- Θυμηθείτε ότι όταν ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις βρίσκεται σε αρχική ηρεμία (== μηδενικές αρχικές συνθήκες), τότε αυτό είναι **γραμμικό**
  - Επίσης, μπορεί κανείς να δείξει ότι είναι και **χρονικά αμετάβλητο**

- **Έτσι, ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) αν και μόνο αν οι αρχικές του συνθήκες είναι μηδενικές**
  - ...εννοώντας τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$

- Τα παραπάνω μας βοηθούν να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ένα σύστημα της μορφής

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

1. Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h_o(t)$ του συστήματος

$$S_o: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

2. Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος $S$ δίνεται ως

$$h(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k h_o(t)$$

λόγω γραμμικότητας

- **Παράδειγμα**

  ○ Έστω το σύστημα

$$\cancel{\alpha_N}\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = \boxed{9x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

$$S_0: \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = x(t) \rightarrow h_0(t)$$

$h_0(0^+) = 0$

$\dot{h}_0(0^+) = 1 \quad \left(\frac{1}{a_N}\right)$

Χ.Ε. $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$

$(\lambda+3)^2$

$$h_0(t) = (c_0 + c_1 t)e^{\lambda_1 t}, \quad t>0$$
$$= (c_0 + c_1 \cdot t)e^{-3t}, \quad t>0$$

$$h_0(0^+) = (c_0 + c_1 \cdot 0)e^0 = c_0 = 0$$

$$\dot{h}_0(0^+) = \left[c_1 \cdot t \cdot e^{-3t}\right]'\Big|_{t=0^+} = \left[c_1 \cdot e^{-3t} - 3c_1 \cdot t \cdot e^{-3t}\right]_{t=0} = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

Άρα: $h_0(t) = t \cdot e^{-3t}, \quad t>0$

$$h(t) = 9h_0(t) + 2\frac{d}{dt}h_0(t) = \dots = 3t\,e^{-3t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

- Παράδειγμα

$$x(t) \to \boxed{S} \to y(t)$$

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{\ell=0}^{M} b_\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell} x(t) \leftarrow h(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

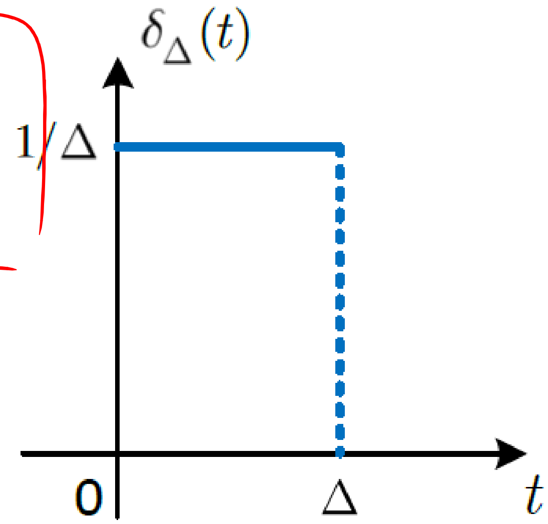
$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

?

- Ας δούμε τώρα πως η κρουστική απόκριση μας χρησιμεύει στην εύρεση της εξόδου μηδενικής κατάστασης
  - Θυμίζετε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης εξαρτάται αποκλειστικά από την είσοδο
- Αφού γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για είσοδο μια συνάρτηση Δέλτα, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να γράψουμε κάθε είσοδο ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα! ☺
- Έτσι, θα χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης για να βρούμε την έξοδο για κάθε είσοδο!
- Ας δούμε αν αυτό είναι εφικτό…
- Ας ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα

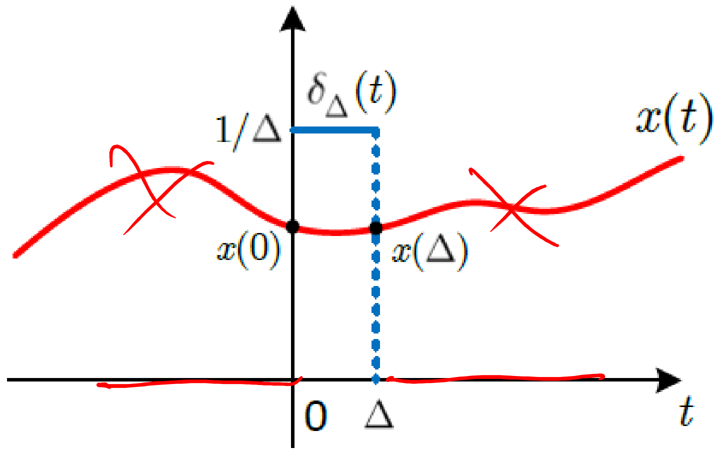
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

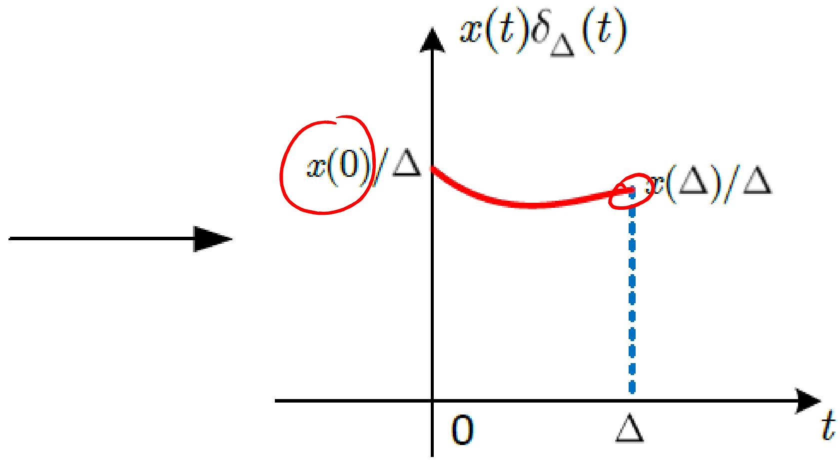
και σχηματικά




$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

- Ας αναπαραστήσουμε το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t)$ για ένα τυχαίο σήμα $x(t)$




- Θεωρώντας τώρα το Δ ως πολύ μικρό, τέτοιο ώστε το τμήμα του σήματος που αποκόπτεται να θεωρείται σχεδόν σταθερό, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\boxed{\Delta x(t)\delta_\Delta(t) \approx \Delta x(0)\delta_\Delta(t)}$$

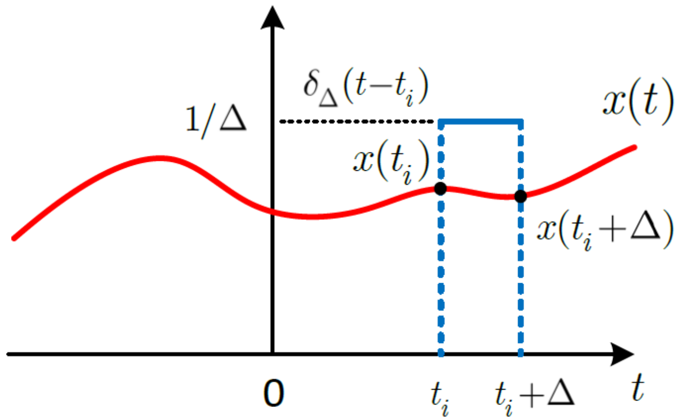
- Αν $\Delta \to 0$ τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε ισότητα

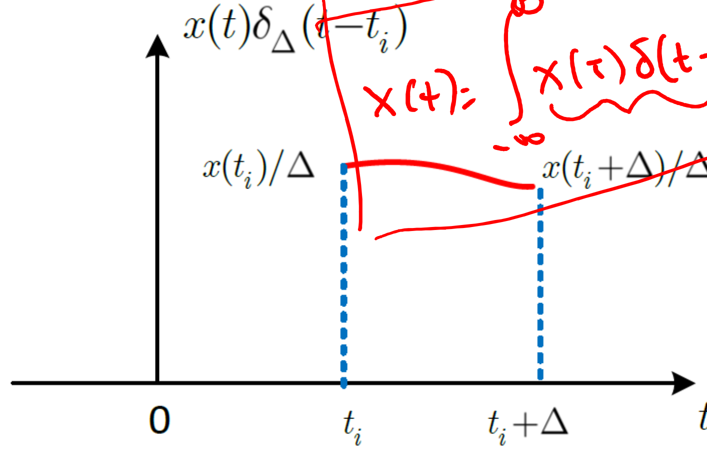
$$\boxed{\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t)} = x(0)\delta(t)$$

$$\boxed{x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Ας συνεχίσουμε με το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t-t_i)$




Άρα $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$

- Όμοια

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t-t_i) \approx \Delta x(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)$$

① $x(t)\delta(t-t_1) = x(t_1)\delta(t-t_1)$

② $x(t)\delta(t-t_2) = x(t_2)\delta(t-t_2)$

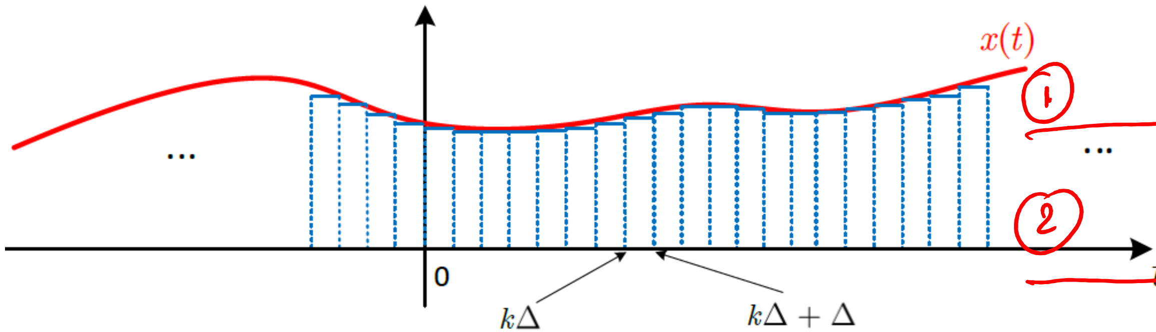
- Αν $\Delta \to 0$ τότε

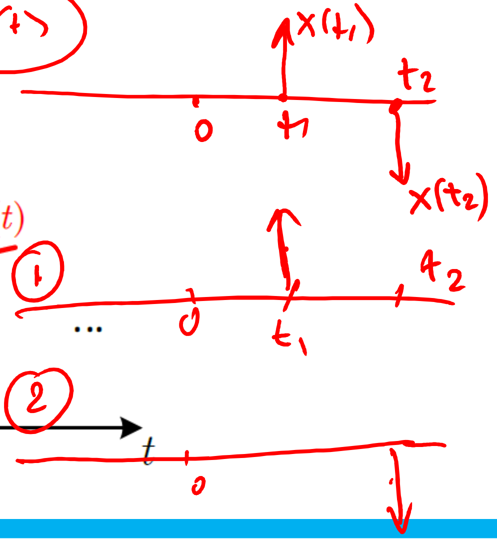
$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t-t_i) = x(t_i)\delta(t-t_i)$$

$x(t)$

① + ②

- Μπορούμε να συνεχίσουμε για όλο το σήμα $x(t)$



- Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω τμήματα έχουμε

$$\hat{x}_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)$$

με $\hat{x}_\Delta(t)$ μια προσέγγιση του αρχικού σήματος $x(t)$ η οποία εξαρτάται από την τιμή του $\Delta$

- Όταν $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta) = x(t)$$

- Το παραπάνω όριο αποτελεί το άθροισμα Riemann και μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{\boxed{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x(\tau)}\,\delta(t-\tau)d\tau}$$

$y_{zs}(t)$, $h(t)$

$\delta(t)$

- Πέτυχαμε να γράψουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα (ολοκλήρωμα) μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα, με καθεμιά να έχει εμβαδό $x(\tau)$!

- Το ολοκλήρωμα

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

convolution

είναι πολύ σημαντικό και η πράξη που εκτελεί ονομάζεται **συνέλιξη** μεταξύ του $x(t)$ και του $\delta(t)$

Γενικά

- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με τον τελεστή $*$ : $\boxed{x(t) * \delta(t)}$

$x(t) * y(t)$

- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Πώς βοηθά λοιπόν η σχέση που βρήκαμε για την εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?

- Θυμηθείτε ότι το σύστημά μας είναι ΓΧΑ!

- Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \to h(t)$$

ΓΧΑ

$$\delta(t) \to \boxed{S} \to h(t)$$

b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t-\tau) \to h(t-\tau)$$

c) γραμμικότητα:

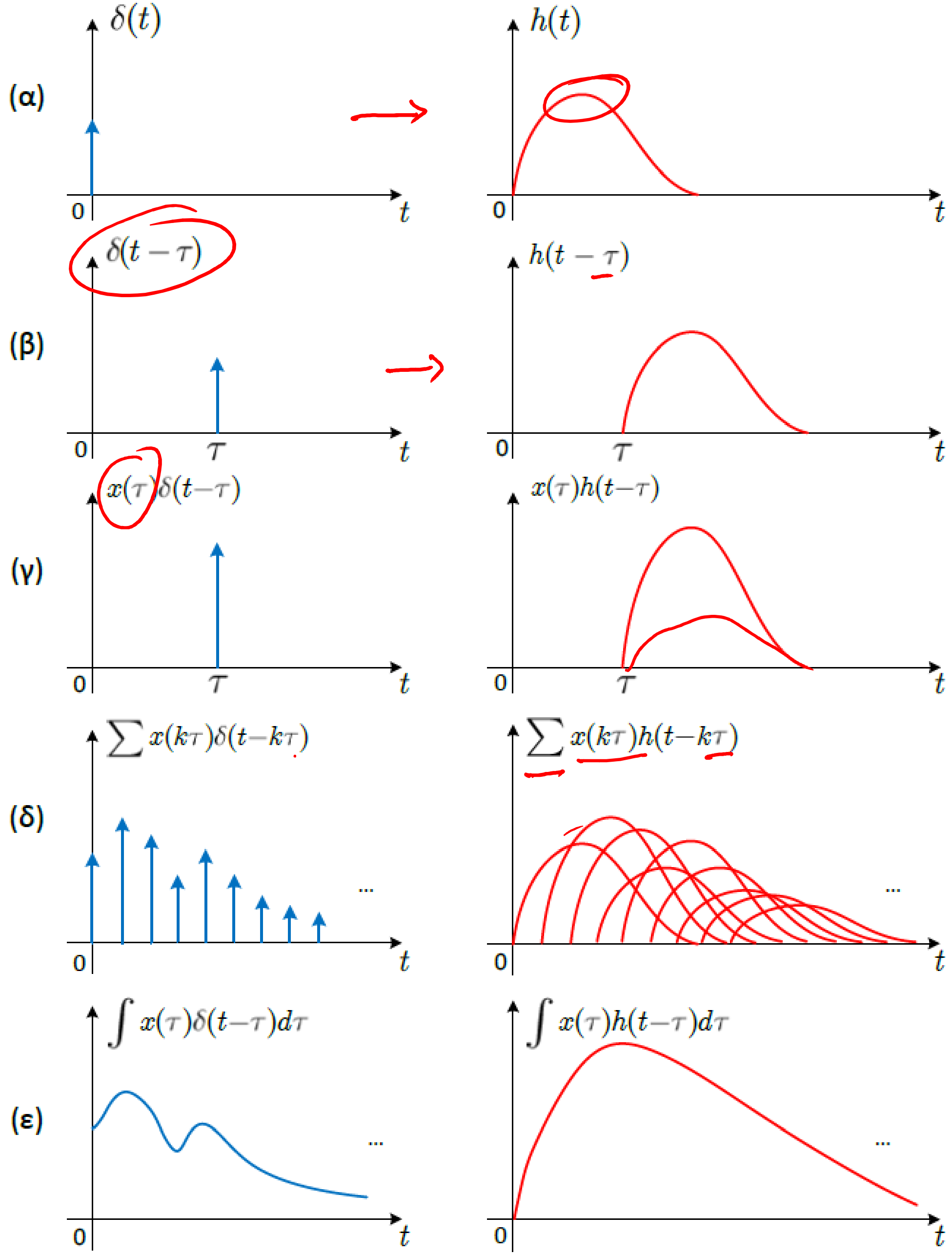
$$\underline{x(\tau)}\delta(t-\tau) \to \underline{x(\tau)}h(t-\tau)$$

d) γραμμικότητα:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau} \to \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau} = x(t) * h(t)$$

e) απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \to y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \underline{x(t) * h(t)}$$



(α)
$\delta(t)$
$h(t)$
(β)
$\delta(t-\tau)$
$h(t-\tau)$
(γ)
$x(\tau)\delta(t-\tau)$
$x(\tau)h(t-\tau)$
(δ)
$\sum x(k\tau)\delta(t-k\tau)$
$\sum x(k\tau)h(t-k\tau)$
(ε)
$\int x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
$\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

- **Συνολική Απόκριση Συστήματος**

- Με βάση τα προηγούμενα, η συνολική έξοδος ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες δίνεται ως

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}\right)}_{}\overbrace{}^{y_{zi}(t)} u(t) + \overbrace{x(t) * h(t)}^{y_{zs}(t)}$$

αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι απλές

- Αν το **σύστημα είναι ΓΧΑ**, τότε η έξοδος δίνεται **μόνο** από την απόκριση μηδενικής κατάστασης

$$y(t) = y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

- Κατά κανόνα ενδιαφερόμαστε για ΓΧΑ συστήματα
  - Κάποιες πολύ λίγες φορές θα εξετάζουμε και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος

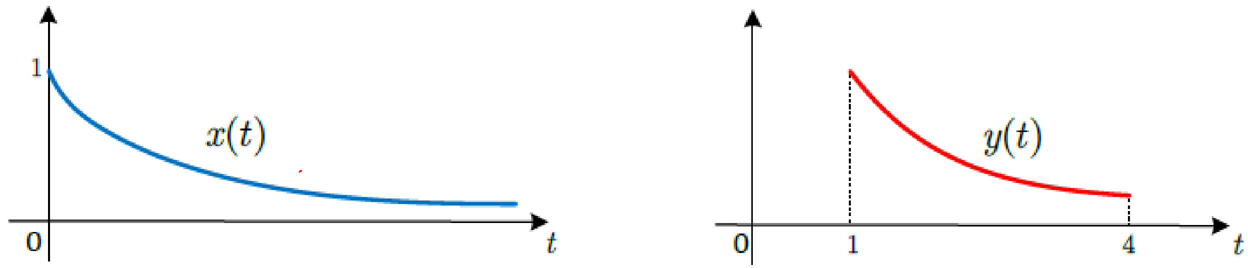
- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Η συνέλιξη έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

| Ιδιότητες συνέλιξης | |
|---|---|
| Ομογένεια | $ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ \ a \in \Re$ |
| Αντιμεταθετικότητα | $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ |
| Προσεταιριστικότητα | $(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$ |
| Επιμεριστικότητα | $x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$ |
| Γραμμικότητα | $\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$ |
| Εύρος | $\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$ |
| Ουδέτερο στοιχείο | $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$ |

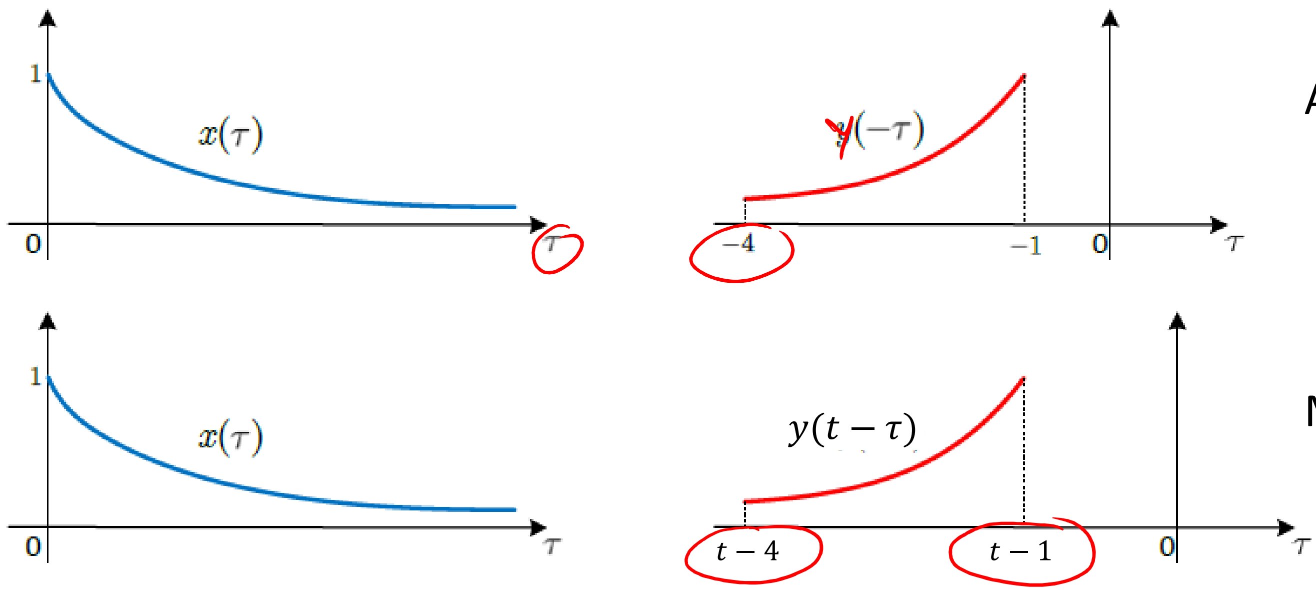
- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό της συνέλιξης
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη δυσκολία της ως πράξη
- Ας δούμε πόσο απλή είναι τελικά

- **Συνέλιξη**

- Έστω δυο σήματα $x(t), y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη c(t)= $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$ = c(t)




- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**
  - Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα



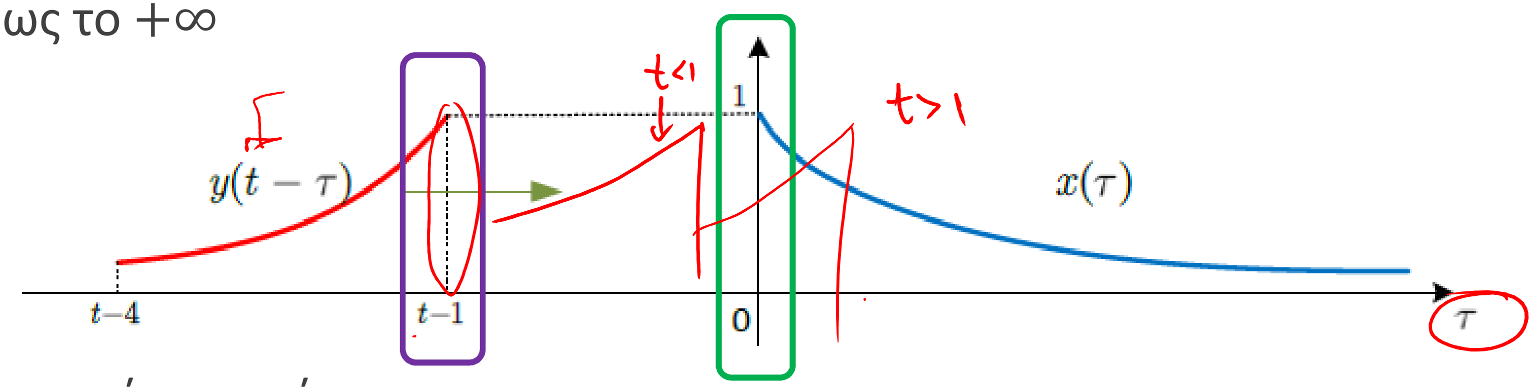

Αντιστροφή

Μετατόπιση

- **Συνέλιξη**

$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau$'$\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$




- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 1 < 0 \Rightarrow \boxed{t < 1}$$

και

$$c(t) = 0$$

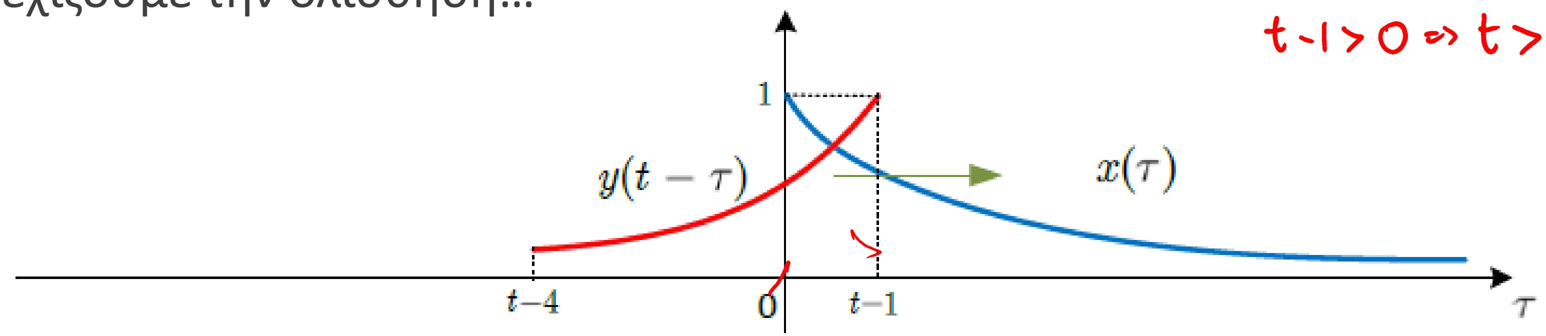
αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t-\tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το δεξί «άκρο» του περάσει το $t = 0$…
  - …που είναι το αριστερό «άκρο» του $x(\tau)$ $t-1 > 0 \Rightarrow t > 1$

- **Συνέλιξη**

- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…

$t-1>0 \Rightarrow t>1$




- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-4<0 \text{ και } t-1>0 \Rightarrow 1<t<4$$

και

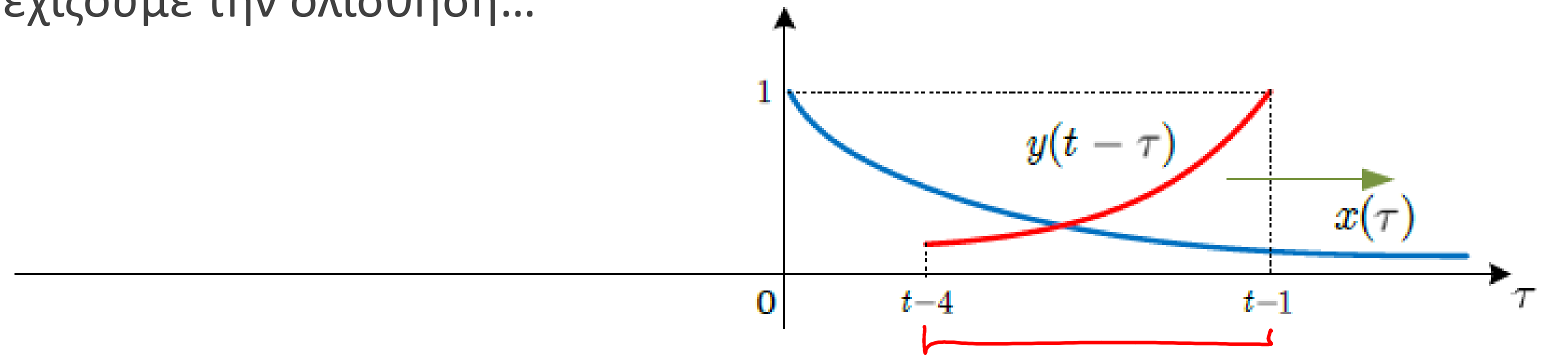
$$c(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(1,4)$

- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση…

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…




- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4$$

και

$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4, +\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

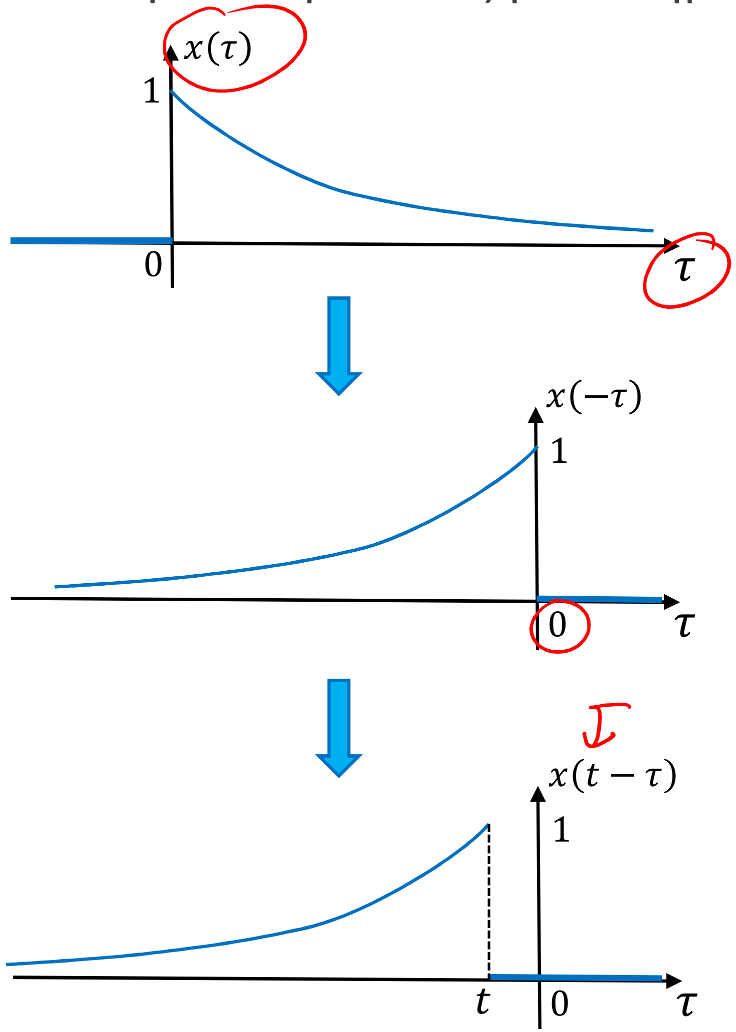
- **Συνέλιξη**

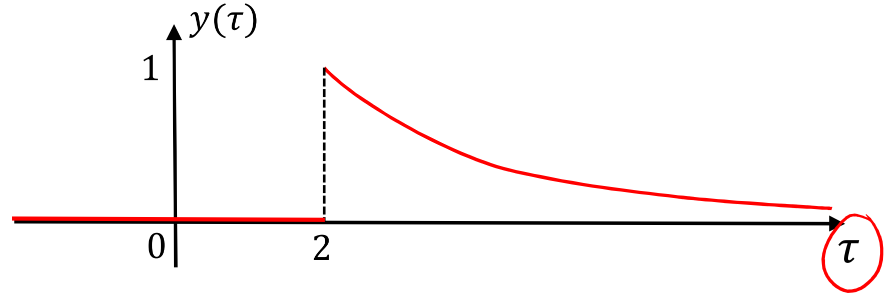
$$c(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

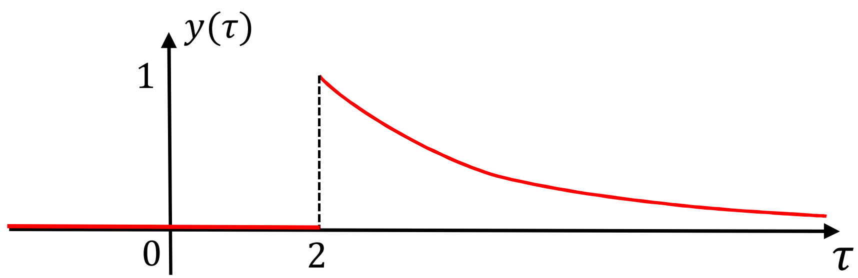
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

- **Παράδειγμα**

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t), \;\; y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$



- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$

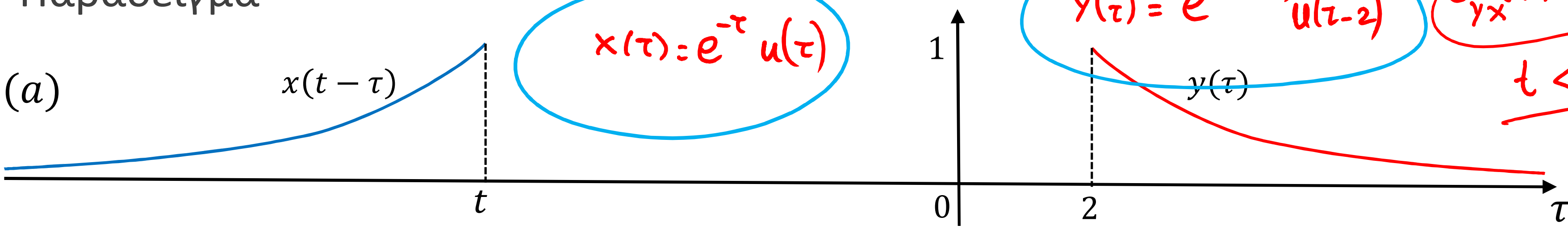
$x(\tau) = e^{-\tau} u(\tau)$

$y(\tau) = e^{-(\tau-2)} u(\tau-2)$

$C_{yx}(t) = 0$

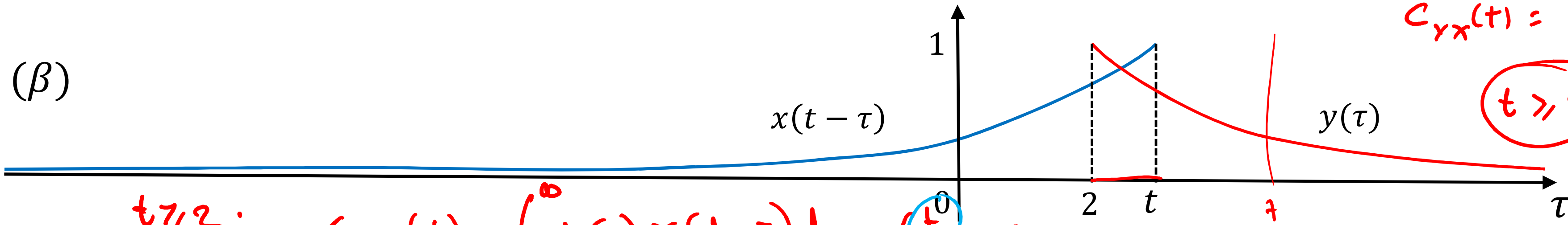
$t < 2$

$(a)$




$C_{yx}(t) = ?$

$(\beta)$



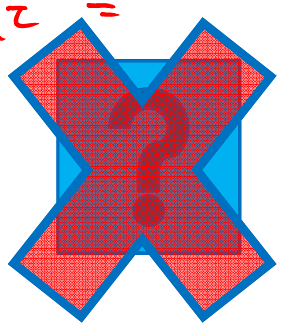

$t \geq 2$

$t \geq 2$: $C_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{2}^{t} e^{-(\tau-2)}\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau =$

$= \int_{2}^{t} \cancel{e^{-\tau}} \cdot e^{2} \cdot e^{-t} \cdot \cancel{e^{+\tau}}\, d\tau = e^{-t+2} \int_{2}^{t} d\tau = e^{-t+2}\, \tau \Big|_{2}^{t} =$

$= e^{-t+2}(t-2) = e^{-(t-2)} \cdot (t-2)$

$(\gamma)$



Άρα

$$C_{yx}(t) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ e^{-(t-2)} \cdot (t-2) & t \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{yx}(t) = e^{-(t-2)} \cdot (t-2)\, u(t-2)}$$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

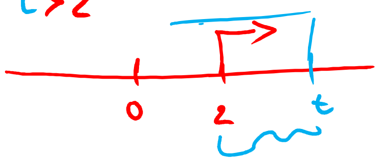
$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau > 0 \end{cases}$$

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-2)}u(\tau-2)\; e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

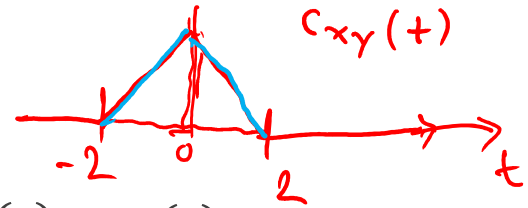
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-2)} \cdot e^{-(t-\tau)}\, u(\tau-2)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{2}^{t} e^{-t+2}\,d\tau = e^{-t+2}\,\tau\Big|_{2}^{t} = (1)$$

$$u(\tau-2) = \begin{cases} 0 & \tau-2<0 = \tau<2 \\ 1 & \tau-2>0 = \tau>2 \end{cases} \qquad u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau>t \\ 1 & \tau<t \end{cases} \Rightarrow u(\tau-2)\cdot u(t-\tau) = 1,\ 2<\tau<t$$

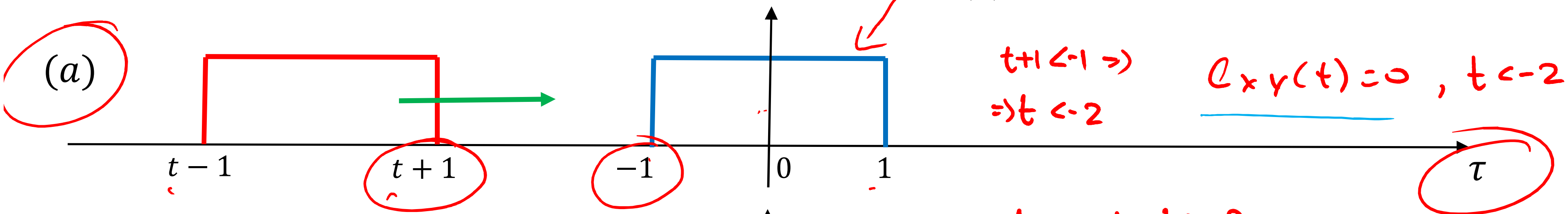



$$(1) = e^{-(t-2)}\cdot(t-2) \qquad t>2$$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

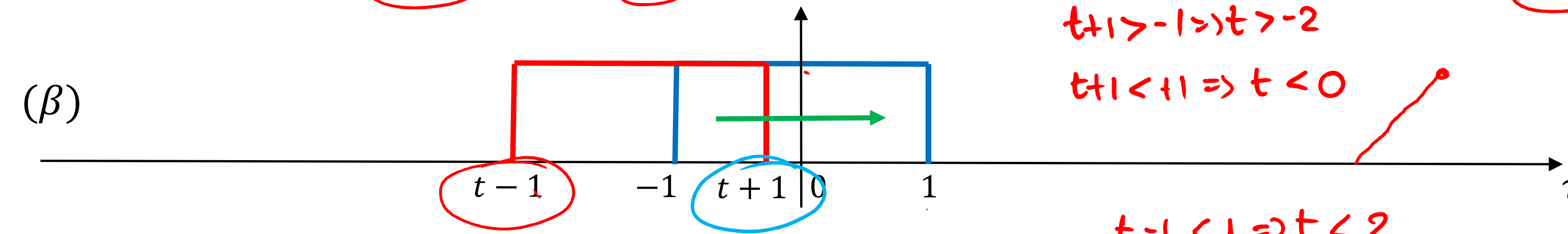



○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(t)$

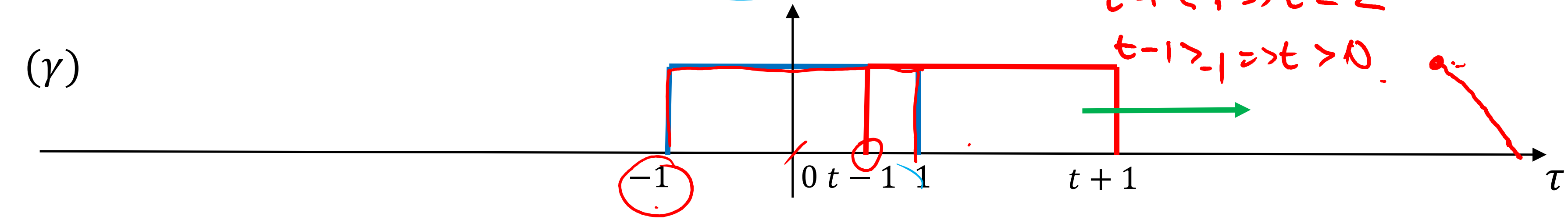



$t+1<-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow t<-2$

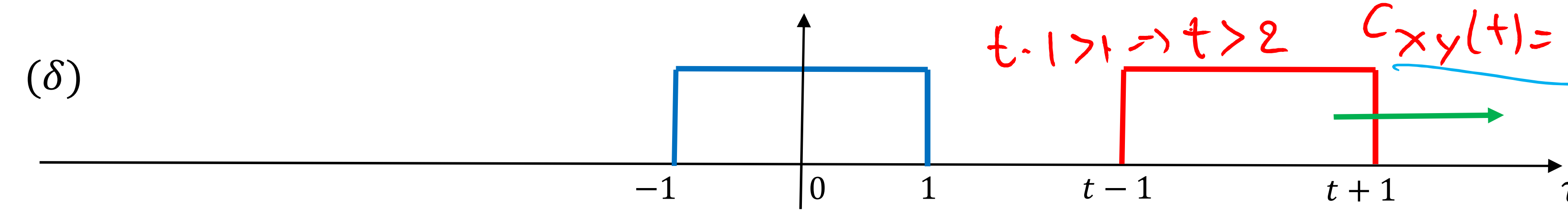
$c_{xy}(t)=0, \ t<-2$




$t+1>-1 \Rightarrow t>-2$
$t+1<+1 \Rightarrow t<0$




$t-1<1 \Rightarrow t<2$
$t-1 \geq -1 \Rightarrow t>0$




$t-1>1 \Rightarrow t>2$

$c_{xy}(t)=0$

- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

α) Είναι $c_{xx}(t) = 0$, για $t+1 < -1 \Rightarrow t < -2$.

β) Είναι $c_{xx}(t) = \int_{-1}^{t+1} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big]_{-1}^{t+1} = (t+1) - (-1) = t+2$,

για $t+1 > -1$ και $t-1 < -1 \Rightarrow t > -2$ και $t < 0 \Rightarrow -2 < t < 0$

γ) Είναι $c_{xx}(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big]_{t-1}^{1} = (1-(t-1)) = -t+2$,

για $t+1 > 1$ και $t-1 < 1 \Rightarrow t > 0$ και $t < 2 \Rightarrow 0 < t < 2$

δ) Είναι $c_{xx}(t) = 0$, για $t-1 > 1 \Rightarrow t > 2$.

Άρα $c_{xx}(t) = \begin{cases} 0, & t < -2, t > 2 \\ t+2, & -2 < t < 0 \\ -t+2, & 0 < t < 2 \end{cases}$ $\sim$