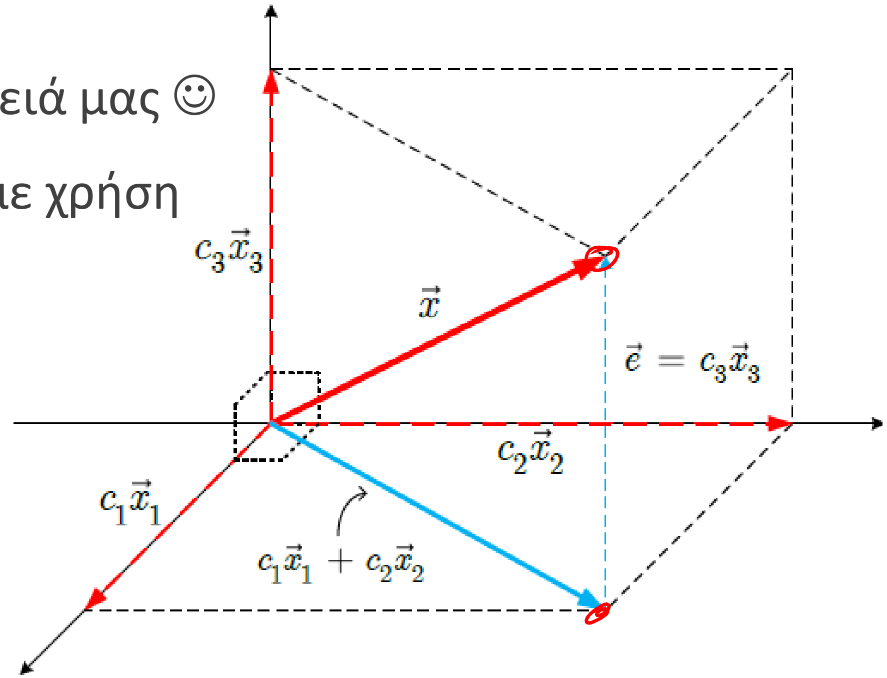
- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης $cy(t)$?
- Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k(t)$$

- Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερο όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$
  - Αρκεί οι όροι να είναι «κατάλληλοι»
- Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας ☺
- Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων
  - Ένα για το μήκος
  - Ένα για το πλάτος
  - Ένα για το ύψος

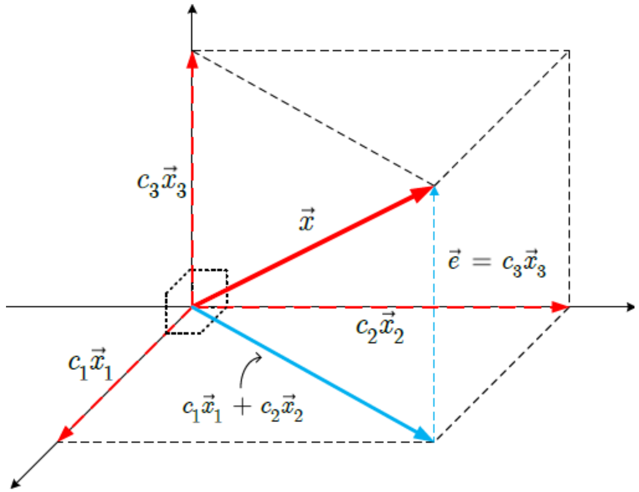
$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

- Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Αν χρησιμοποιήσουμε δυο αντί για τρια διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος $\vec{x}$ τότε θα έχουμε σφάλμα
  - Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
  - Αυτό θα είναι το διάνυσμα σφάλματος



- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$

- **Ερώτηση: ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς?**

- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1, 0, 0], \qquad x_2 = [0, 1, 0], \qquad x_3 = [0, 0, 1]$$

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

❑ Είναι **ορθογώνια** → το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν
  - Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
  - Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο

❑ Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου
  - Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου
  - Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός *όλων* των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα… ☺

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $2N+1$ μιγαδικά εκθετικά σήματα

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^{N}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$2N+1$

$T_0 = \frac{1}{f_0}$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα άθροισμα $2N+1$ τέτοιων σημάτων:

$$\boxed{x(t) \approx \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

- Συνάρτηση σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t)\, dt$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**
- **Βελτιστοποίηση (ξανά ☺)**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

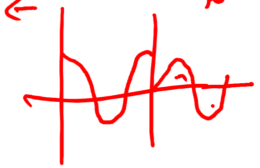
- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

$E = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^{N}$

1. Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει στοιχεία ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j\theta(t)} = \int_0^{T_0} \cos\theta(t) + j\int_0^{T_0} \sin\theta(t)$$

$$\langle k, l^* \rangle = \int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$



2. Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι πλήρες όταν $N \to +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί βάση του χώρου

- Οπότε

?

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

$x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$

ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

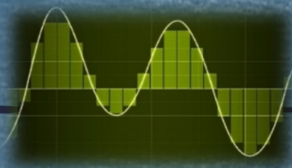
ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Σειρές Fourier

$x(t)$ περιοδικό με περ. $T_0 = \frac{1}{f_0}$

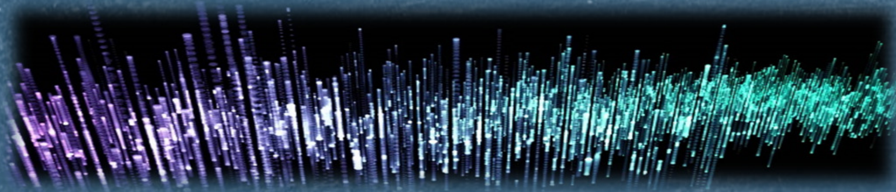
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot \underbrace{e^{j2\pi k f_0 t}}$$

Τι περιέχει το HY215?



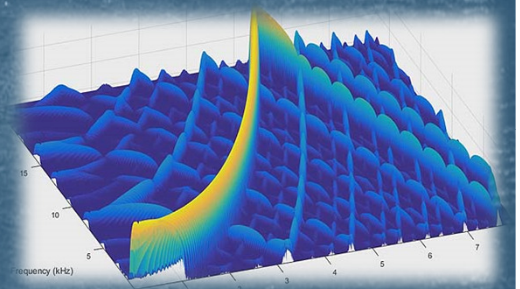
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Σειρές Fourier**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$X_\ell \cdot T_0 = \int_{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi \ell f_0 t}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow X_\ell = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi \ell f_0 t}\,dt$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$\Rightarrow \int_{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi \ell f_0 t}\,dt = \int_{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{-j2\pi \ell f_0 t}\,dt$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt} = \frac{1}{T_0}\left\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\right\rangle$$

$= \sum_k X_k \underbrace{\int_{T_0} e^{j2\pi (k-\ell) f_0 t}\,dt}_{\begin{cases} T_0, & k=\ell \\ 0, & k\neq \ell \end{cases}}$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει και μιγαδικά περιοδικά σήματα

$= X_\ell \cdot T_0$

- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

$X_{-5} = X_5^*$

- Ας το δείξουμε

- **Σειρές Fourier**

$$\boxed{X_{-k} = X_k^*}$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \quad (1)$$

$$X_k^* = \Bigg[\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt}_{X_k}\Bigg]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$$

$X_{-k} = X_k^*$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $\boxed{x(t) = x^*(t)}$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \quad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

- **Σειρές Fourier**

- Όταν το σήμα είναι πραγματικό, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$X_k^* = |X_k| \cdot e^{-j\phi_k}$

με $|X_k|$ το μέτρο και ϕ_k τη φάση του k −οστού συντελεστή

$X_{-k} = X_k^*$

$X_k = |X_k| \cdot e^{j\phi_k}$

πολική μορφή

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

- **Σειρές Fourier**

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[|X_k|e^{-j\phi_k}e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k|e^{j\phi_k}e^{j2\pi k f_0 t}\right]$$

$$\frac{e^{-j\theta(t)} + e^{j\theta(t)}}{2} = \cos(\theta(t))$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}|X_k|\left[e^{-j\phi_k}e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k}e^{j2\pi k f_0 t}\right]$$

$$e^{-j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)} + e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}|X_k|\left[e^{-j2\pi k f_0 t - j\phi_k} + e^{j2\pi k f_0 t + j\phi_k}\right]$$

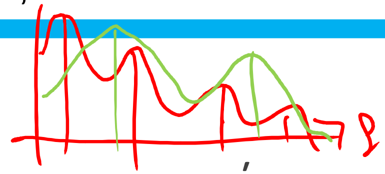
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = |X_k| \cdot e^{j\varphi_k}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = x(t)$$

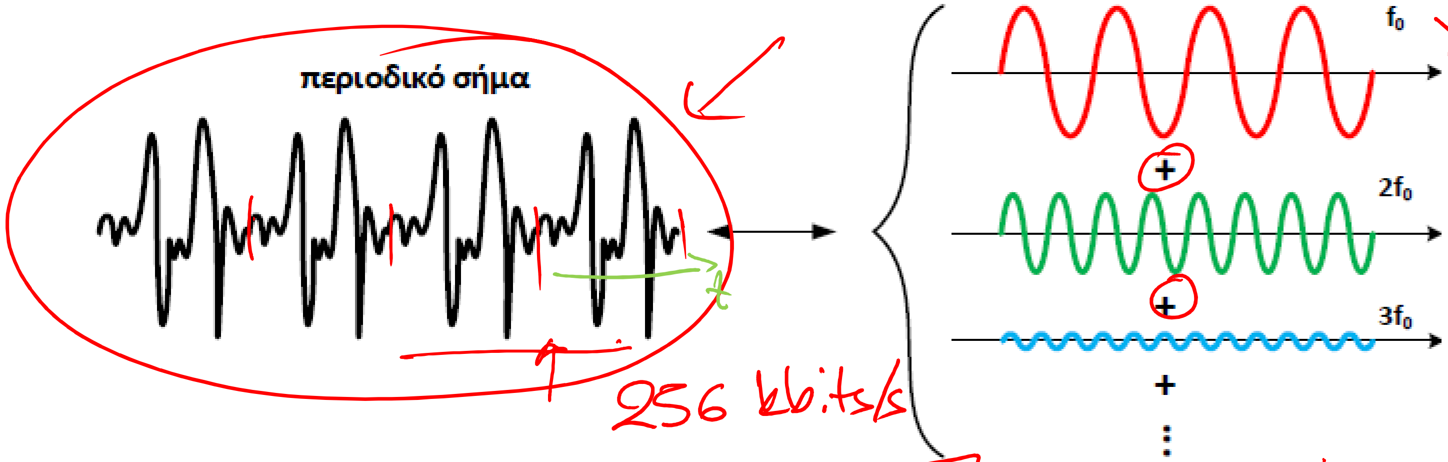
- **Προσοχή:** η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα
  - … και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier

- **Σειρές Fourier**



$\cos(2\pi 100 t)$

- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες kf_0



$X_0 + \sum_k 2|X_k| \cdot \cos$

4 kbits/s

256 kbits/s

- Εναλλακτικά, αναλύει ένα οποιοδήποτέ περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες kf_0

- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt$$

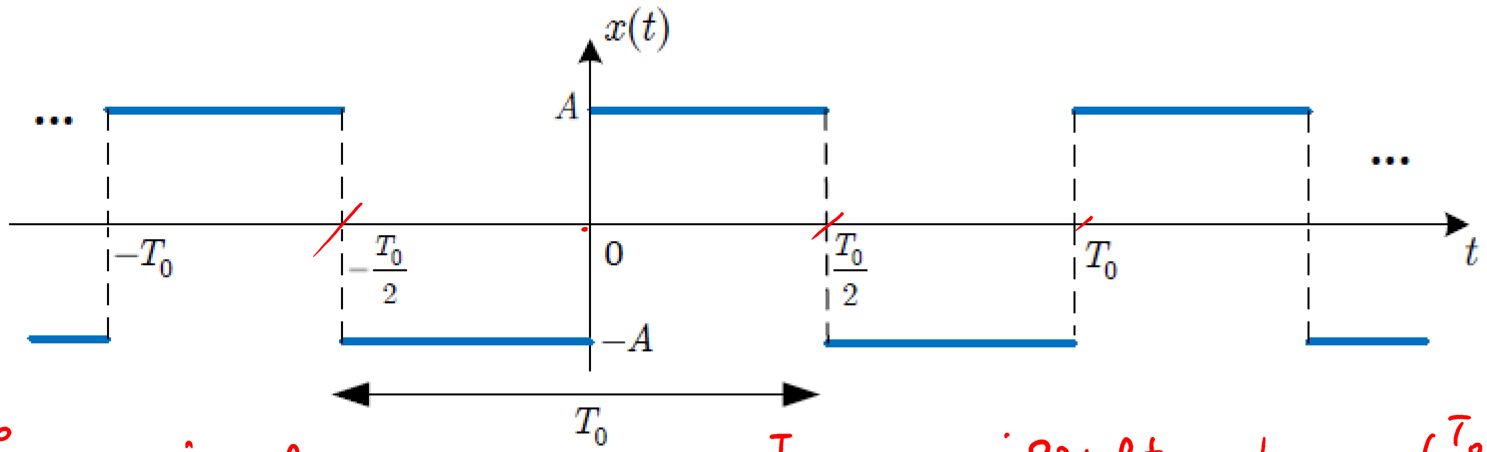
$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

- **Παράδειγμα:**

  ○ Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$



$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$ $\Rightarrow X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$ | $X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = 0$

- Παράδειγμα: $x(t) = \begin{cases} A & 0 \le t < T_0/2 \\ A & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$

$$e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$$

$$f_0 T_0 = 1 \qquad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} A e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{T_0}\,\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0}\,\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{T_0/2}^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k \cancel{f_0 \cdot T_0}}\cdot\left(e^{-j\cancel{2}\pi k \cancel{f_0 \cdot T_0}/\cancel{2}} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k \cancel{f_0 \cdot T_0}}\left(e^{-j2\pi k \cancel{f_0 T_0}} - e^{-j\cancel{2}\pi k \cancel{f_0 T_0}/\cancel{2}}\right) =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right) = \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k} + 1 - e^{-j\pi k}\right) =$$

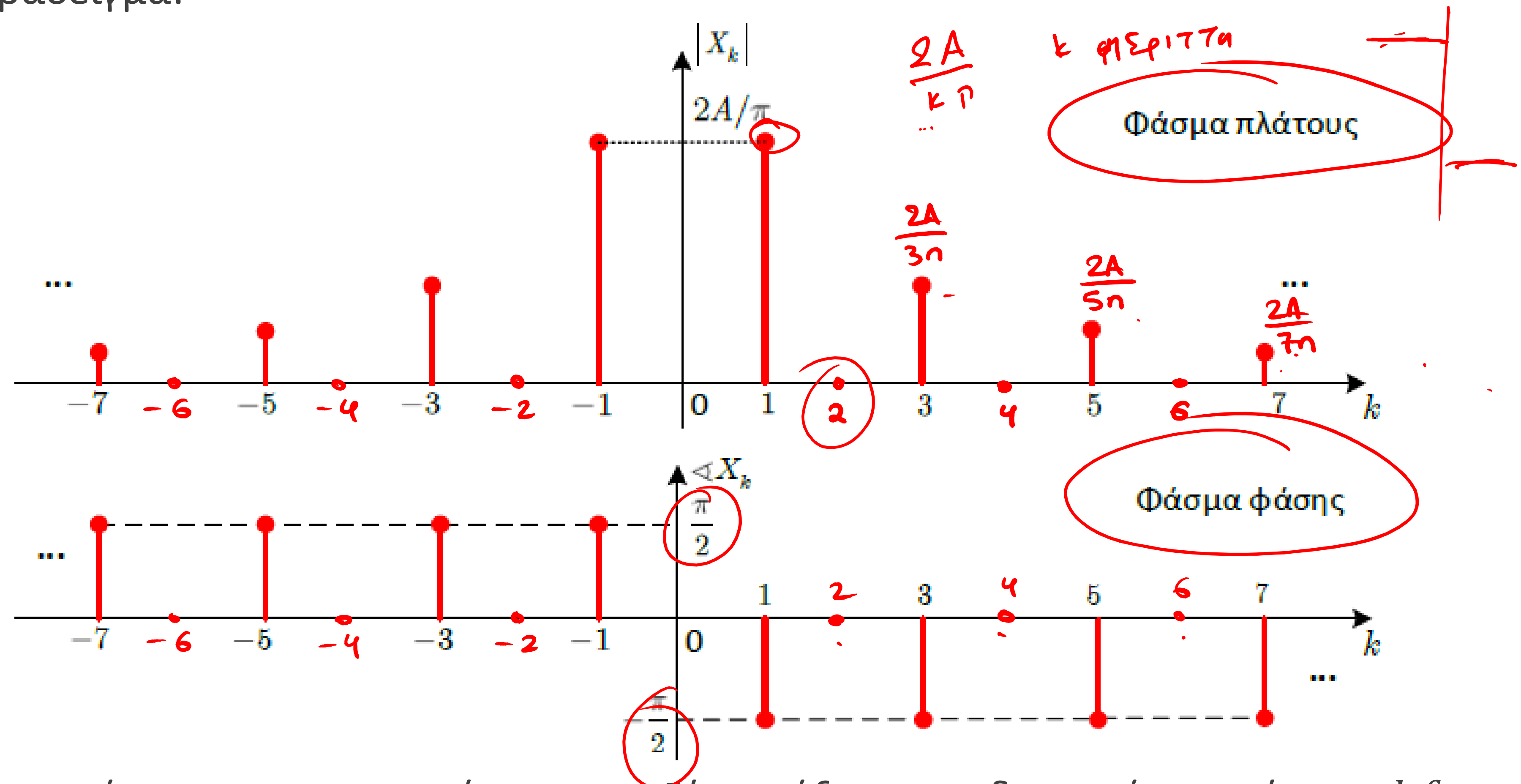
$$= \frac{A}{j\pi k}\left(1 - \left(e^{-j\pi}\right)^k\right) = \frac{A}{j\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{2A}{j\pi k}, & k \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$e^{-j\pi} = -1 \qquad e^{j\pi} = -1$$

$$X_0 = 0$$

$$X_k = \frac{2A\cdot j}{j\pi k\cdot j} = \frac{2A}{\pi k}(-j) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi|k|}\, e^{-j\pi/2} & k > 0 \\ \frac{2A}{\pi k}(-1)\cdot e^{-j\pi/2} & k < 0 \end{cases} = \frac{2A}{\pi|k|}\, e^{j\pi/2} \quad k < 0$$

- Παράδειγμα:



- Προτιμούμε να αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες kf_0» αντί ως ένα συνεχή άξονα του f, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
  - Χρησιμοποιούμε το πολλαπλάσιο k της θεμελιώδους συχνότητας για βαθμονόμηση του άξονα

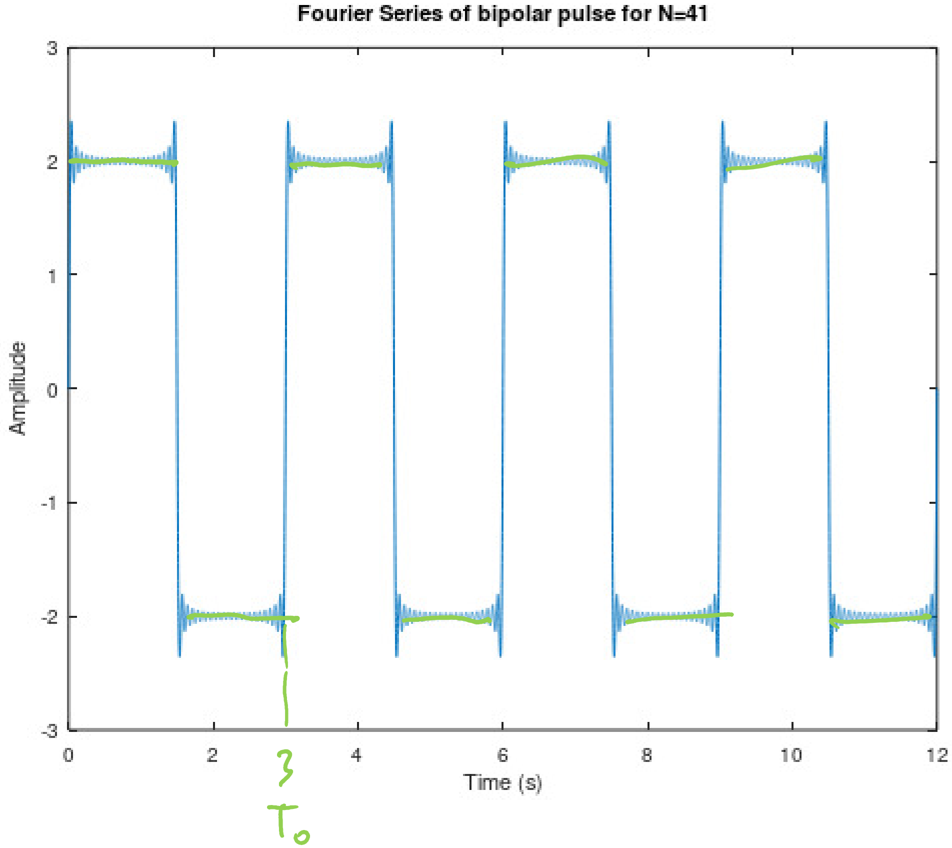
- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

- **Σειρές Fourier**
- **MATLAB/Octave code**

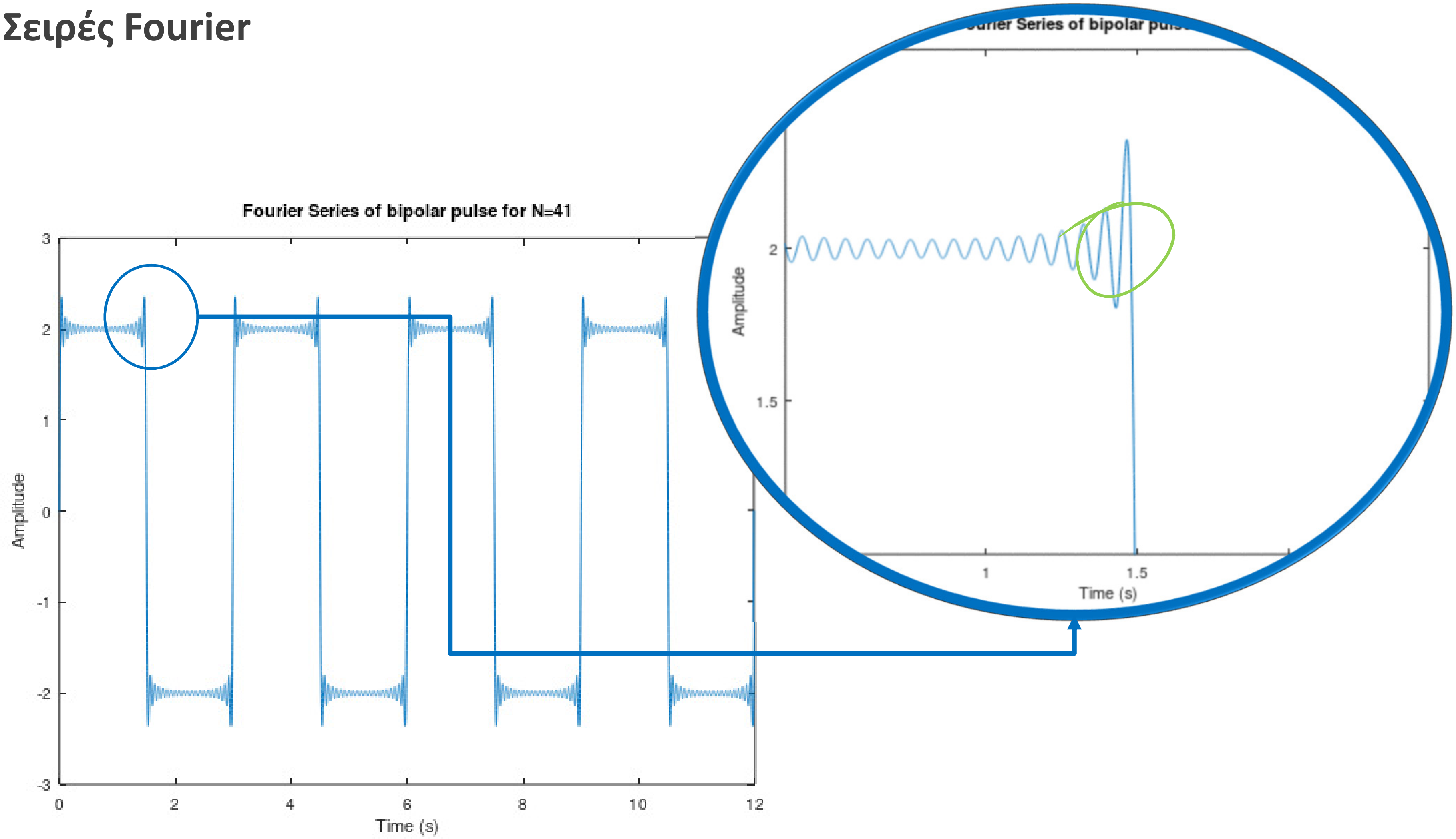
$$\sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$

82 X_k

```
% Bipolar pulse - Fourier Series
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 41;
k = [-N:2:-1, 1:2:N];

% Time axis
dt = 0.001;
t = 0:dt:4*T0;

% Fourier Coefficients
Xk = 2*A./(pi*k).*exp(-j*pi/2);
X0 = 0;

% Synthesis equation
x = zeros(size(t));
for i=1:length(k)
  x = x + Xk(i)*exp(j*2*pi*k(i)*f0*t);
end

% Add X0 - not necessary here
x = x + X0;

% Plot
plot(t, real(x));
title('Fourier Series of bipolar pulse for N=41');
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```



- **Σειρές Fourier**



- **Φαινόμενο Gibbs**