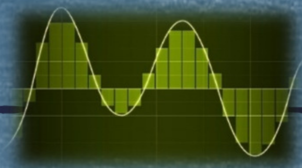
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η

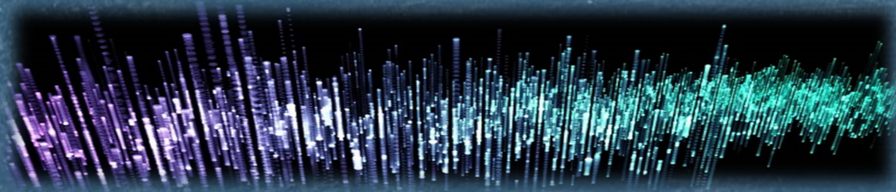
- Σήματα και Συστήματα

Τι περιέχει το HY215?



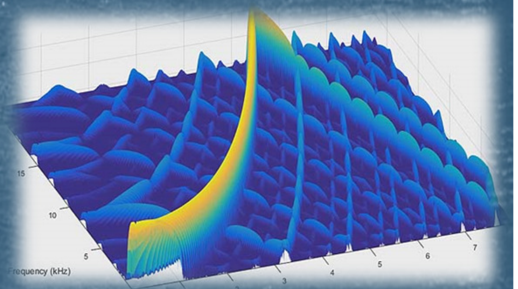
1º Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2º Κομμάτι

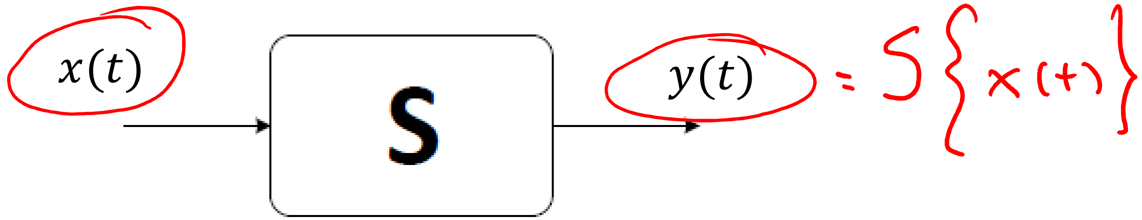
- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Σήμα**: φορέας πληροφορίας
  - Π.χ. εικόνα, ήχος, βίντεο, σύνολο δεδομένων, κλπ.

- Στα δικά μας πλαίσια, θα θεωρούμε ένα σήμα ως μια χρονοσειρά, δηλ. μια συνάρτηση του χρόνου
  - Η πληροφορία βρίσκεται στις μεταβολές του σήματος ως προς το χρόνο

- **Σύστημα**: δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$



- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου
  - Υπάρχουν και συστήματα πολλαπλών εισόδων ή/και πολλαπλών εξόδων

- Ας μιλήσουμε πρώτα για τα σήματα…
  - … για τα οποία είπαμε ότι θα περιγράφουμε **ως συναρτήσεις του χρόνου – $x(t)$**

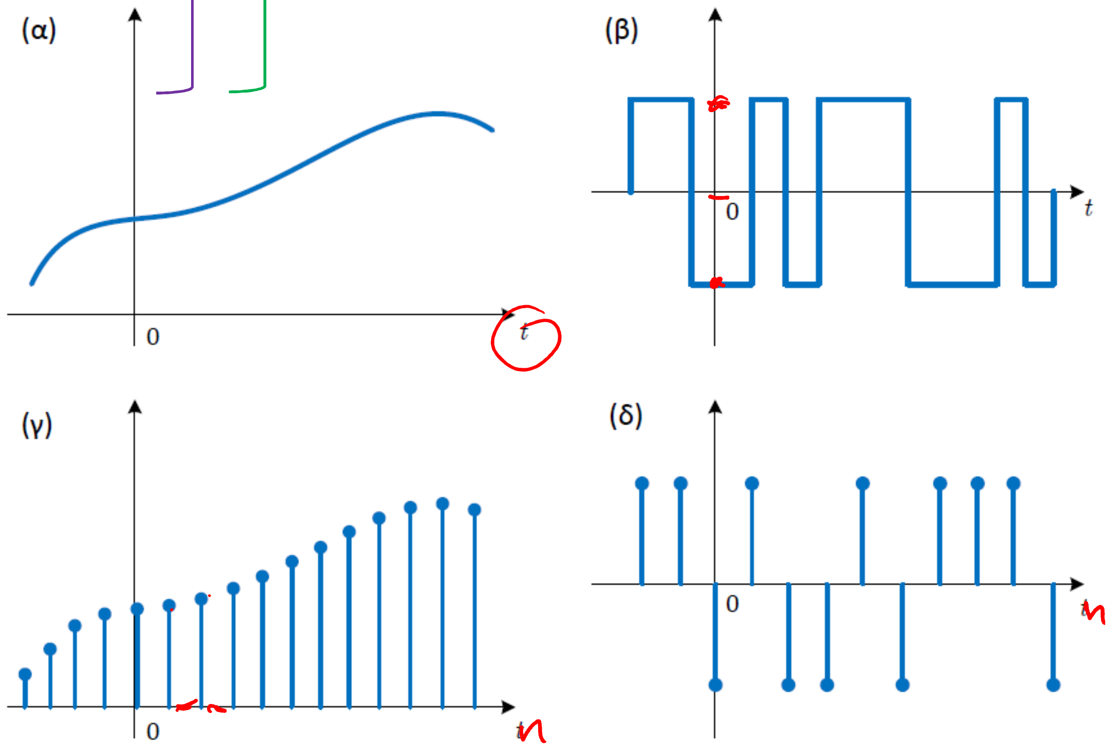
- **Σήματα**

- **<u>Κατηγορίες σημάτων:</u>**

1. Συνεχούς ή διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά ή ψηφιακά σήματα
3. Σήματα περιοδικά ή απεριοδικά
4. Σήματα ενέργειας ή ισχύος
5. Ντετερμινιστικά ή στοχαστικά

ΗΥ215

ΗΥ370



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα σήμα με έναν αριθμό
  - Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να αντιπροσωπεύει το «μέγεθος» του σήματος
- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Αν $0 < E_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ενέργειας
- Αν $0 < P_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!
  - Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x(t) = t^n, \qquad x(t) = e^{at}$$

δεν είναι τίποτε από τα δυο

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (εν γένει) εκ των προτέρων αν ένα σήμα είναι ενέργειας ή ισχύος (η τίποτε)
  - Υπάρχουν όμως κάποιοι «κανόνες» για να μην υπολογίζουμε κάθε φορά τυχαία μια εκ των δυο ποσοτήτων (και κάποιες φορές αναγκαστικά και τις δυο)

- **Κανόνες**:
  - Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == **φραγμένο πλάτος για κάθε t**

❑ Σήμα Ενέργειας

✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο

✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$

  ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

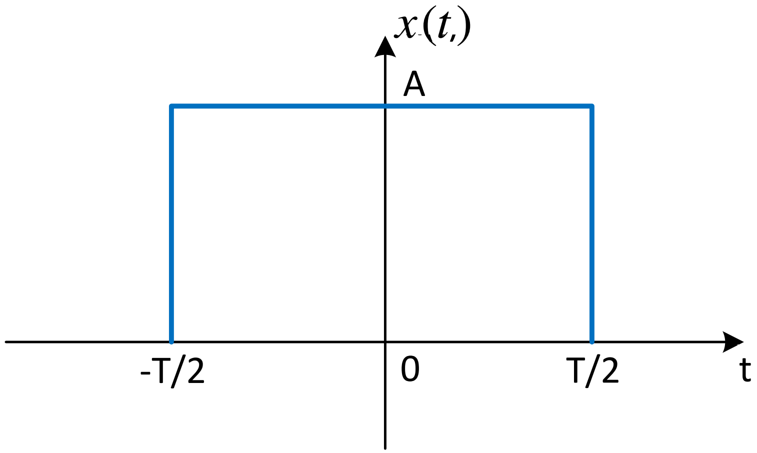
❑ Σήμα Ισχύος

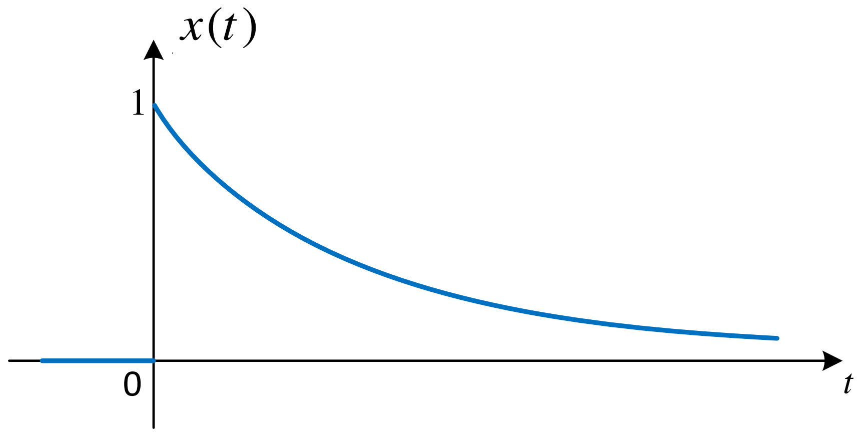
✓ Άπειρης διάρκειας

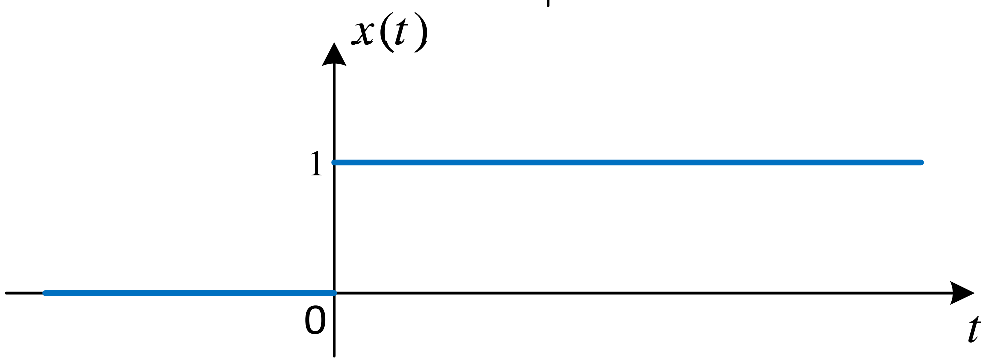
✓ Περιοδικό

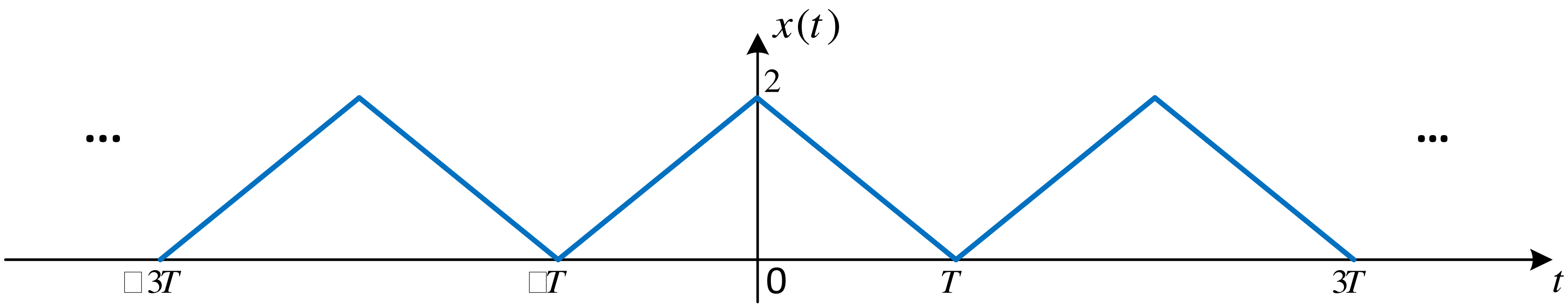
- **Σήματα**

- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**









- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

- Κάθε σήμα που μπορεί να φτιάξει κανείς στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση είναι σήμα **ενέργειας**

- Όμως τα σήματα ισχύος παρέχουν ένα αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για γενικότερη μελέτη σημάτων και συστημάτων

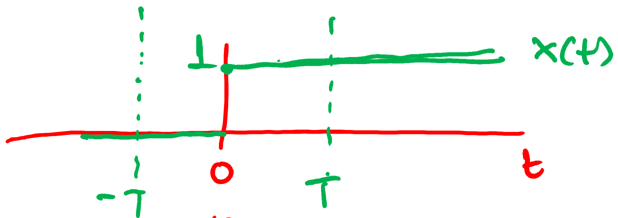
- Ας δούμε μερικά παραδείγματα

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

  - Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

    - a) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$ ενέργειας   β) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



a)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^1 1^2 dt + \int_1^{\infty} e^{-2t} dt = t\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t}\Big|_1^{\infty} =$$

$$= (1-0) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\lim_{t\to\infty} \cancel{e^{-2t}}^{\,0} - e^{-2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(0 - e^{-2}\right) = 1 + \frac{1}{2e^2} < \infty$$

β)

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\cancel{T}}\cancel{T} = \frac{1}{2} < \infty$$

άρα το β είναι ισχύος

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

  - Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

    - $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

▪ $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

- **Σήματα**

- **Σήματα Ενέργειας και Ισχύος**

$P_x: \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2a)\right)da$

$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\cancel{2T}}\frac{A^2}{2}\cancel{2T} + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\cos(2a)\,da$

$= \frac{A^2}{2} + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}B \to 0$

$= \frac{A^2}{2}$

- Μπορεί κανείς εύκολα (αλλά με κάμποσες πράξεις) να δείξει ότι

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), A \in \Re \to P_x = \frac{A^2}{2}$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)\,, A_i \in \Re \to P_x = \sum_{i=0}^{N}\frac{A_i^2}{2}$$

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, A \in \mathbb{C} \to P_x = |A|^2$$

$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\,|e^{j2\pi f_0 t}|^2\,dt =$

$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\cancel{2T}} A^2 \cancel{2T} =$

$= A^2$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i e^{j2\pi f_i t}\,, A_i \in \mathbb{C} \to P_x = \sum_{i=0}^{N}|A_i|^2$$

$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$

- Εξασκηθείτε αποδεικνύοντας αναλυτικά τα παραπάνω! ☺

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t

▪ Χρονική ολίσθηση (time shifting) $\longrightarrow$ $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t-t_0) = A\cos(2\pi f_0 (t-t_0)) =$$

$$= A\cos(2\pi f_0 t \underbrace{- 2\pi f_0 t_0}) =$$

▪ Χρονική αντιστροφή (time reversal)

φ : φάση μετατόπισης

$$= A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

▪ Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

$$\varphi = -2\pi f_0 t_0$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{2\pi}{T_0} t_0$$

- **Σήματα**

- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

■ Χρονική μετατόπιση/ολίσθηση (time shifting)

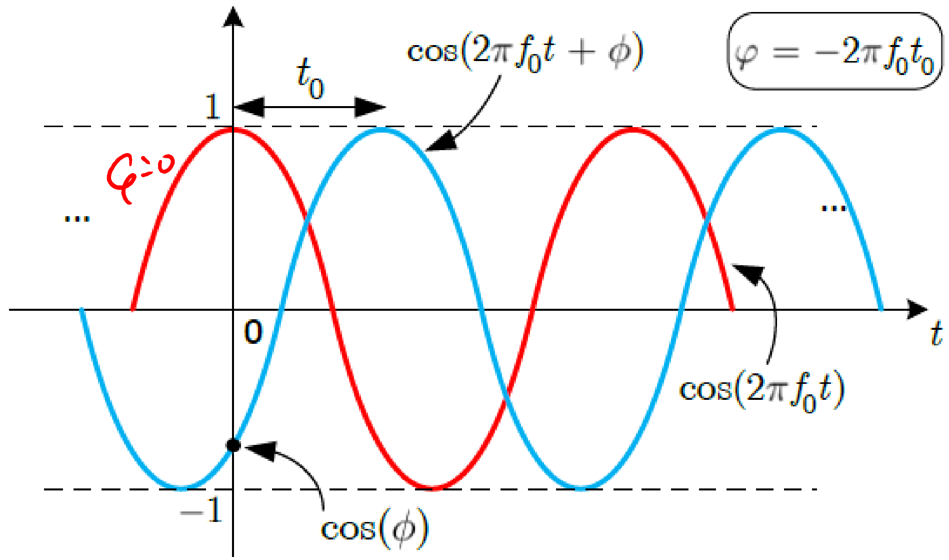
$x(t-2) \rightarrow$

$x(t-(-2)) = x(t+2) \leftarrow$

- Η χρονική ολίσθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη μετατόπιση του σήματος δεξιά ή αριστερά στον άξονα του χρόνου

- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $t - t_0$, με t_0 θετικό ή αρνητικό
  - Αν t_0 θετικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα δεξιά → καθυστέρηση
  - Αν t_0 αρνητικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα αριστερά → προήγηση
  - Η χρονική ολίσθηση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- Θυμηθείτε τα ημιτονοειδή σήματα

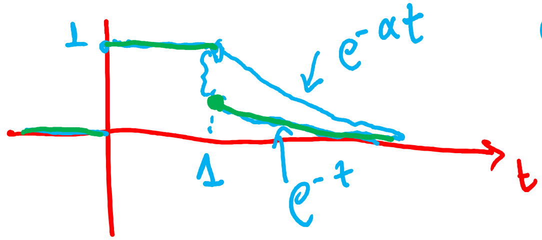


- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το καθυστερημένο κατά $t_0 = 2$ σήμα για το παρακάτω σήμα

■ $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

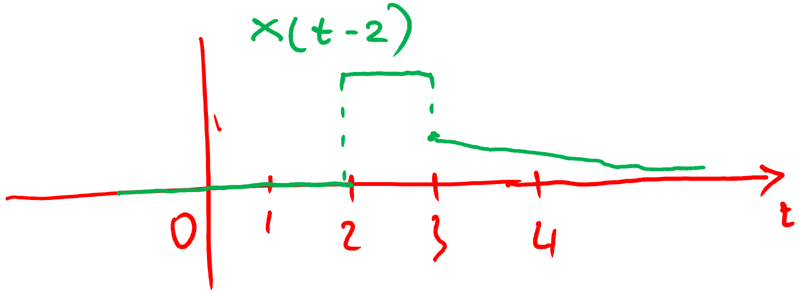


$0.999 \quad \alpha = \frac{1}{1000}$

$x(t - t_0)$

και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

$$x(t-2) = \begin{cases} 0 & t-2<0 \\ 1 & 0<t-2<1 \\ e^{-(t-2)} & t-2>1 \end{cases} \Rightarrow x(t-2) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ 1 & 2<t<3 \\ e^{-(t-2)} & t>3 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

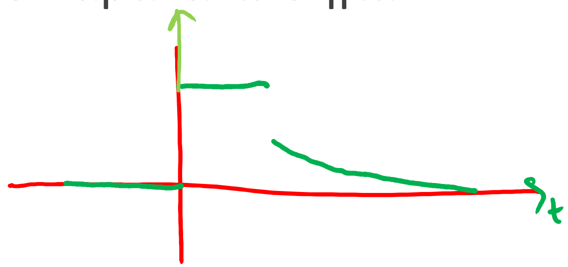
▪ Χρονική αντιστροφή (time reversal) (ανάκλαση)

- Η χρονική αντιστροφή δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $-t$
  - Αν το σήμα «ζει» στο θετικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στον αρνητικό ημιάξονα
  - Αν το σήμα «ζει» στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στο θετικό ημιάξονα
  - Αν το σήμα «ζει» και στους δυο άξονες, τότε το τμήμα του θετικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στον αρνητικό ημιάξονα και το τμήμα του αρνητικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στο θετικό ημιάξονα
  - Η χρονική αντιστροφή ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

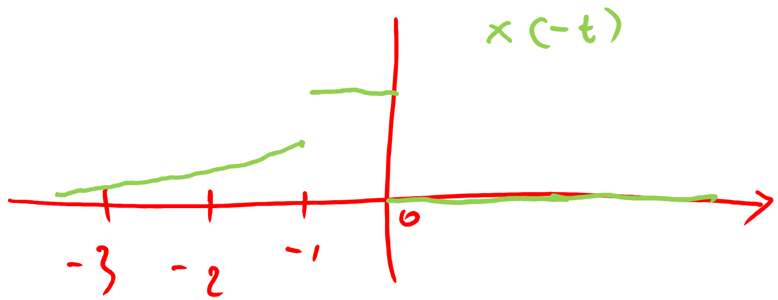
○ Βρείτε το σήμα $x(-t)$ για το παρακάτω σήμα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

$$x(-t) = \begin{cases} 0 & -t < 0 \\ 1 & 0 < -t < 1 \\ e^{t} & -t > 1 \end{cases} \Rightarrow x(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & -1 < t < 0 \\ e^{t} & t < -1 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

▪ Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

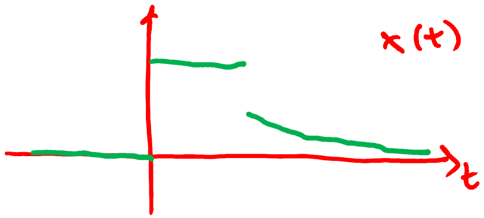
- Η χρονική κλιμάκωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη συμπίεση ή την επέκταση του σήματος στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $at, \alpha \in \Re$
  - Αν το σήμα «ζει» στο διάστημα $[c, d]$, τότε η κλιμάκωση κατά $a \neq 1$ θα το «μεταφέρει» στο διάστημα $[ca, da]$
  - Αν ο παράγοντας κλιμάκωσης είναι αρνητικός, γίνεται χρονική αντιστροφή παράλληλα με τη χρονική κλιμάκωση
  - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

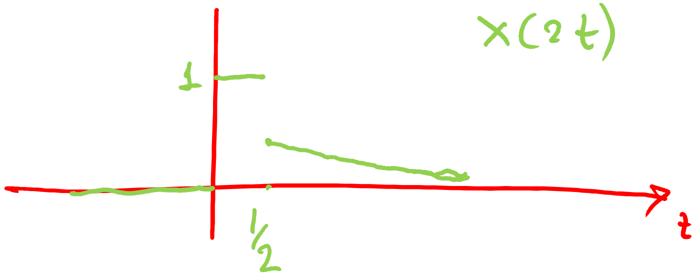
○ Βρείτε τα σήματα $x(2t)$ και $x\left(\frac{t}{3}\right)$ για το παρακάτω σήμα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε τα όλα.

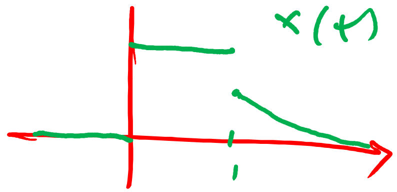
$$x(2t) = \begin{cases} 0 & 2t < 0 \\ 1 & 0 < 2t < 1 \\ e^{-2t} & 2t > 1 \end{cases} \Rightarrow x(2t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{1}{2} \\ e^{-2t} & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$



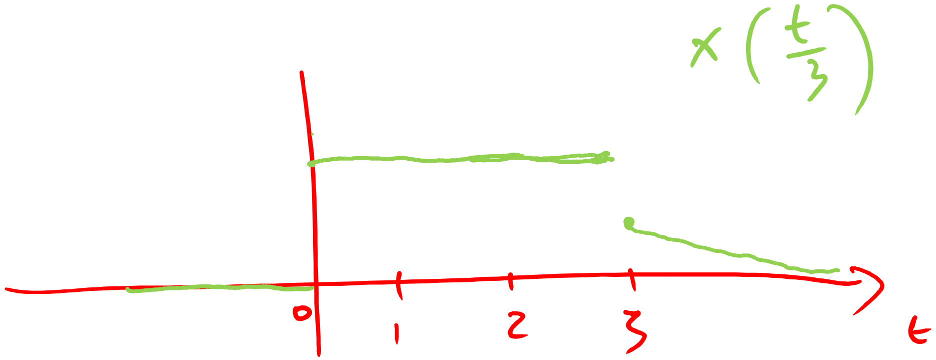
- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

$x\left(\frac{t}{3}\right)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<1 \\ e^{-t} & t>1 \end{cases}$$



$$x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \frac{t}{3}<0 \\ 1, & 0<\frac{t}{3}<1 \\ e^{-t/3} & \frac{t}{3}>1 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<3 \\ e^{-t/3} & t>3 \end{cases}$$



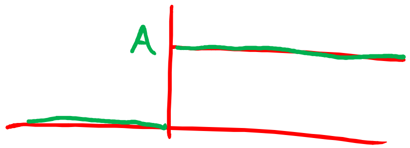
- **Σήματα**

- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**

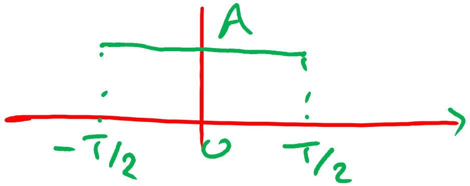
- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες

- Αυτά είναι:

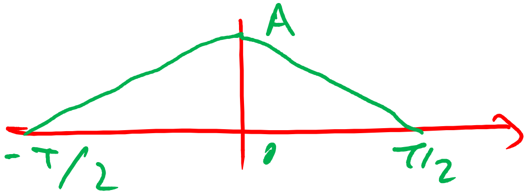
- ❑ **Η βηματική συνάρτηση**



- ❑ **Ο τετραγωνικός παλμός**



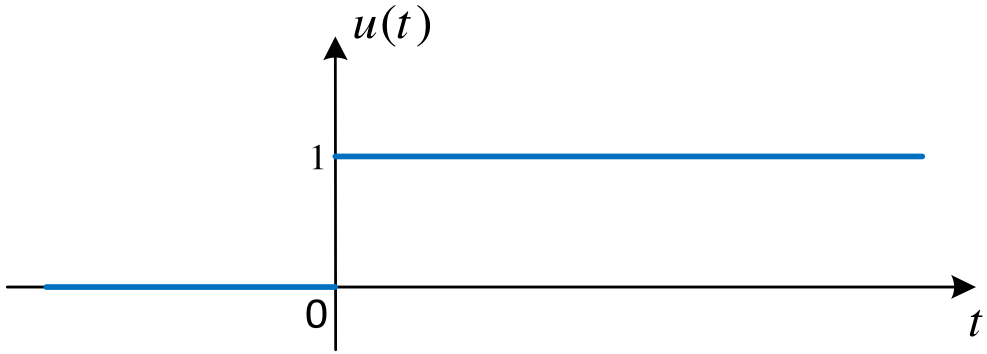
- ❑ **Ο τριγωνικός παλμός**



- ❑ **Η κρουστική συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα** $\delta(t)$

- **Σήματα**
- **Η βηματική συνάρτηση**
- Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



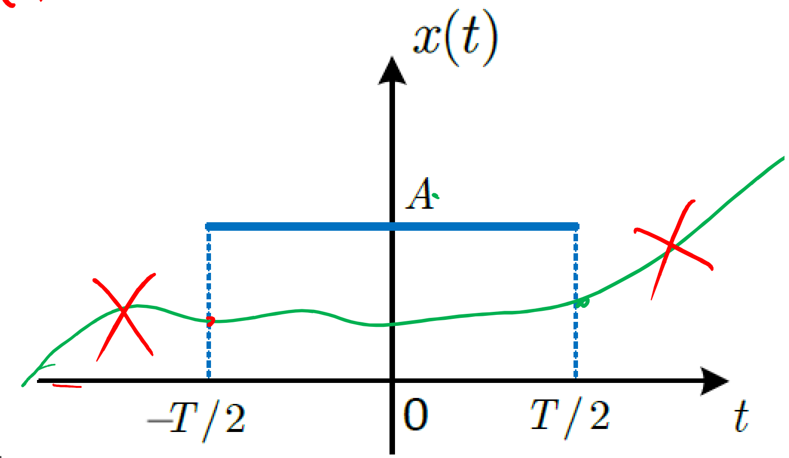
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές της είναι ως σήμα-διακόπτης (off-on)
  - δηλ. ως ένα ιδανικό μοντέλο ενός σήματος που πάει από 0 → 1 ακαριαία
- ...ή για να «κόψουμε» τμήματα άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς την με αυτά
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τη βηματική συνάρτηση
  - ...εκτός από τη διαίρεση σήματος με τη βηματική (διαίρεση με μηδέν)

- **Σήματα**
- **Ο τετραγωνικός παλμός**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

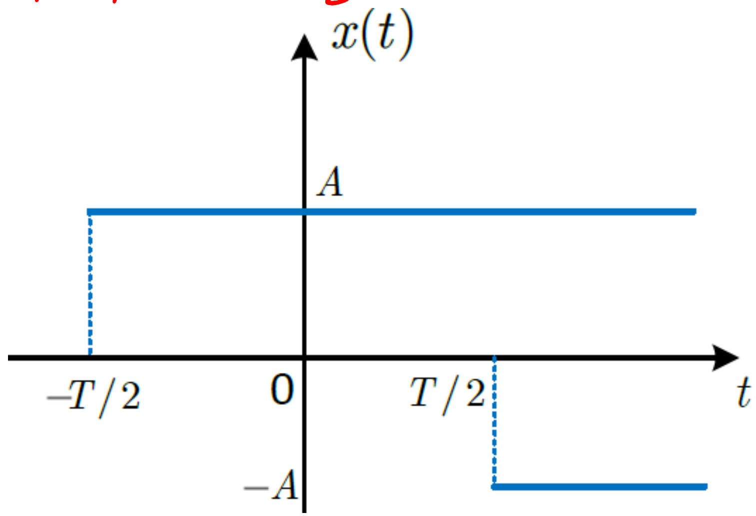
- Ο τετραγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} = \boxed{A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}$$



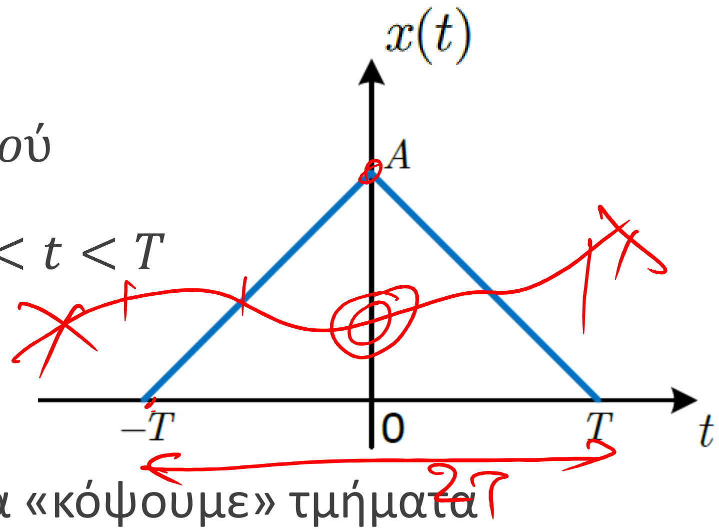
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τετραγωνικό παλμό
  - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)
- Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών συναρτήσεων
  - ...όπως στο σχήμα

$$x(t) = u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$



- **Σήματα**
- **Ο τριγωνικός παλμός**
- Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A\left(1 - \dfrac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases}$$
$$= A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
  - …αλλά δίνοντας περισσότερο βάρος στις τιμές του σήματος στο κέντρο του παλμού
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τριγωνικό παλμό
  - …εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

- Προσέξτε ότι στον συνοπτικό τύπο του παλμού ο παρονομαστής T είναι η **μισή** διάρκεια του, ενώ στον τετραγωνικό παλμό ο παρονομαστής T ήταν **όλη** η διάρκεια!

- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:

○ Σχεδιάστε τα σήματα:

(α) $e^{-2t}u(t-2)$

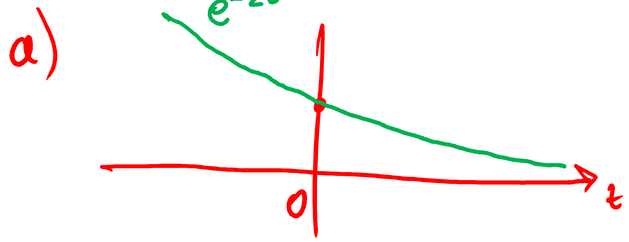
(β) $u(t^2-4)$

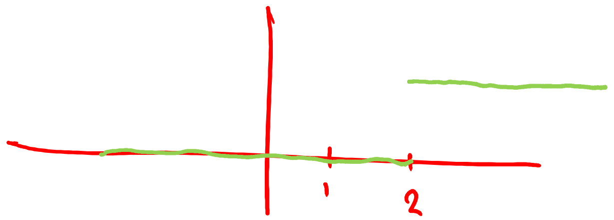
(γ) $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

(δ) $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

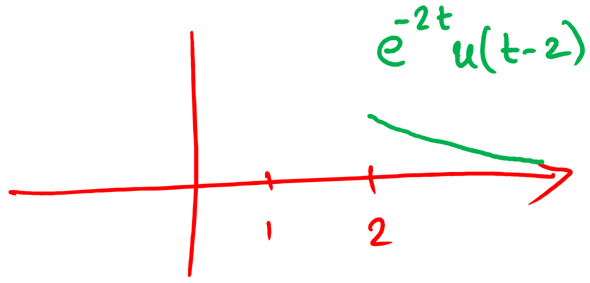
$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$

a)





=



$t^2-4 = (t-2)(t+2)$

β) $u(t^2-4) = \begin{cases} 0 & t^2-4<0 \\ 1 & t^2-4>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t^2-4<0 \\ 1 & (t-2)(t+2)>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{αλλού} \\ 1 & t<-2 \text{ ή } t>2 \end{cases}$