- **Συστήματα**
- Ευσταθή και ασταθή συστήματα
- **Ευσταθή** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει ότι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη:

$$0 \leq |x(t)| < B_x \Rightarrow 0 \leq |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t-2) \quad \leftarrow B_y = B_x \qquad y(t) = x(t+1)^{B_y = B_x}$$
$$y(t) = x(t) + x(t-10) \leftarrow B_y = 2B_x$$

- **Ασταθή** ονομάζονται τα συστήματα που δεν ικανοποιούν την παραπάνω σχέση
- Για παράδειγμα,

$$y(t) = \frac{1}{x(t+2)}$$

$$y(t) = \log|x(t)|$$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:
- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$1 \quad y(t) = t + x(t-2)$$

$$2 \quad y(t) = \sin\big(x(t+1)\big)$$

είναι ευσταθή

1 $|x(t)| < B_x \Rightarrow |x(t-2)| < B_x$

$|y(t)| = |t + x(t-2)| \leq |t| + |x(t-2)| < |t| + B_x$ Αν $t \to \infty$ $|y(t)| \to \infty$

ασταθές

2 $|x(t)| < B_x \Rightarrow |x(t+1)| < B_x \Rightarrow |y(t)| = |\sin(x(t+1))| \leq 1$

Ευσταθές

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Έστω ένα σύστημα εισόδου $x(t)$ κι εξόδου $y(t)$ που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Για να μπορέσουμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση χρειαζόμαστε κάποιες **βοηθητικές συνθήκες (auxiliary conditions)**

- Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε:

$$f(x) = f'(x)$$

  - Γνωρίζετε ότι έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\boxed{f(x) = ce^x}$, $c \in \mathbb{R}$
  - Χωρίς γνώση του $c \in \mathbb{R}$ η λύση μας δεν είναι μοναδική
  - Συνήθως μας δίνεται κάποια βοηθητική συνθήκη, όπως π.χ. $f(0) = 2$
  - Τότε ξέρουμε ότι $\boxed{f(x) = 2e^x}$

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Έστω ότι έχουμε N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες της μορφής

$$y(0^-), y'(0^-), y''(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$$

οι οποίες ισχύουν για $t = 0^-$, δηλ. περιγράφουν το σύστημα **πριν** εφαρμόσουμε κάποια είσοδο

- Έστω ότι για $t = 0$ εφαρμόζουμε στο σύστημά μας μια είσοδο $x(t)$
- Η έξοδος $y(t)$ αποτελείται από το άθροισμα δυο **ανεξάρτητων** μεταξύ τους παραγόντων

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

με

- ❑ $y_{zi}(t)$: την **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**
- ❑ $y_{zs}(t)$: την **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Η απόκριση μηδενικής εισόδου περιγράφει το «κομμάτι» της εξόδου που σχετίζεται με την **κατάσταση του συστήματος πριν την εφαρμογή της εισόδου**
  - Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος ήδη, το ελατήριο είναι τεντωμένο και το σώμα κινείται ήδη
  - Αυτή η πληροφορία για την αρχική κατάσταση του συστήματος πρέπει κάπως να «κωδικοποιηθεί» στη διαφορική μας εξίσωση
  - Πως? Θέτοντας κατάλληλες **μη μηδενικές βοηθητικές συνθήκες**!
  - Σε αυτήν την απόκριση, θεωρούμε ότι **η είσοδος είναι μηδενική**!

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Η απόκριση μηδενικής κατάστασης περιγράφει το «κομμάτι» της εξόδου που σχετίζεται μόνο **με την εφαρμογή της εισόδου**
  - Θεωρώντας ότι η κατάσταση του συστήματος είναι «μηδενική» → το σύστημα ηρεμεί
  - Ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, το ελατήριο σε θέση ισορροπίας, το σώμα ακίνητο
  - Σε αυτήν την απόκριση, θεωρούμε ότι οι **βοηθητικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές**!
  - Αντίθετα, η **είσοδος** του συστήματος είναι **μη μηδενική**!
- Ονομάζουμε τις βοηθητικές συνθήκες που ορίζονται για $t = 0^-$ ως **αρχικές συνθήκες του συστήματος**

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος) συστήματος**
- Για παράδειγμα, θεωρήστε έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή

$u(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\sin(\omega_0 t + \varphi)\cdot\omega_0$

$u(0)=0 \Rightarrow -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$

$\sin(\varphi) = 0$

- Ξέρετε (από το ΗΥ112-Φυσική Ι, όσοι/ες συμμετείχατε) ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνησή του είναι η

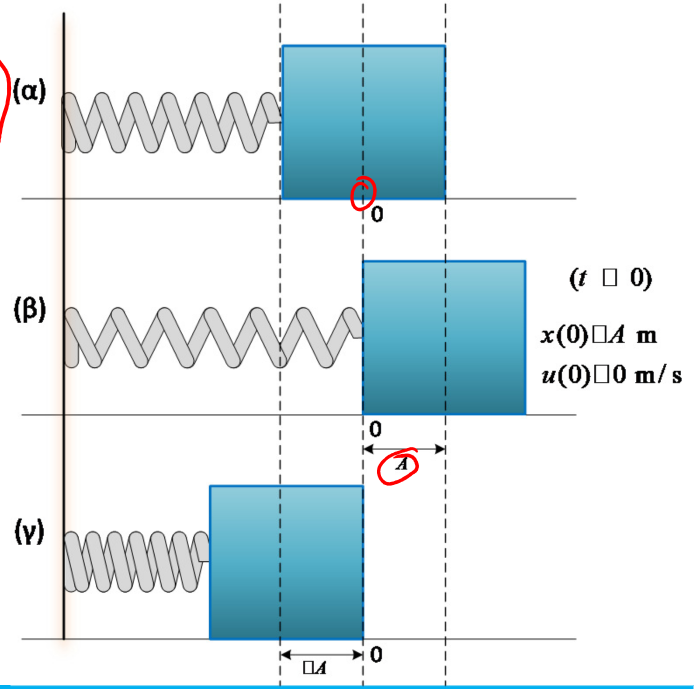
$\varphi = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

- Επίσης, ξέρετε ότι η γενική λύση είναι της μορφής

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

για $t > 0$



- Αν αρχίσουμε να μελετάμε το πρόβλημα στη θέση (β) τότε οι αρχικές συνθήκες είναι οι

$$x(0) = A$$
$$u(0) = x'(0) = 0$$

- Υπό αυτές τις συνθήκες:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t)$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$**
- Θεωρούμε ότι η είσοδος είναι μηδέν, $x(t) = 0 \ \forall \ t$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y_{zi}(t) = \boxed{0}$$

$a_0 y_{zi}(t) + a_1 y_{zi}^{(1)}(t) + a_2 y_{zi}^{(2)}(t)$

- Μπορεί να δειχθεί ότι

$$\boxed{y_{zi}(t) = ce^{\lambda t},} \quad \lambda, c \in \mathbb{C}$$

- Τότε

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k e^{\lambda t} = 0$$

$$ce^{\lambda t} \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$$

- Για να ισχύει η ισότητα πρέπει

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0}$$

$\boxed{a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 = 0}$ χ.π.

- **Συστήματα**

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0} \Leftrightarrow a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots + a_N\lambda^N = 0$$

N διακριτές

- Παραγοντοποιώντας το πολυώνυμο

$$\boxed{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_N) = 0}$$

- Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος
- Οι ρίζες του πολυωνύμου $\lambda_i, i = 1,2,..,N$ ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος (ιδιοσυχνότητες - eigenfrequencies)
- Άρα υπάρχουν N διαφορετικά c, λ που ικανοποιούν την αρχική σχέση
- Μπορεί να δειχθεί ότι το άθροισμα των παραπάνω ριζών ικανοποιεί την ίδια σχέση
- Άρα

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}, t > 0 \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}\right) u(t)$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$**
- Η παρακάτω σχέση

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}, t > 0 \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t) \quad (1)$$

ισχύει μόνο αν οι ρίζες λ_i είναι απλές ή διακριτές

- Σε περίπτωση που υπάρχει πολλαπλή ρίζα στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω $\lambda = \lambda_1$, τότε το πολυώνυμο γράφεται ως

η πολλαπλότητα της λ_1 είναι r

$$(\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1})(\lambda - \lambda_{r+2}) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

και η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}(t) = \sum_{l=1}^{r} c_l t^{l-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{k=r+1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} \quad (2) \quad t>0$$

- Τα c_i υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα**

$a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1} y^{(N-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0$

$a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_0 = 0$ χ.ε.

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t).$$

με αρχικές συνθήκες

$$\boxed{y(0^-) = 0, y'(0^-) = -2}$$

Χαρακτηριστικό πολ. $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$

$\lambda_1 = -2$
$\lambda_2 = -3$ | χαρακ. ρίζες

$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$ $\quad t>0$

$y_{zi}(0^-) = c_1 e^{\lambda_1 0^-} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot 0^-} = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$ | $\Rightarrow 2c_2 - 3c_2 = -2 \Rightarrow$

$\dot{y}_{zi}(0^-) = -2c_1 e^{\lambda_1 0^-} - 3c_2 e^{\lambda_2 0^-} = -2c_1 - 3c_2 = -2$ $\quad \Rightarrow c_2 = 2$

$c_1 = -2$

$y_{zi}(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-3t}, \quad t>0$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0^-) = A, x'(0^-) = 0$$

Χ.Π. $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = j\omega_0$, $\lambda_2 = -j\omega_0$ χαρ. ρίζες

$\lambda^2 = -\omega_0^2 = j^2\omega_0^2 = (j\omega_0)^2$

$x_{zi}(t) = c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 \cdot e^{-j\omega_0 t}, \quad t>0$

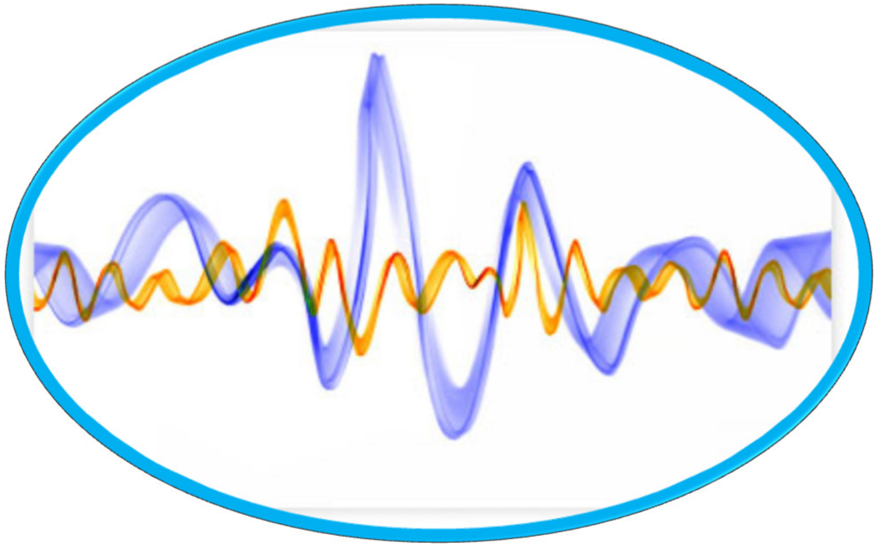
$x_{zi}(0^-) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = A \Rightarrow c_1 = \frac{A}{2}$

$\dot{x}_{zi}(0^-) = j\omega_0 c_1 e^0 - j\omega_0 \cdot c_2 e^0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{A}{2}$

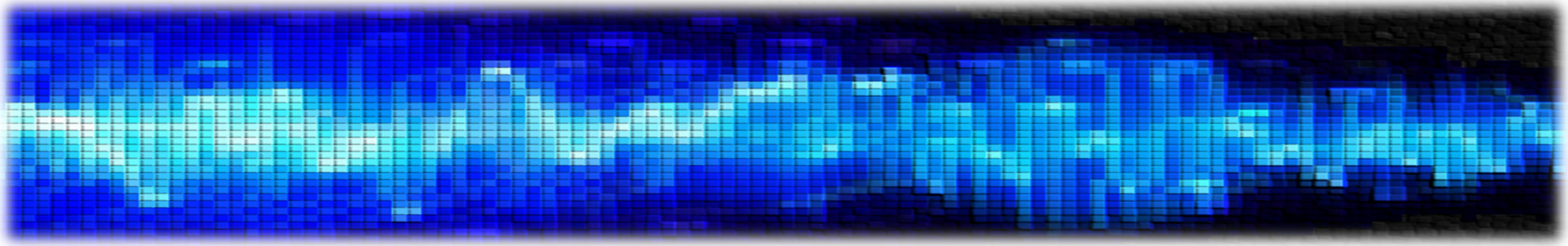
$x_{zi}(t) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t} = A \underbrace{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}}_{\text{Euler}} = A\cos(\omega_0 t), \quad t>0$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Κρουστική Απόκριση
- Απόκριση Μηδενική Κατάστασης

(-1) $\delta(t) \to \boxed{T} \to y(t) = T\{\delta(t)\} = h(t)$

(0) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

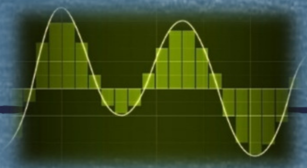
σήμα

(1) $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

τιμή (ένας αριθμός)

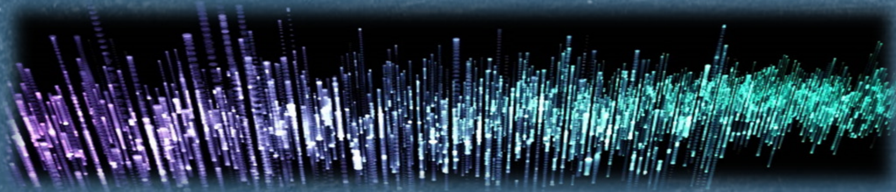
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

Τι περιέχει το HY215?



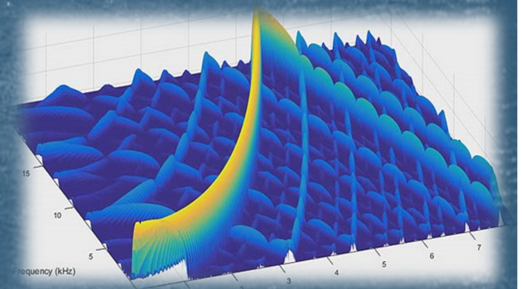
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

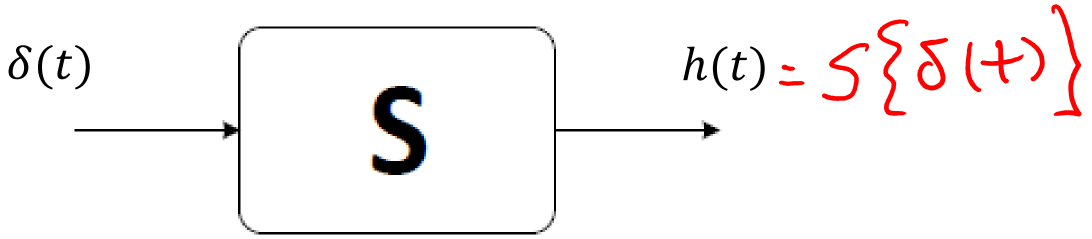


2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- Γνωρίσαμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως την έξοδο του συστήματος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες
  - Θεωρώντας την είσοδο μηδενική
- Ας προχωρήσουμε στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την (μη-μηδενική) **είσοδο** του συστήματος
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές είσοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - ...απουσία αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$
- Συμβολισμός: $h(t)$



- Εμείς ήδη γνωρίζουμε τον τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου ←
  - Ας τον εκμεταλλευτούμε! ☺
- Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που «ζει» μόνο για $t = 0$, και μετά εξαφανίζεται!
  - Άρα επιδρά στο σύστημα ακαριαία, και μετά εξαφανίζεται
- Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η συνάρτηση Δέλτα γεννά νέες «αρχικές» συνθήκες στο σύστημα!
- Οι «αρχικές» αυτές συνθήκες υπάρχουν για $\boxed{t = 0^+}$ και θα είναι της μορφής

$$h(0^+), h'(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι τιμές των νέων αυτών «αρχικών» συνθηκών είναι

$$\boxed{\begin{gathered} h(0^+) = 0 \\ h'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{gathered}}$$

$$a_N \frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \ldots$$

- Μπορούμε να λύσουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με αυτές τις συνθήκες!! ☺

- Αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

λύνουμε την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0$$

με «αρχικές» συνθήκες

$$\begin{gathered} h(0^+) = 0 \\ h'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{gathered}$$

- Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα

- **Παράδειγμα**

  - Έστω το σύστημα

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)}$$

$a_N = 1$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = \delta(t)$$

$t > 0^+$

χ. ε. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$ $(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$

$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t > 0$

Αρχ. Συνθήκες

$h(0^+) = 0$

$\dot{h}(0^+) = 1$

$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$\dot{h}(0^+) = -c_1 - 2c_2 = 1 \Rightarrow -c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -1 \Rightarrow c_1 = 1$

Επομένως: $h(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0$