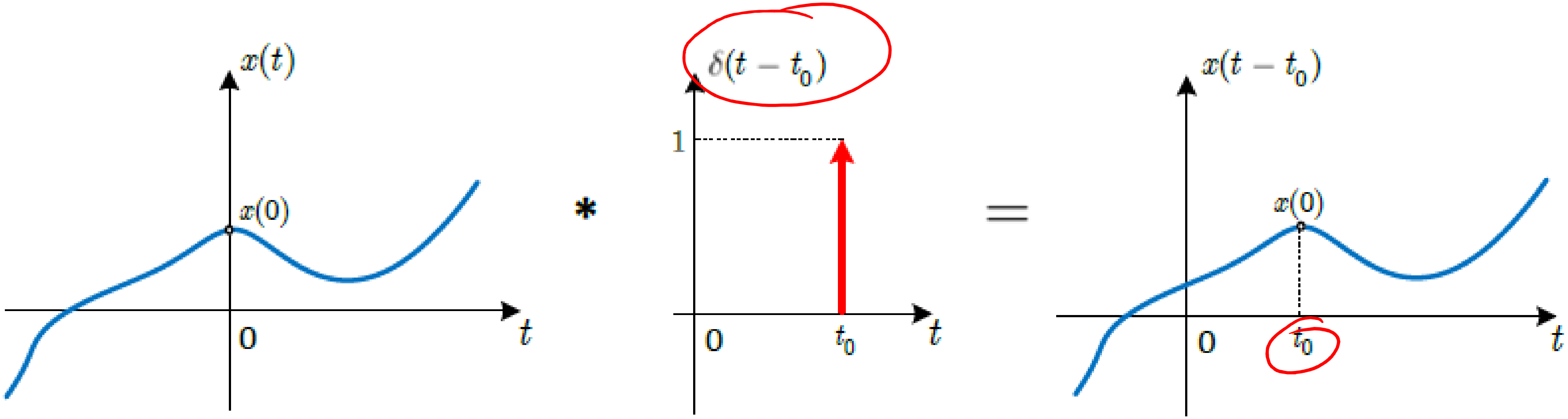
- **Συνέλιξη**
- Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα $\delta(t)$ $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$
- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$A\delta(t-t_0), \qquad A \in \Re$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0 και πολλαπλασιασμένο με $A \in \Re$, δηλ.

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau = \boxed{x(t-t_0)}$$



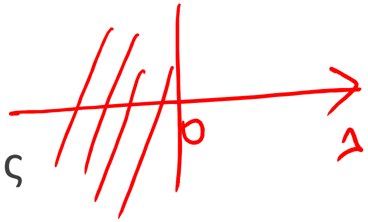
- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Προφανώς αυτή η έξοδος $y(t)$ μπορεί να είναι είτε η συνολική, είτε κάποια από τις επιμέρους
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου περιλαμβάνει σήματα της μορφής

1 $\quad$ 2

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$



- Για αυτά πρέπει υποχρεωτικά $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

x(t) * h(t)

$$|y_{zs}(t)| < B_y \Rightarrow |y_{zs}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < B_x \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau} < B_y$$

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Η σχέση

$$|y_{zs}(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})| \boldsymbol{dt} < +\infty} \quad *$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!
- Η συνθήκη αυτή μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα των συναρτήσεων που δημιουργούν την κρουστική απόκριση:

1 2

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

$\lambda_i < 0 \quad \forall i$

- Ξανά λοιπόν πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ για να είναι το σύστημα ευσταθές!
  - ...αφού το εμβαδόν της $|h(t)|$ πρέπει να είναι πεπερασμένο

- **Αιτιατότητα Συστήματος**

$y(t_0) = f\left(x(t)\right)_{t \leq t_0}$

$y(t) = x(t-1) + x(t)$

$y(t) = x(t-1) + x(t) + x(t+1)$

- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει
- Προφανώς ένα σύστημα που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό...
  - ... αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! ☺

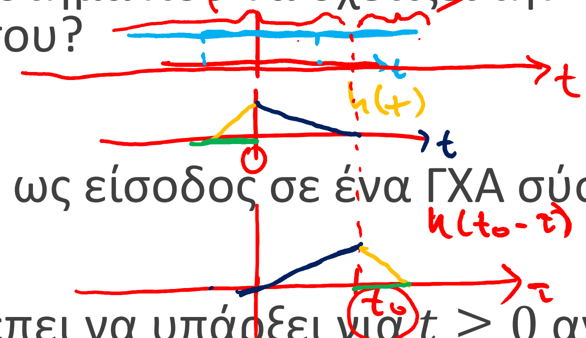
$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau$

- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος

προηγούμενες

μελλοντικές

- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα (ή μη) του?
  - Ναι!



- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$
- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό
- Άρα ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$\boxed{h(t) = 0, \qquad t < 0}$$

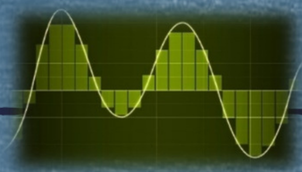
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 5^{Η}

- Ο χώρος της συχνότητας

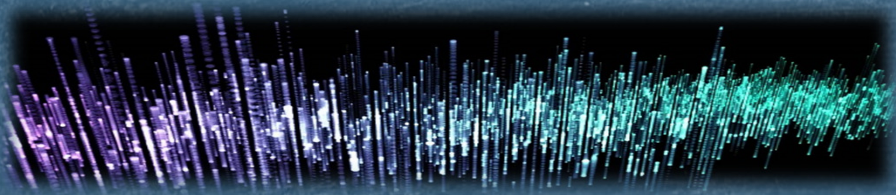
$x(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t) = S\{x(t)\}$

Τι περιέχει το HY215?



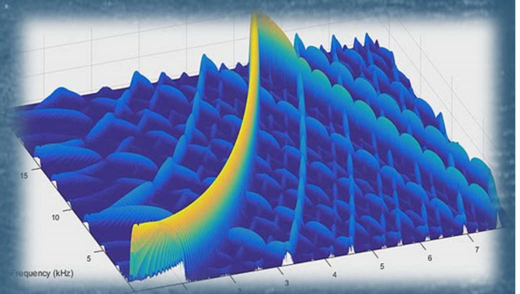
1^o Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^o Κομμάτι

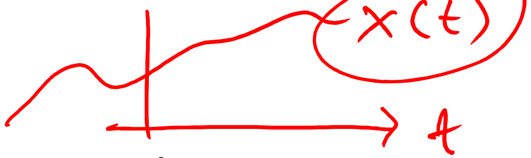
- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



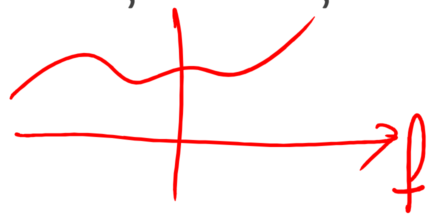
- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ’ όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! ☺

- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δηλ. δεν ξέρουμε γιατί μια δεδομένη είσοδος παράγει τη συγκεκριμένη έξοδο
- Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς

- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**



- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις πλάτους-χρόνου που έχουμε δει ως τώρα…
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!



- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα…

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου…

$\delta(t) \to \boxed{S} \to y(t) = h(t)$

- …έτσι και το μιγαδικό εκθετικό σήμα της μορφής $\boxed{x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}}$, $A > 0$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας

- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0 (t-\tau)+\phi)}\, d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}$$

$$= H(f_0)\underbrace{\left(Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\right)}_{x(t)}$$

$$= \boxed{H(f_0)}\, x(t)$$

→ απόκριση σε συχνότητα

$\forall f$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

με

$$\boxed{H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}$$

ένα σταθερό μιγαδικό αριθμό που εξαρτάται από το f_0, δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

ΓΧΑ

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ και

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}\,d\tau$$

$$\cos\theta(t) = \frac{1}{2}e^{j\theta(t)} + \frac{1}{2}e^{-j\theta(t)}$$

$$\sin\theta(t) = \frac{1}{2j}e^{j\theta(t)} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta(t)}$$

$$x(t) = A\cos(\underbrace{2\pi f_0 t+\varphi}_{\theta(t)}) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t)$$

είναι πολύ σημαντικό!

- Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της μορφής $\boxed{x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!
  - Η οποία βέβαια μπορεί να αλλάζει το πλάτος και τη φάση της εισόδου! ☺

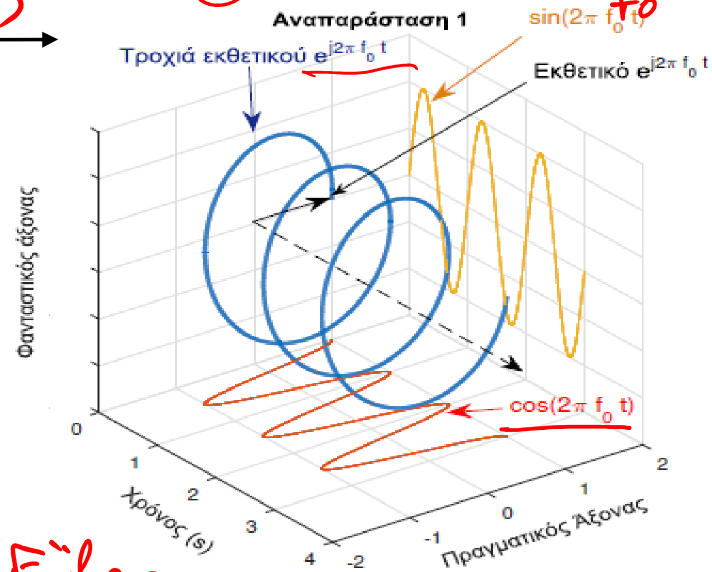
$$y_1(t) = H(f_0)\frac{A}{2}e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} + H(-f_0)\frac{A}{2}e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi)}$$

- Ξέρουμε ότι τέτοια σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
  - Μέσω της σχέσης του Euler
- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων?
  - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο περιοδικά σήματα

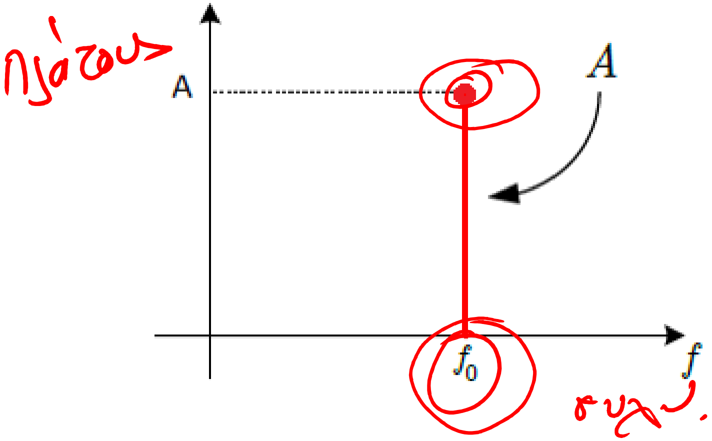
- Έστω το γνωστό μας σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, $A \in \Re_+$ → : $Re\{x(t)\} = A\cos 2\pi f_0 t$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$

$Im\{x(t)\} = A\sin(2\pi f_0 t)$

- Θυμηθείτε:



- Οπότε:



- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

Euler:

$$\cos(\theta(t)) = \frac{e^{j\theta(t)}}{2} + \frac{e^{-j\theta(t)}}{2}$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), \qquad A > 0, \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$$

$$e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} = e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\varphi}$$

το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}} e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

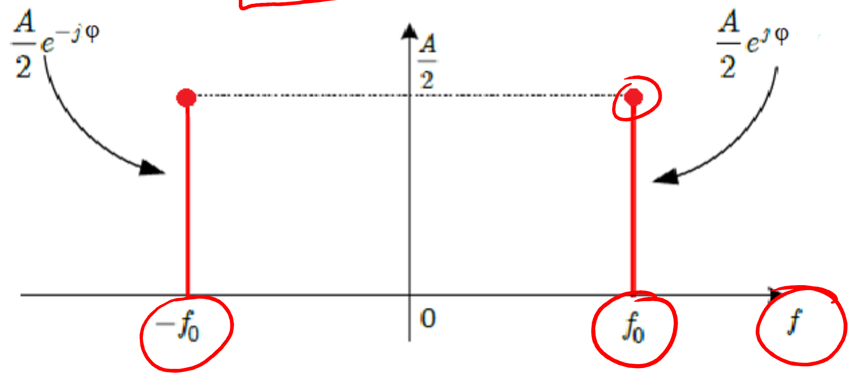
- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \overset{X_1}{\boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}}\, e^{j2\pi f_0 t} + \overset{X_2 = X_1^*}{\boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}}\, e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι

πλάτος $\frac{A}{2}$

φάση φ



- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t}$$

με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2}e^{j\phi}$, $X_1^* = \frac{A}{2}e^{-j\phi}$, $A > 0$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες)
  - … οι οποίοι είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)

- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**

- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
  - **Στο *φάσμα πλάτους* σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα**
  - **…και στο *φάσμα φάσης* τη φάση του φάσορα**

- **Παράδειγμα**

$$\boxed{\pm\frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp\frac{j\pi}{2}}}$$

○ Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 3 - 2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό

10Hz

15Hz

$3 \cdot e^{j2\pi 0t} = 3$

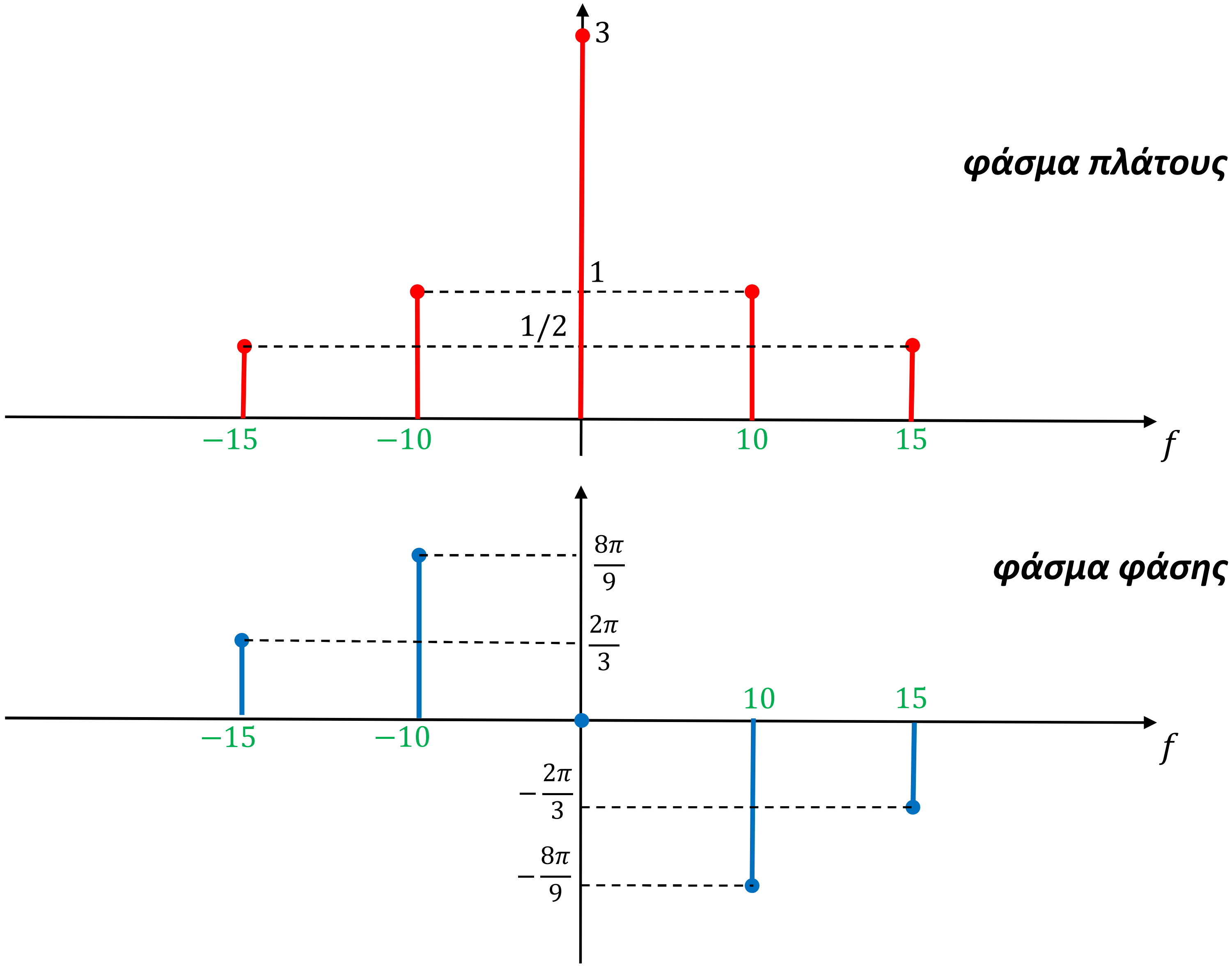
μηδέν Hz

$\sin(\theta(t)) = \frac{e^{j\theta(t)} - e^{-j\theta(t)}}{2j}$

$\cos(\theta(t)) = \frac{e^{j\theta(t)} + e^{-j\theta(t)}}{2}$

- **Παράδειγμα**

- Παράδειγμα


3
φάσμα πλάτους
1
1/2
−15
−10
10
15
f
8π/9
2π/3
φάσμα φάσης
10
15
−15
−10
f
−2π/3
−8π/9

• Ο χώρος της συχνότητας

• Συνοπτικά

$\in \mathbb{R}$ $\qquad x_1 \qquad x_1^*$

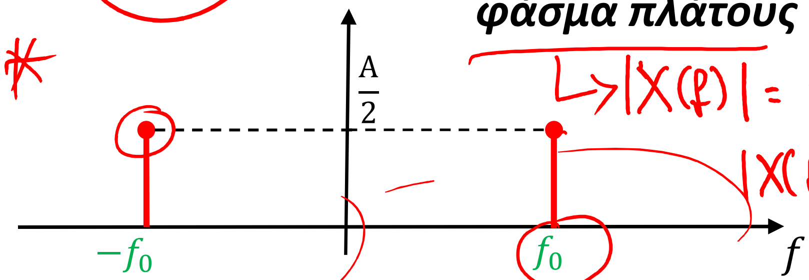
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}, \qquad A > 0$$

φάσμα πλάτους

↳ $|X(f)| = |X(-f)|$

$|X(f)|$ άρτια συνάρτηση ως προς f

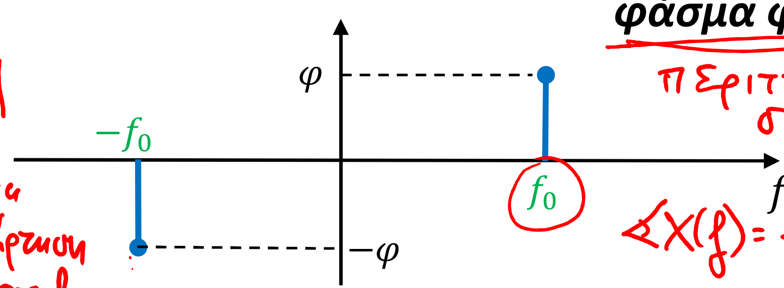
*



φάσμα φάσης

περιττή συνάρτηση

$\sphericalangle X(f) = -\sphericalangle X(-f)$

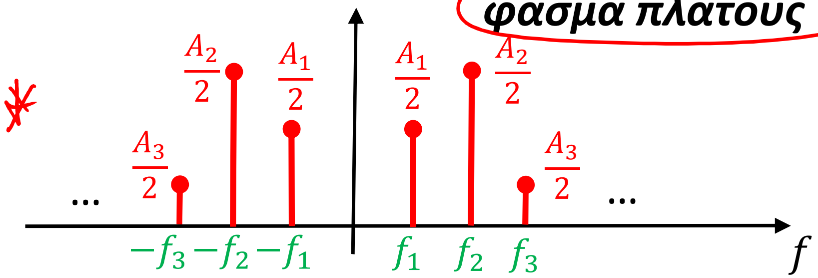


• Γενικότερα

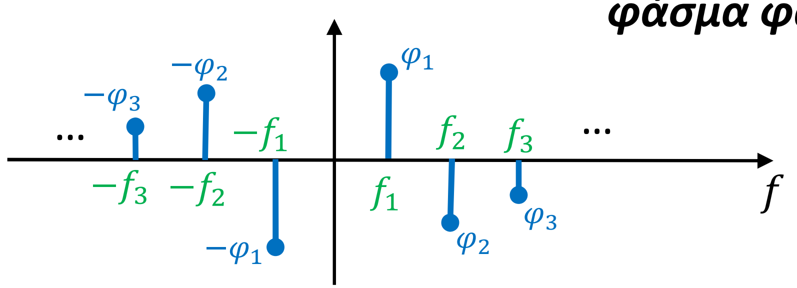
$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$

φάσμα πλάτους

*



φάσμα φάσης



- Κάθε **<u>πραγματικό</u>** σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

a) **Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του**

b) **Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του**

f_0

ΜΚΔ$\{f_1, f_2\} = 5Hz$

- Η συμμετρία προκύπτει από τη συζυγία των φασόρων

$\rightarrow x(t) = 3 + A\cos(2\pi 10t + \varphi_1) - B\sin(2\pi 15 t + \varphi_2)$ $f_1 = 10Hz = 2f_0$ $f_2 = 15Hz = 3f_0$

- Επίσης παρατηρήστε ότι οι συχνότητες των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν *ακέραιες πολλαπλάσιες* της θεμελιώδους συχνότητας
  - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k, με k το αντίστοιχο ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας
  - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως

$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$

  - Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ ήταν μηδενικοί
    - Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 5$ Hz, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!

- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται ως άθροισμα ημιτόνων είναι σχετικά απλή

- Ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία

- **Ερώτημα**: **μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση**: **μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

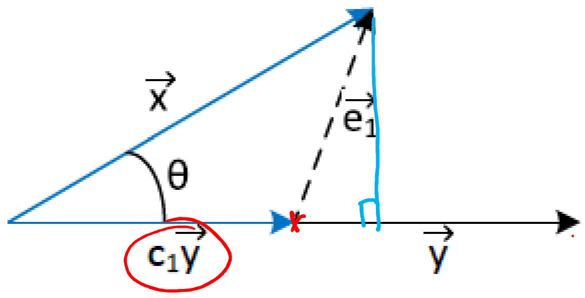
Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

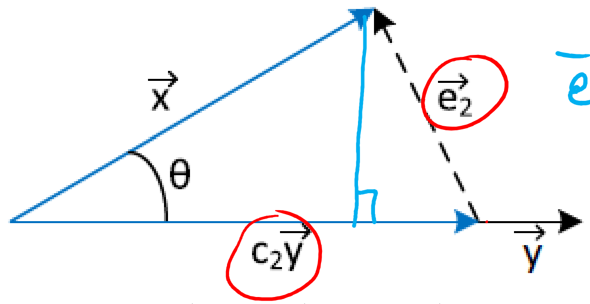
- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν πιο βολικό να θυμηθούμε μερικές ιδιότητες των διανυσμάτων

- Έστω διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ όπως στο σχήμα

$c_1\vec{y} + \vec{e}_1 = \vec{x} \Rightarrow \boxed{\vec{e}_1 = \vec{x} - c_1\vec{y}}$



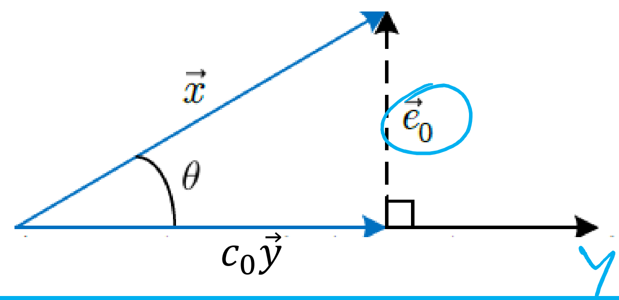


$\vec{e}_2 = \vec{x} - c_2\vec{y}$

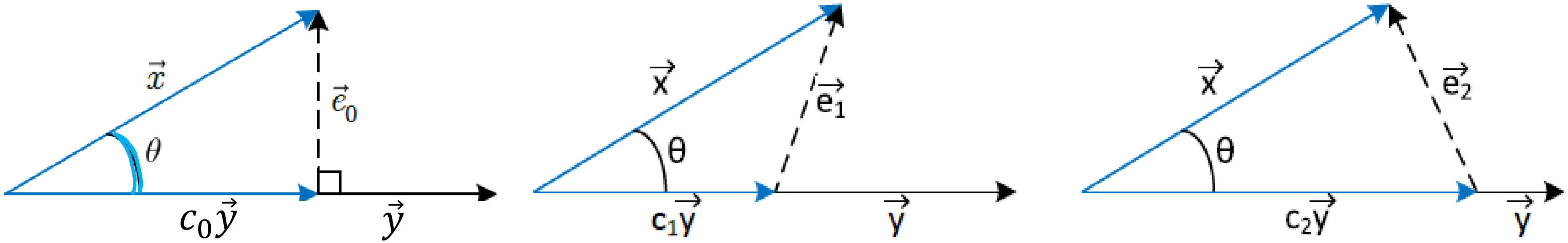
και $\vec{e}_i$ διανύσματα σφάλματος, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i\vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{x}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i$$

- Γνωρίζετε ότι το μικρότερο διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Τα διανύσματα $c_i\vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$
- Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i\vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?
  - Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά ☺ – λέει τη σταθερά c_0, αφού το διάνυσμα σφάλματος της, $\vec{e}_0$, είναι αυτό με το μικρότερο μήκος
- Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} |y| \cdot |x| \cdot \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{c_0|\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta} = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

$= \frac{1}{|\vec{y}|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? ☺
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το ***βέλτιστο c*** **–** με κάποια έννοια **–** για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας ορίσουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (όμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»…
  - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization**!

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Ενέργεια σφάλματος**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - cy(t)\right)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} [x^2(t) - 2c\,x(t)y(t) + c^2 y^2(t)]dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\boxed{\frac{d}{dc}E_e} = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} -2\,x(t)y(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} 2c\,y^2(t)dt = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\boxed{c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt}$$

$$\Rightarrow c \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt}_{E_y} = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

και

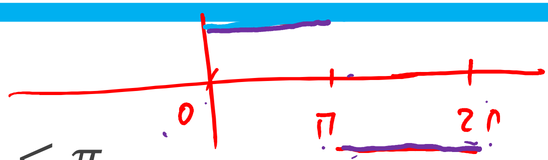
$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \langle x, y\rangle$$

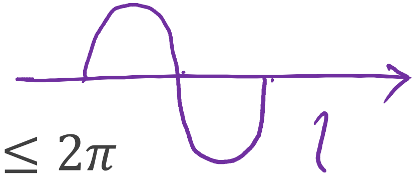
να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y}\langle x, y\rangle}$$

- **Παράδειγμα**





○ Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ -1, & \pi < t \le 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)$, $0 \le t \le 2\pi$

$y(t) = c \cdot x(t)$?

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$

Θέλουμε το βέλτιστο c : $y(t) \simeq c\, x(t)$, $c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x(t)\, y(t)\, dt$

Είναι $E_x = \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2} \right) dt =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2} \cancel{\int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt} \to 0$

$\int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt = 0$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi$

$= \dots = \pi \Longrightarrow \boxed{E_x = \pi}$ ✓

Άρα

$c = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt}_{\langle x, y \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(t)\, dt$

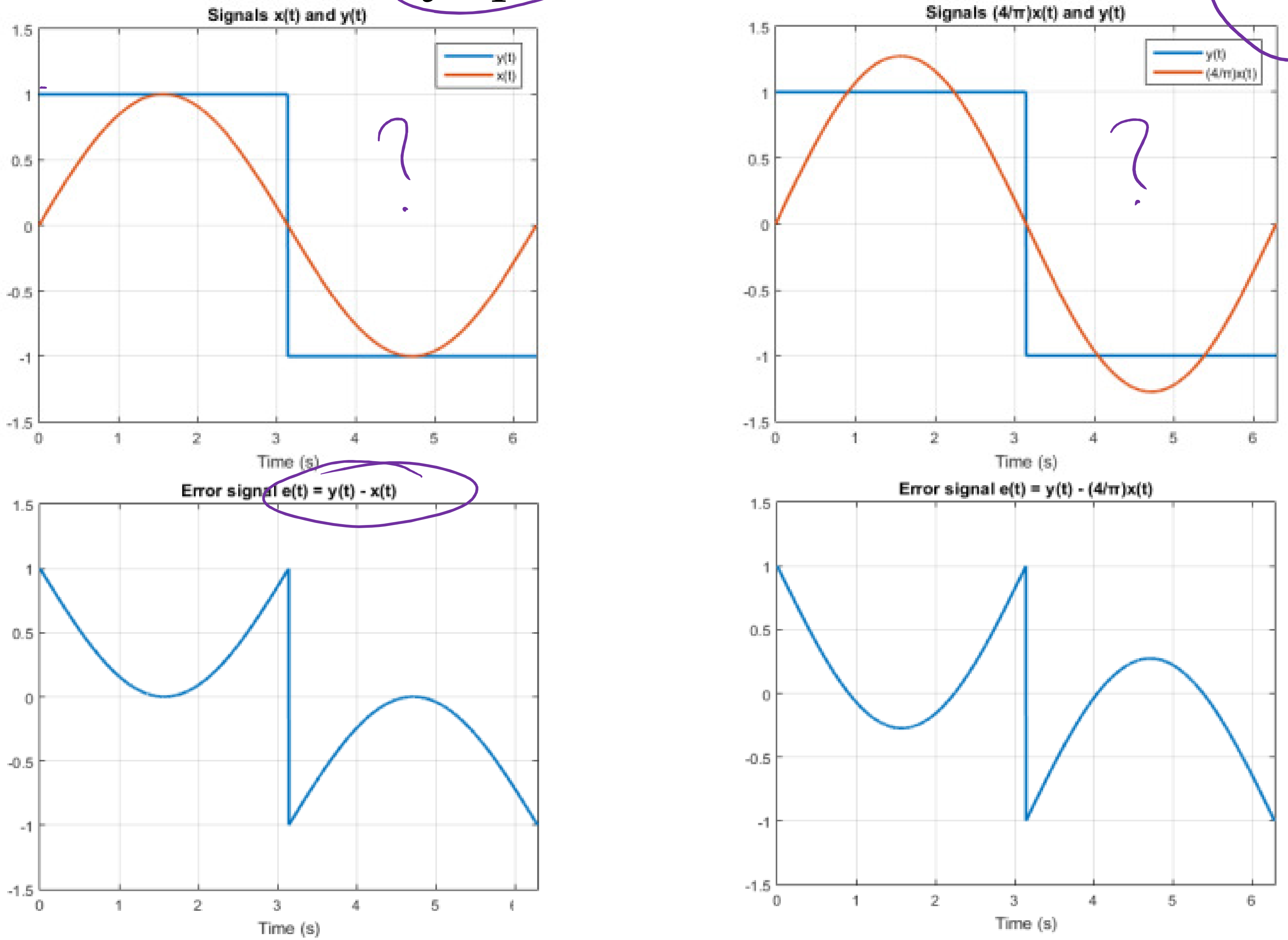
$\frac{1}{\pi}\, 2 \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = \dots = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{4}{\pi}}$. Άρα $\boxed{y(t) \simeq \frac{4}{\pi} x(t)}$

$\frac{2}{\pi} \left(-\cos(t)\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$

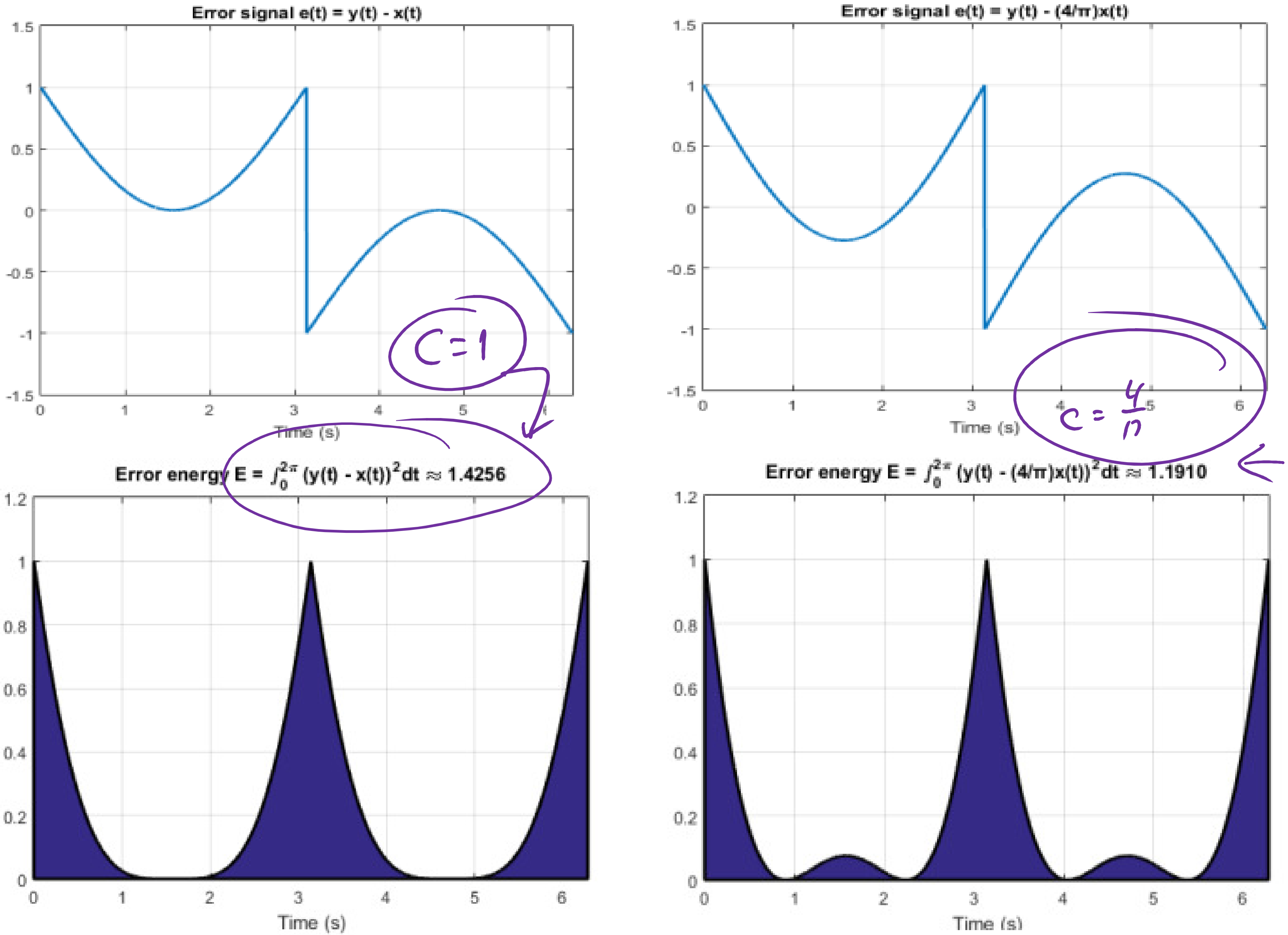
• Παράδειγμα

$c = 1$

$c = \frac{4}{\pi}$



- Παράδειγμα


Error signal e(t) = y(t) - x(t)
Time (s)
c = 1
Error signal e(t) = y(t) - (4/π)x(t)
Time (s)
c = 4/π
Error energy E = $\int_0^{2\pi} (y(t) - x(t))^2 dt \approx 1.4256$
Time (s)
Error energy E = $\int_0^{2\pi} (y(t) - (4/\pi)x(t))^2 dt \approx 1.1910$
Time (s)