- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:

○ Σχεδιάστε τα σήματα:

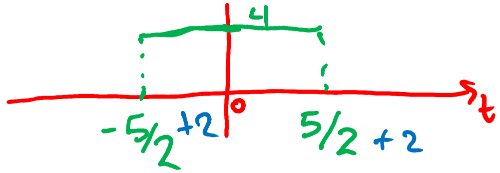
(α′) $e^{-2t}u(t-2)$

(β′) $u(t^2-4)$

(γ′) $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

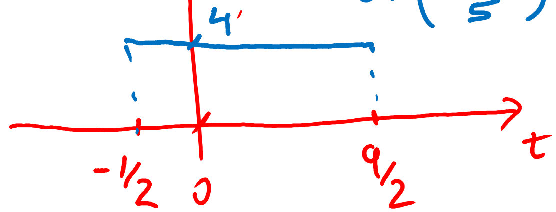
(δ′) $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

γ) $4\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{5}\right)$

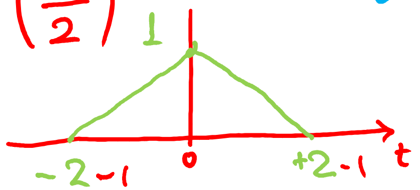


$t \to t-2$

$4\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

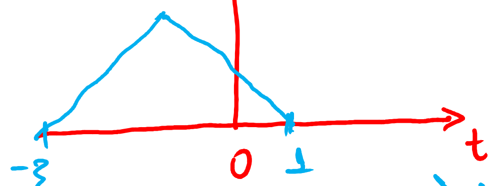


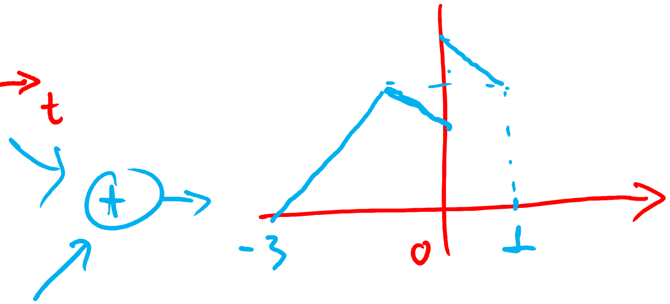
δ) $\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2}\right)$



$t \to t+1$

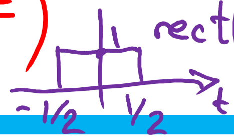
$\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)$



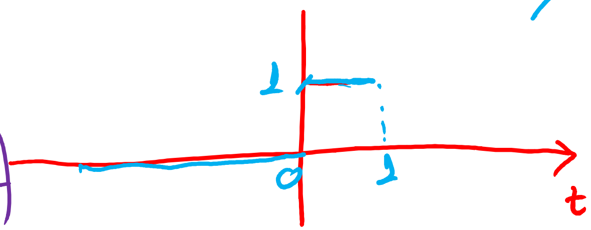


$\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\cancel{2}(t-1/2)}{\cancel{2}1}\right) =$

$= \mathrm{rect}\left(\frac{t-1/2}{1}\right)$

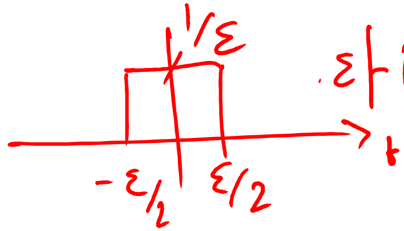


$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{1}\right)$



- **Σήματα**
- **Η κρουστική ~~συνάρτηση~~ Δέλτα** (κατανομή Dirac)
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ, ***αλλά με σταθερό μοναδιαίο εμβαδό***, τι θα κάναμε?
  - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \boxed{\frac{1}{\epsilon}}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$



εμβαδόν =1

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$

  - ...και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon \to 0} p(t)$
- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία:

$$\boxed{\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) dt = 1}$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \qquad t \neq 0$$

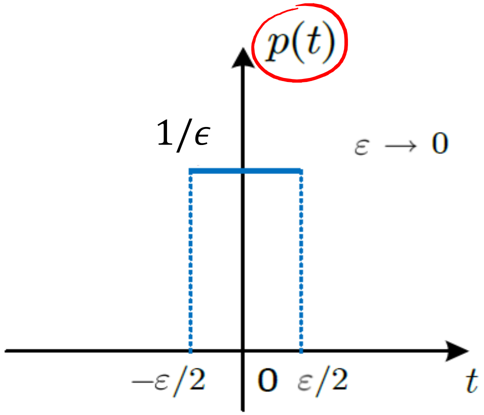
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

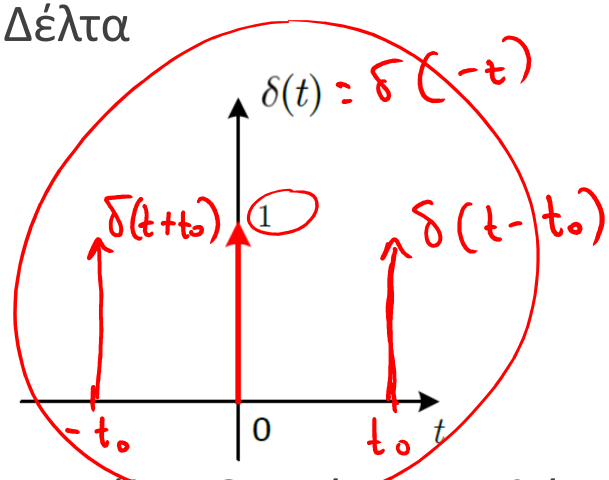
όταν $\epsilon \to 0$

- Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **κρουστική συνάρτηση Δέλτα** – ή απλά **συνάρτηση Δέλτα** στο εξής – και γράφεται ως $\delta(t)$
  - Η συνάρτηση Δέλτα **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση – είναι **κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση**!
- Η συνάρτηση Δέλτα λοιπόν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

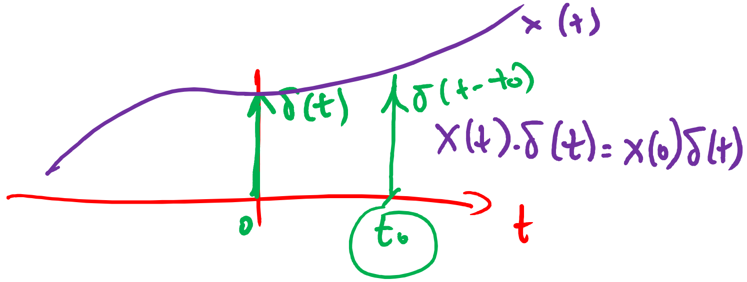
$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω
- Παρατηρήστε τη σχεδίαση της συνάρτησης Δέλτα





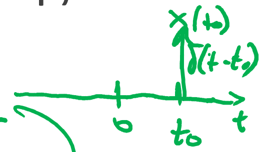
- Προσέξτε ότι το 1 στη «μύτη» της συνάρτησης Δέλτα **δεν** είναι το πλάτος της!
  - Αυτό είναι άπειρο!
- Είναι η τιμή του «εμβαδού» της
- Οι πράξεις που επιτρέπονται με τη συνάρτηση Δέλτα είναι πρόθεση, αφαίρεση, και πολλαπλασιασμός με συνεχή συνάρτηση. Οι μετασχηματισμοί που είδαμε επιτρέπονται όλοι



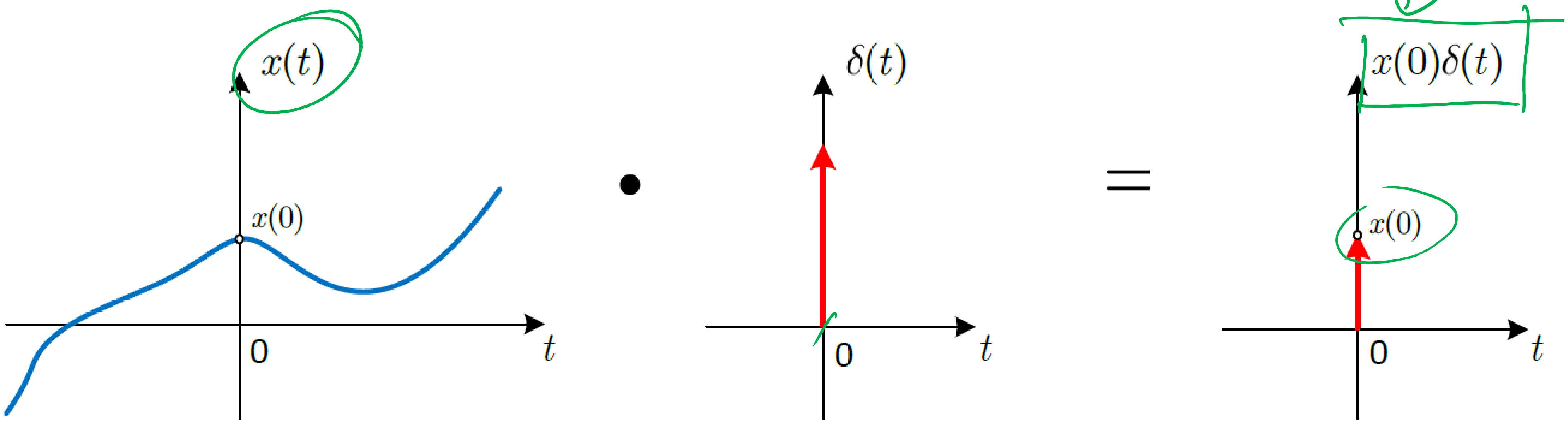
- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Αν πολλαπλασιάσουμε ένα συνεχές σήμα με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία «ζει» τη χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε ουσιαστικά αλλάζουμε το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t-t_0) = \boxed{x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

Σήμα



- Ουσιαστικά η παραπάνω πράξη **δειγματοληπτεί** το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0
- Σχηματικά:



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Η προηγούμενη ιδιότητα μας βοηθά να ορίσουμε σήματα που έχουν τιμές μόνο για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, π.χ.

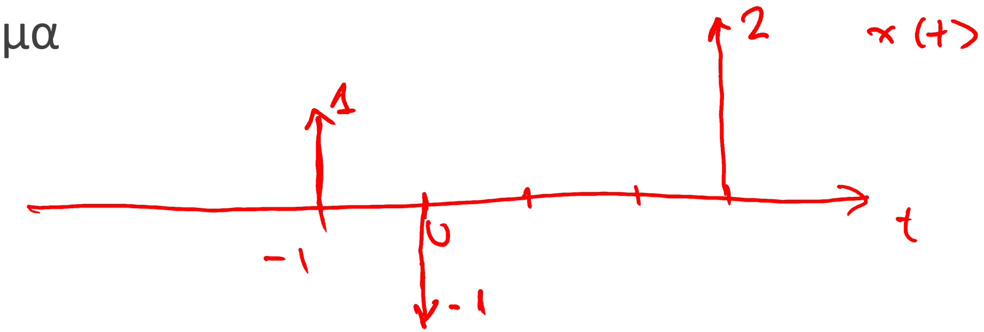
$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -1 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

1

$$= 1\delta(t+1) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3)$$

2

- Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση της δειγματοληψίας, περιμένουμε να λάβουμε το εμβαδό κάτω από την επιφάνεια $x(t)\delta(t-t_0)$…
  - … το οποίο είναι $x(t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt = 1$$

- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{x(t)\delta(t-t_0)}_{x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)}dt = x(t_0)\underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt}}_{1} = x(t_0)$$

τ.μ.ή

- Μερικές ακόμα ιδιότητες που μπορείτε να αποδείξετε είναι οι:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \qquad a \neq 0$$

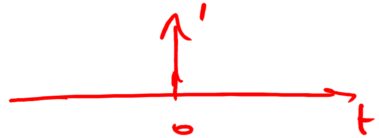
$$\delta(-t) = \delta(t)$$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

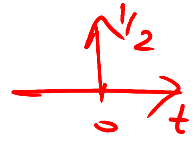
○ Υπολογίστε τα

$$(3t^2+1)\delta(t) = (3t^2+1)\big|_{t=0}\cdot\delta(t) = \delta(t)$$

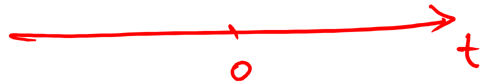


$$(\overbrace{t^2+\cos\pi t}^{x(t)})\delta(t-1) = (t^2+\cos(\pi t))\big|_{t=1}\cdot\delta(t-1) = (1+(-1))\delta(t-1) = 0\cdot\delta(t-1)$$

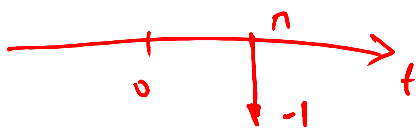
$$e^{-t}\delta(2t) = e^{-t}\,\frac{1}{2}\delta(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\big|_{t=0}\delta(t) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$



$$t\delta(t) = t\big|_{t=0}\delta(t) = 0\,\delta(t)$$



$$\cos(t)\,\delta(t-\pi) = \cos t\big|_{t=\pi}\delta(t-\pi) = -\delta(t-\pi)$$



- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

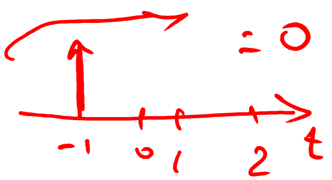
○ Υπολογίστε τα

Τ.Ι.Δ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\underbrace{3t^2+1}_{x(t)})\delta(t)dt = x(t_0) = 3t^2+1\Big|_{t=0} = 1$$

$$\int_{-1}^{1} (3t^2+1)\delta(t)dt = x(t_0) = 3t^2+1\Big|_{t=0} = 1$$

$$\int_{1}^{2} (\underbrace{\log_{10} 10t^2}_{x(t)})\delta(t+1)dt = 0$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)dt = t^2+\cos\pi t\Big|_{t=1} = 1-1=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\delta(2t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\frac{1}{2}\delta(t)dt = \frac{1}{2}e^{-t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Η (ήδη!) γνωστή μας βηματική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική
  - Έχει άραγε παράγωγο? Αν ναι, ποια είναι αυτή?
- Από τον ορισμό της

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η παράγωγός της είναι παντού μηδέν εκτός από τη στιγμή $t = 0$, όπου δεν ορίζεται παράγωγος

  - Αλλιώς, η παράγωγος είναι άπειρη

- Άρα μια «γενικευμένη» έννοια της παραγώγου της βηματικής συνάρτησης θα ικανοποιούσε την ιδιότητα

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

- Επίσης από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} u'(t)dt = \overset{1}{u(\epsilon)} - \overset{0}{u(-\epsilon)} = 1 - 0 = 1$$

για $\epsilon > 0$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Συνολικά

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

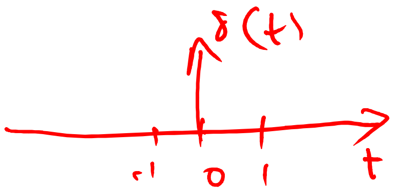
- Μα αυτές οι ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα!
- Άρα η (γενικευμένη) **παράγωγος** της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$$\boxed{\delta(t) = u'(t)} \quad (1)$$

- Άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η:

$$u(-1) = \int_{-\infty}^{-1} \delta(\tau)d\tau = 0$$



$$(2) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)}$$

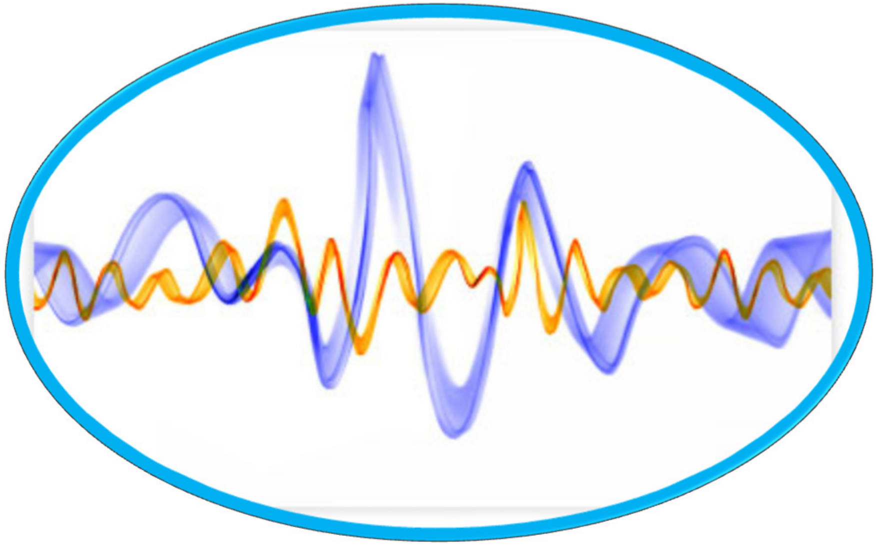
$$u(1) = \int_{-\infty}^{1} \delta(\tau)d\tau = 1$$

$$u(12) = \int_{-\infty}^{12} \delta(\tau)d\tau = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σύνοψη:

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα	
Ορισμός	$\delta(t) = 0,\ t \neq 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{\lvert a\rvert},\quad a \in \Re - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$
Παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = -\frac{d}{dt}x(t)\Big\rvert_{t=0}$
$n-$οστή παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(t)\Big\rvert_{t=0}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

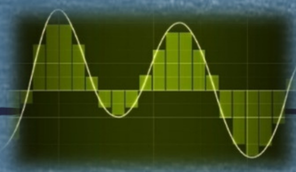


ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η

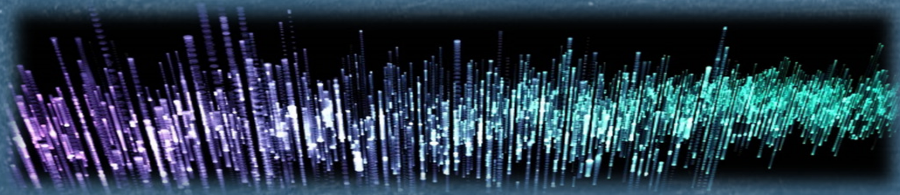
- Συστήματα

Τι περιέχει το HY215?



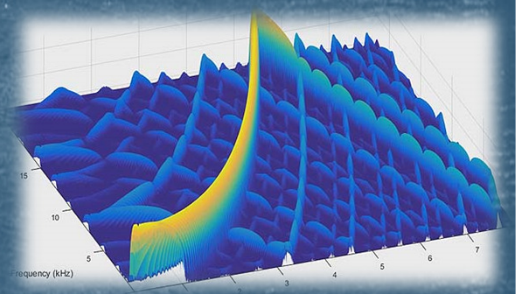
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



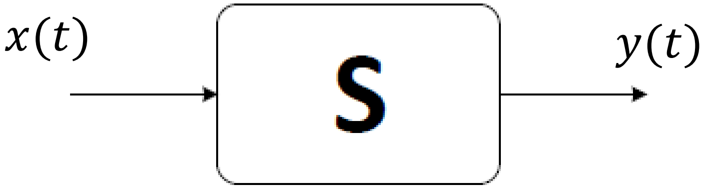
2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία

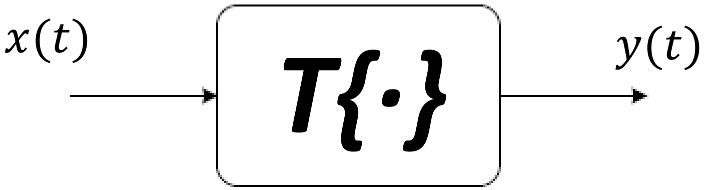


- **Σύστημα**: δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$

- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου



- Εναλλακτικά ένα σύστημα περιγράφεται ως



με

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

και $T\{\cdot\}$ ο τελεστής του συστήματος που εφαρμόζεται στην είσοδο και παράγει την έξοδο

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα περιγράφουμε ένα σύστημα ως μια ή ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν την λειτουργία του
  - Δηλ. ως ένα **μαθηματικό μοντέλο** που μπορεί να περιγράφει ένα φυσικό, ηλεκτρικό, μηχανικό, ή όποιο άλλο σύστημα

- **Συστήματα**

- Μερικές σημαντικές κατηγορίες συστημάτων είναι οι ακόλουθες:

1. Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα
2. Χρονικά αμετάβλητα και χρονικά μεταβλητά συστήματα
3. Δυναμικά ή στατικά συστήματα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά συστήματα
5. Ευσταθή ή ασταθή συστήματα

ΓΧΑ

- Θα εξετάσουμε σχεδόν όλες τις παραπάνω κατηγορίες αλλά το βάρος της μελέτης μας θα πέσει μόνο σε **αυτές** τις κατηγορίες

- Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα **Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ)** συστήματα
  - Οι υπόλοιπες ιδιότητες θα ποικίλλουν… ☺

- **Συστήματα**
- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

- Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν ικανοποιεί δυο ιδιότητες
  - Την ιδιότητα της **ομογένειας** (homogeinity)
  - Την ιδιότητα της **προσθετικότητας** (additivity) (ή αθροιστικότητας)

- Η ιδιότητα της **ομογένειας** λέει ότι αν

$$x(t) \to y(t)$$

ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$\boxed{\alpha x(t)} \to \boxed{\alpha y(t)}$$

- Η ιδιότητα της **προσθετικότητας** λέει ότι αν

$$x_1(t) \to y_1(t), \quad x_2(t) \to y_2(t)$$

δυο ζεύγη εισόδου-εξόδου, τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$$

- **Συστήματα**
- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα
- Γραμμικότητα: αν $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ και $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, τότε το σύστημα είναι **γραμμικό** αν είναι προσθετικό και ομογενές, δηλ. αν

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

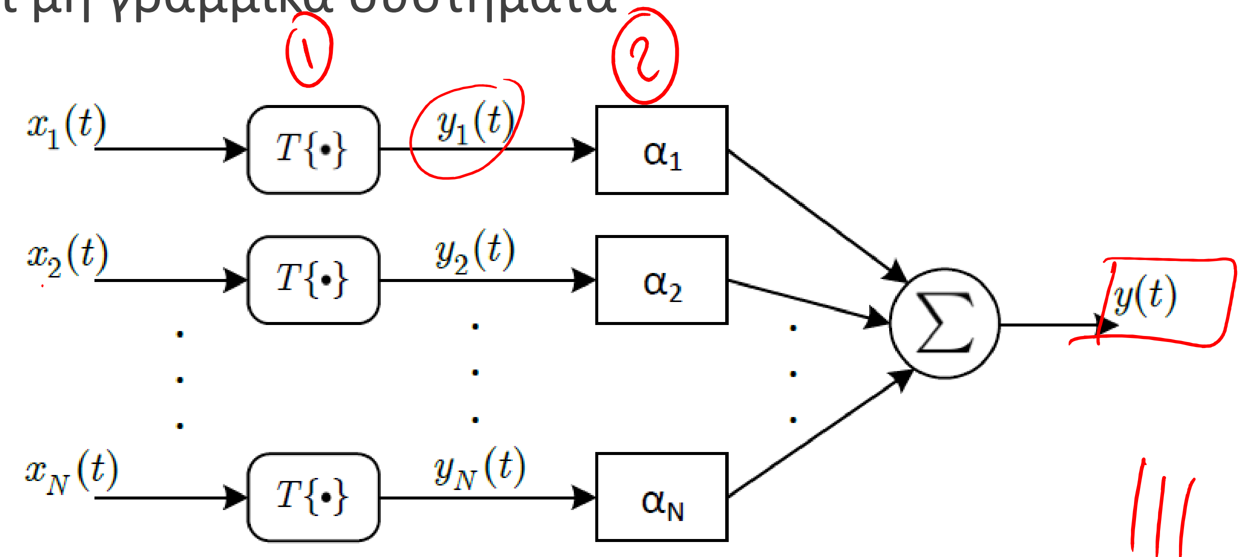
- Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι ένα *ιδανικό* σύστημα μικροφώνου-ηχείου
  - Μιλώντας στο μικρόφωνο, ακούμε ακριβώς τη φωνή μας

    $x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y(t)$

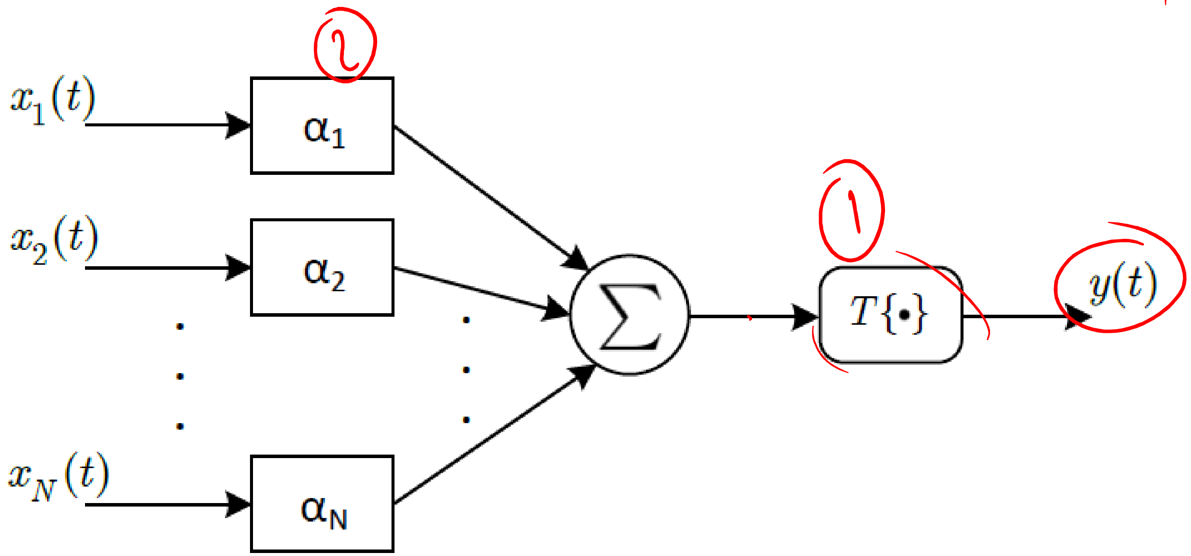
    $ax(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow ay(t)$
  - Αυξάνοντας της ένταση της φωνής μας (επί α) >1, ακούμε τη φωνή μας αντίστοιχα πιο δυνατή κατά τον ίδιο παράγοντα (επί α)
  - Αν μιλήσουν δυο άτομα στο μικρόφωνο, οι φωνές τους (τα σήματα εισόδου) θα προστεθούν και στην έξοδο θα ακουστούν ξανά τα δυο σήματα μαζί, σαν να ακούγαμε τον καθένα ξεχωριστά και να αθροίζαμε τις φωνές τους

- Στην πράξη, το ηχείο έχει ένα άνω όριο έντασης που μπορεί να αναπαράξει (clipping effect)

- **Συστήματα**
- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα



||| γραμμικό



- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν τα συστήματα

1 $$y(t) = \sqrt{x(t)} \quad = T\{x(t)\}$$

2 $$y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t)$$

είναι γραμμικά

1 Ομογένεια:

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t) = \sqrt{x(t)}$$

$$\alpha x(t) \xrightarrow{T} \tilde{y}(t) = \sqrt{\alpha x(t)} = \sqrt{\alpha}\sqrt{x(t)} = \sqrt{\alpha} \cdot y(t) \neq \alpha \cdot y(t)$$

Δεν είναι ομογενές => ΜΗ γραμμικό

Αθροιστικότητα.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sqrt{x_1(t)}$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \sqrt{x_2(t)}$$

ΔΕΝ είναι αθροιστικό.

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \tilde{y}(t) = \sqrt{x_1(t) + x_2(t)} \neq y_1(t) + y_2(t)$$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$2 \quad y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t) = T\{x(t)\}$$

Ομογένεια

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t)$$

$$a x(t) \longrightarrow \tilde{y}(t) = \frac{1}{2} a x(2-t) + a x(t) =$$

$$= a \underbrace{\left\{\frac{1}{2}x(2-t) + x(t)\right\}}_{y(t)} = a y(t) \quad \checkmark$$

Αθροιστικότητα:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(2-t) + x_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}x_2(2-t) + x_2(t) \quad \checkmark$$

Για

$$x_1(t) + x_2(t) \to \tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(2-t) + x_2(2-t)\right) + x_1(t) + x_2(t) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x_1(2-t) + x_1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}x_2(2-t) + x_2(t)}_{y_2(t)} =$$

$$= y_1(t) + y_2(t)$$

- **Συστήματα**

- Πάρα πολλά πρακτικά συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_{\cancel{k}\,l} \frac{d^l}{dt^l} x(t)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l x^{(l)}(t)$$

- RC κύκλωμα

$$\frac{d}{dt}\Delta V_c + \frac{1}{RC}\Delta V_c = \frac{1}{R}\Delta V_s$$

- Απλός αρμονικός ταλαντωτής

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι τέτοια συστήματα είναι **γραμμικά**
  - …αν βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία

    Αν $x(t)=0$ για $t<t_0 \Rightarrow y(t)=0$, $t<t_0$
    - Ο πυκνωτής αφόρτιστος, η μάζα σε ακινησία

- Θα μας απασχολήσουν πολύ στη συνέχεια

- **Συστήματα**
- Χρονικά μεταβλητά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα
- Χρονική αμεταβλητότητα: αν $x(t) \to y(t)$, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο αν

$$x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$

- Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι ένα *ιδανικό* σύστημα μικροφώνου-ηχείου με **σταθερή** καθυστέρηση
  - Μιλώντας στο μικρόφωνο, ακούμε ακριβώς τη φωνή μας μετά από k δευτ/πτα
  - Αν καθυστερήσουμε να μιλήσουμε κατά λ δευτ/πτα, θα καθυστερήσουμε να ακούσουμε τη φωνή μας κατά $\lambda + k$ δευτ/πτα
    - Όμως η φωνή που θα ακούσουμε θα είναι ακριβώς το ίδιο σήμα με πριν – δε θα έχει αλλάξει κάτι άλλο
- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα που καθυστερεί την έξοδό του όσο καθυστερεί η είσοδός του είναι **χρονικά αμετάβλητο**
- Ένα χρονικά **μεταβλητό** σύστημα δίνει διαφορετικές εξόδους για διαφορετικές καθυστερήσεις της εισόδου!
  - Τόσο σε επίπεδο καθυστέρησης όσο και σε επίπεδο μορφής της εξόδου!

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:
- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$1) \quad y(t) = tx(t-2) \Rightarrow y(t) = T\{x(t)\}$$

$$2) \quad y(t) = \sin\big(x(t+1)\big)$$

είναι χρονικά αμετάβλητα

1) $x(t) \rightarrow y(t) = t\,x(t-2)$

Είσοδος καθ.: $x(t-t_0) \rightarrow \tilde{y}(t) = t\,x((t-t_0)-2) = t\,x(t-t_0-2)$

Έξοδος καθ.: $y(t-t_0) = (t-t_0)\,x((t-t_0)-2) = (t-t_0)\,x(t-t_0-2)$

$\tilde{y}(t) \neq y(t-t_0)$ ΔΕΝ είναι χρ. αμετ.

2) $x(t) \rightarrow y(t) = \sin(x(t+1))$

$x(t-t_0) \rightarrow \tilde{y}(t) = \sin(x((t-t_0)+1)) = \sin(x(t-t_0+1))$

$y(t-t_0) = \sin(x(t-t_0+1))$

$\Rightarrow \hat{y}(t) = y(t-t_0)$

ΕΙΝΑΙ χρον. αμετ.

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$y(t) = tx(t-2)$$

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$y(t) = \sin\big(x(t+1)\big)$$

- **Συστήματα**

- Δυναμικά και Στατικά συστήματα

- Τα **δυναμικά** συστήματα απαιτούν προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = 2x(t-1) + x(t)$$
$$y(t) = 2y(t-2) + x(-t)$$
$$y(t) = tx(t-1) + u(t)$$

- Τα **στατικά** συστήματα δεν απαιτούν τέτοιες τιμές, δηλ. υπολογίζουν την έξοδό μόνο από τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που βρίσκονται

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = 2x(t)$$
$$y(t) = x^2(t)$$
$$y(t) = \log_{10}|x(t)|$$

- **Συστήματα**

- Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα

- **Αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της τρέχουσας τιμής της εξόδου **δεν απαιτεί *μελλοντικές*** (χρονικά) τιμές της εισόδου
  - Συμπεριλαμβάνεται και η τρέχουσα χρονική στιγμή εισόδου

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t-2)$$
$$y(t) = x(t) + x(t-10)$$
$$y(t) = \frac{1}{x(t-10^5)}$$
$$y(t) = x(t)$$

- **Μη αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα που **απαιτούν μελλοντικές** τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τρέχουσα τιμή της εξόδου

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t+2)$$
$$y(t) = \sqrt{x(t+1)}$$
$$y(t) = y(t-1) + 2x(t) - x(t+4)$$