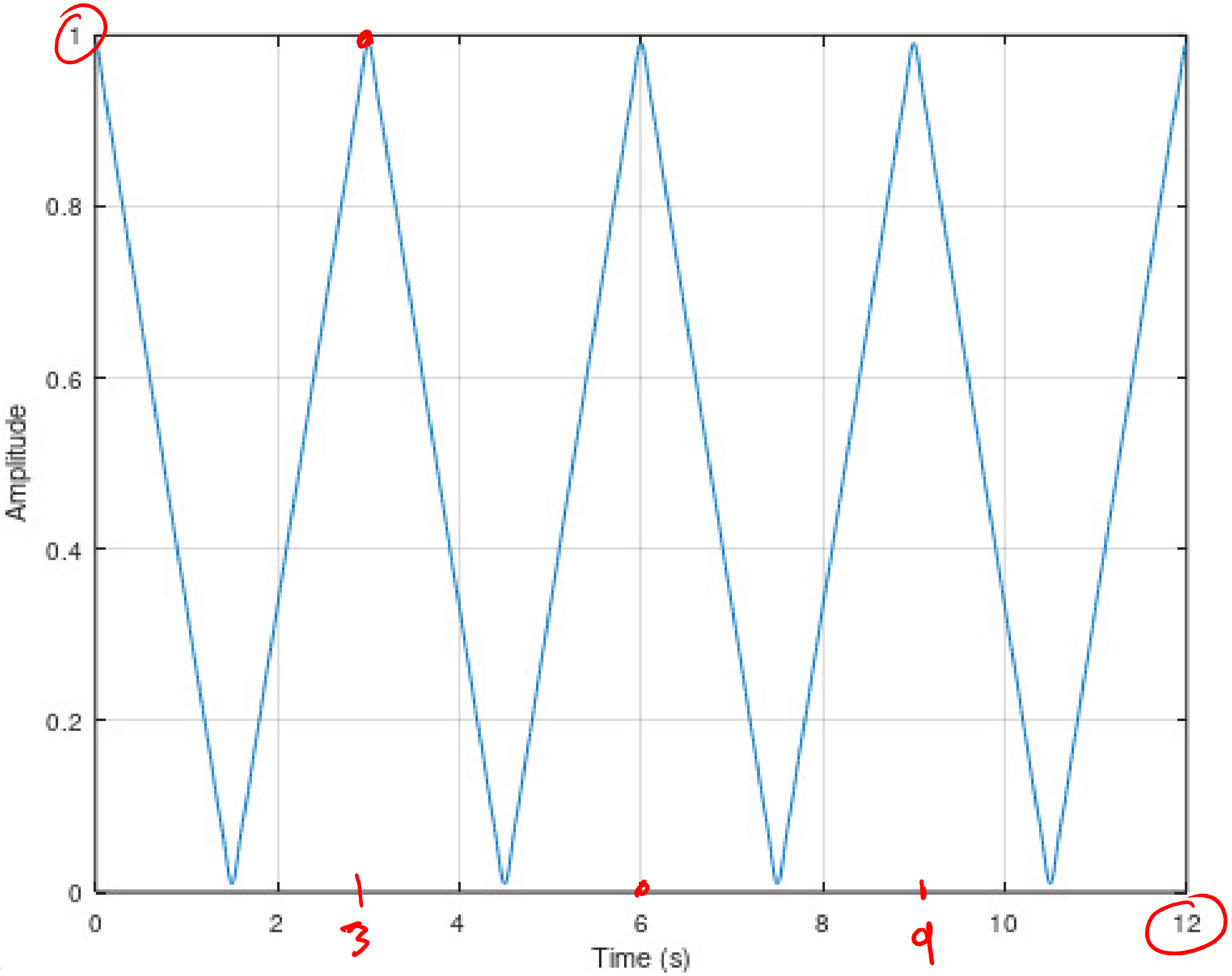
$\frac{d}{dt}x(t)$

- **Ιδιότητες**

- **MATLAB/Octave κώδικας**

$\int \rightarrow \Sigma$

```
% Derivative - Integration property
clear;
% Parameters
A = 1;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 21;
k = [-N:2:-1 1:2:N];
dt = 0.01;
t = 0:dt:4*T0;

% Synthesis
Xk = 2./(pi.^2.*k.^2);
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% X0
X0 = 1/2;
x = X0 + x;

% Plot
figure; plot(t, x); grid;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
```



- **Ιδιότητες**

$x(t) = \sum_k X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}$ $x^*(t) = \sum_k X_k^* e^{+j2\pi k f_0 t}$

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \|x(t)\|^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|X_k\|^2$

$z \cdot z^* = |z|^2$

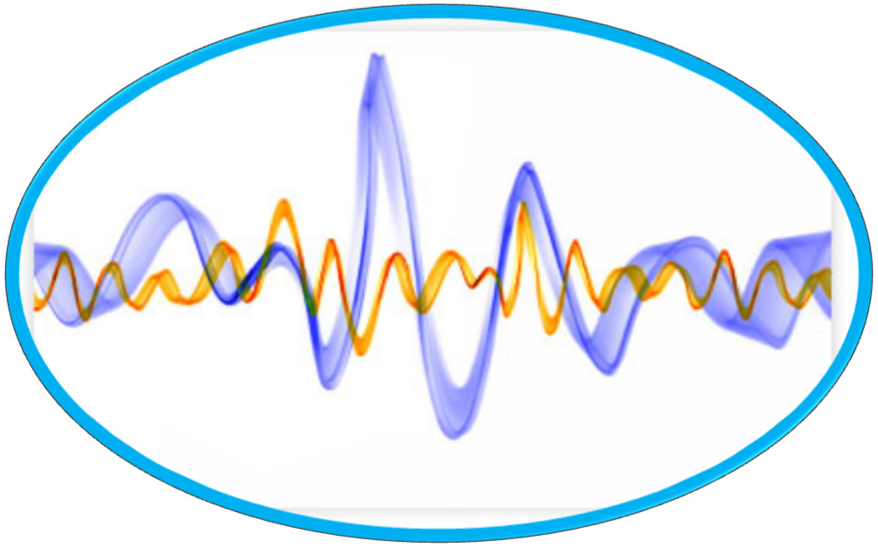
for k=1 .. 100
for l=1...100
x_l

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot x^*(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \sum_k X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} \sum_l X_l^* \cdot e^{j2\pi l f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_k \sum_l X_k \cdot X_l^* \underbrace{\int_{T_0} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} dt}_{\begin{cases} 0, & l \neq k \\ T_0, & l = k \end{cases}} = \sum_k X_k \cdot X_k^* = \sum_k |X_k|^2$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

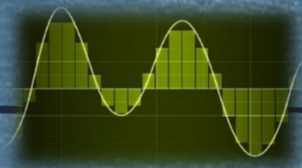


HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ $7^{Η}$

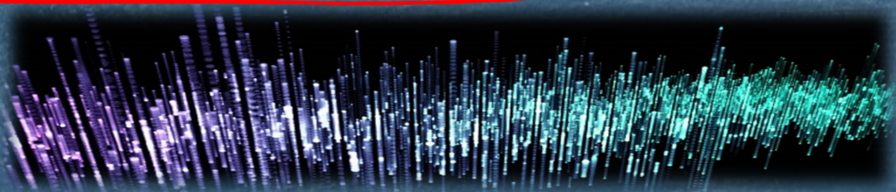
- Μετασχηματισμός Fourier

Τι περιέχει το ΗΥ215?



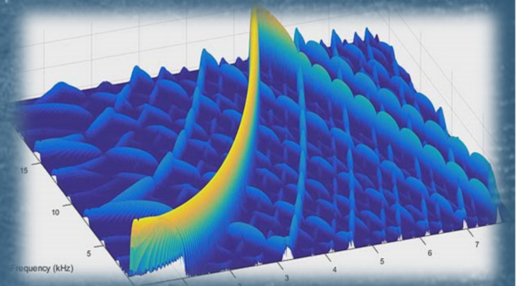
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



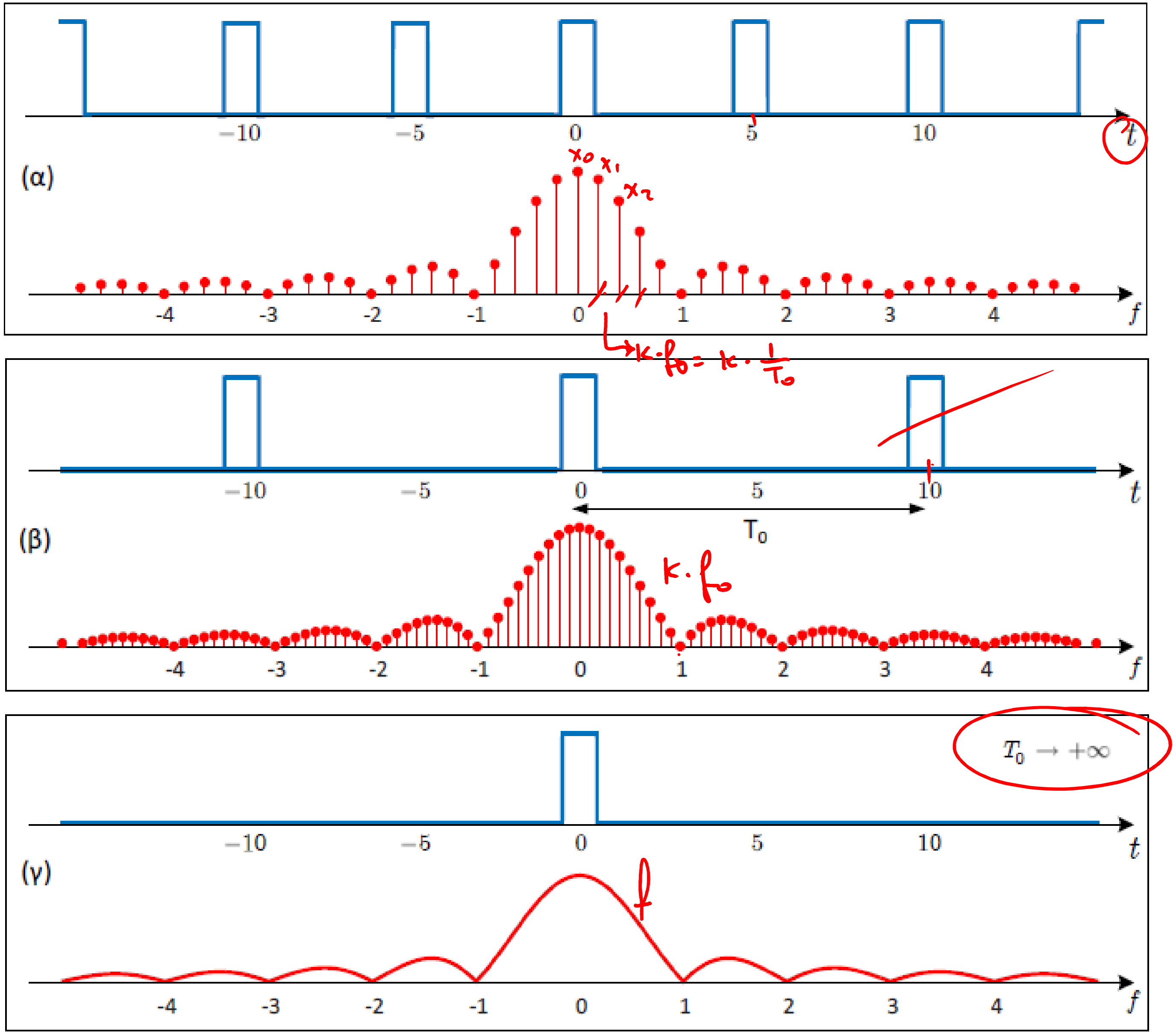
- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Ένα περιοδικό ~~πραγματικό~~ σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \rightarrow +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

- **Προς το μετασχ. Fourier…**



- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Τυπικά:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt\right)}^{X_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

περ. x(t)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- Όταν $T_0 \to +\infty$, τότε $\boxed{\frac{1}{T_0}} \to df$ και $k f_0 \to f$

μη περ. x(t)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

ευθύς μετ. Fourier

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt\right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt\right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

αντ. μετ. Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο όρος

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
  - Έχει μέτρο και φάση
  - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

$$X(f) = X_R(f) + j X_I(f)$$

$$X_R(f) = Re\{X(f)\}$$

$$X_I(f) = Im\{X(f)\}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$e^{j\theta(t)} = \cos\theta(t) + j\sin\theta(t)$

- Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Μέτρο:

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση:

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)| e^{j\phi_x(f)}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι για πραγματικά σήματα

$$\boxed{X(f) = X(-f)^*}$$

$(X_k^* = X_{-k})$

$X_k = X_{-k}^*$

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι άρτια συνάρτηση του f, ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι περιττή συνάρτηση του f

- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier